

На правах рукописи



Литвинов Владислав Львович

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ
РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С
ДВИЖУЩЕЙСЯ ГРАНИЦЕЙ**

1.2.2 – Математическое моделирование,
численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Самара – 2025

Работа выполнена на кафедрах «Общетеоретические дисциплины» и «Прикладная математика и информатика» федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Самарский государственный технический университет».

Научный консультант: **Шамолин Максим Владимирович**, член–корреспондент РАН, доктор физико–математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник лаборатории общей механики НИИ механики МГУ им. М. В. Ломоносова

Официальные оппоненты: **Вельмисов Петр Александрович** доктор физико–математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ульяновский государственный технический университет», профессор кафедры высшей математики, г. Ульяновск

Ерофеев Владимир Иванович доктор физико–математических наук, профессор, Институт проблем машиностроения РАН – филиал Федерального государственного бюджетного научного учреждения «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики им. А.В. Гапонова-Грехова Российской академии наук», директор Института проблем машиностроения РАН, г. Нижний Новгород

Куликов Анатолий Николаевич доктор физико–математических наук, доцент, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова», профессор кафедры дифференциальных уравнений, г. Ярославль

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Белгородский государственный национальный исследовательский университет», г. Белгород.

Защита состоится «19» марта 2026 года в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.332.02 при ФГАОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН» по адресу: 127055, г. Москва, Вадковский пер., д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», www.stankin.ru

Автореферат разослан «___» _____ 2025 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета 24.2.332.02,
к.т.н., доцент



Тюрбеева Татьяна Борисовна

Актуальность работы. Широкое распространение в технике объектов с движущимися границами обуславливает необходимость совершенствования методов их математического моделирования и создания соответствующего программного обеспечения для анализа их динамики. Диссертационная работа посвящена решению научной проблемы, имеющей важное хозяйственное значение для отрасли машиностроения в областях повышения надежности при проектировании широкого круга технических устройств, в которых присутствуют одномерные механические объекты с движущимися границами, обобщению и развитию фундаментальных приближенных, численно–аналитических и численных методов для решения задач рассматриваемого класса, разработке новых математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов переменной длины, и создании не имеющих аналогов алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами. Актуальность проблемы обусловлена возрастающими требованиями к надежности и более полному учету динамических эффектов при проектировании технических объектов.

Исследование колебательных процессов в системах с подвижными границами связано с получением решения систем дифференциальных уравнений в частных производных в переменных во времени областях, а также интегро–дифференциальных уравнений с переменными по времени пределами интегрирования и ядрами. Особую сложность представляет введение и обоснование понятий «собственных чисел» и «собственных функций» для объектов переменной длины, разработка общей схемы исследования краевых задач рассматриваемого класса, сочетающей методы теории интегральных уравнений и асимптотические методы, а также решение характерных модельных краевых задач динамики одномерных объектов переменной длины (подъемных канатов, балок, стержней и струн) с изучением их резонансных характеристик. Данные вопросы остаются недостаточно разработанными в современных научных публикациях.

Динамика систем с движущимися границами требует принципиально новых подходов, выходящих за рамки классических задач математической физики. В таких системах традиционные понятия «собственных чисел» и «собственных функций» теряют свой постоянный характер, так как с изменением геометрических параметров они становятся некоторыми функциями времени. Ключевое значение для практических приложений имеет тот факт, что в большинстве технических систем, связанных с колебаниями объектов переменной длины, отношение скорости изменения геометрических

параметров к скорости распространения упругой волны в них мало. Указанное обстоятельство дает основание использовать обобщения фундаментальных классических понятий «собственных чисел» и «собственных функций» и говорить о собственных частотах и формах колебаний объектов переменной длины как о реально существующих характеристиках движения, а также строить решения с использованием этих понятий. Вышеизложенное и определяет актуальность диссертационной работы.

Степень разработанности темы исследования. На сегодняшний день сохраняется нерешенная проблема комплексного подхода к моделированию колебательных процессов в одномерных механических системах с подвижными границами. Существующие методы анализа колебаний объектов с движущимися границами требуют развития, поскольку точные решения в основном ограничены волновым уравнением и граничными условиями первого рода. При постановке линейных задач, исключающих учет взаимодействия продольных и поперечных колебаний, а также геометрической нелинейности, возникают значительные погрешности в описании колебаний высокой интенсивности. Существующие методы не учитывают принципиально важные факторы, включая нелинейные деформационные эффекты, жесткостные характеристики, вязкоупругость, взаимосвязанные колебательные процессы, диссипативные явления и сложные энергетические взаимодействия между конструктивными элементами слева и справа от движущейся границы. При этом в научных публикациях отсутствуют строгие математические постановки соответствующих краевых задач. Особую важность в данном аспекте представляет исследование резонансных характеристик таких систем, поскольку возникновение резонансных явлений в технических системах с подвижными границами может представлять серьезную опасность и должно быть исключено в процессе эксплуатации.

Преодоление указанных научных проблем позволяет разработать обоснованные численно–аналитические и приближенные методы исследования и анализа резонансных явлений в колебательных системах с движущимися границами.

Научные результаты диссертации, включающие оригинальные методы постановки и решения задач рассматриваемого класса, а также методы исследования резонансных свойств позволяют решить проблемы, возникающие при анализе динамики объектов с движущимися границами.

Объектом исследования являются одномерные механические системы с движущимися границами.

Предметом исследования являются линейные и нелинейные

математические модели, описывающие в форме интегро–дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных колебания механических систем с движущимися границами, фундаментальные приближенные, численно–аналитические и численные методы решения модельных краевых задач.

Цель диссертационной работы состоит в обобщении и развитии фундаментальных приближенных, численно–аналитических и численных методов для решения краевых задач с движущимися границами, разработке линейных и нелинейных математических моделей одномерных объектов переменной длины, создании комплекса программ для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные **задачи**:

1) проведение комплексного аналитического обзора современных отечественных и зарубежных исследований в области динамики механических систем с подвижными границами с оценкой существующих математических моделей, методов решения краевых задач и анализа резонансных характеристик, а также выявлением нерешенных проблем и перспективных направлений исследований;

2) доказательство эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, а также близости решений интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины;

3) обобщение приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений на более широкий класс задач, позволяющего учитывать изгибную жёсткость объекта, сопротивление среды, жёсткость основания, а также слабую нестационарность граничных условий, с оценкой погрешности метода в зависимости от относительной скорости движения границ;

4) развитие асимптотических методов построения решений однородных интегро–дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами, позволяющих получить выражения для амплитуд и фаз колебаний, а также общее решение однородного интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в первом приближении;

5) обобщение приближенного метода Канторовича – Галеркина на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с

движущимися границами при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием;

б) разработка метода преобразования переменных для моделирования и нахождения собственных частот объекта в случае, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями;

7) разработка новых нелинейных математических моделей колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих взаимодействие продольных и поперечных колебаний, взаимодействие между сегментами объекта слева и справа от движущейся границы, геометрическую нелинейность, изгибную жесткость объекта, вязкоупругость и демпфирующие силы;

8) разработка численного метода решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами;

9) разработка программного обеспечения, предназначенного для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач, с оценкой погрешности вычислений;

10) математическое моделирование и численное исследование колебаний и резонансных характеристик объектов с подвижными границами, наиболее часто встречающихся в прикладных задачах.

Научная новизна выполненной работы заключается в следующем:

1. Впервые проведено обобщение и развитие фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов, распространяющее их действие на широкий спектр задач динамики систем с подвижными границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющих учитывать действие на механическую систему демпфирующих сил, жёсткость основания и жёсткость на изгиб, вязкоупругость объекта, а также слабую нестационарность граничных условий, отличных от условий первого рода. Выполнена оценка погрешности приближенных методов.

2. Для моделирования колебаний систем с подвижными границами построены решения однородных интегро–дифференциальных уравнений описывающих движение объектов переменной длины и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами при помощи асимптотических методов. Впервые получены выражения для амплитуд и фаз колебаний.

3. Произведена постановка новых нелинейных краевых задач о колебаниях

объектов с движущимися границами в виде математических моделей, позволяющих учитывать большее число факторов, влияющих на динамический процесс. Впервые проведено сравнительное исследование линейных и нелинейных модельных подходов к описанию колебательных процессов в системах с подвижными границами, выявившее принципиальные ограничения линейных моделей.

4. Разработан оригинальный численный метод для решения нелинейных задач, моделирующих продольно–поперечные колебания систем с изменяющимися во времени граничными условиями.

5. Для моделирования резонансных эффектов систем с демпфированием впервые получены результаты, позволяющие количественно оценить влияние демпфирующих сил и движения границ на амплитуду колебаний, возникающих при прохождении через резонанс.

6. Впервые подробно исследованы колебания и резонансные характеристики пятнадцати механических объектов с движущимися границами, широко распространённых в технике. Используя разработанный программный комплекс проведен анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, причём количественные характеристики представлены в виде графиков и таблиц.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в обобщении и развитии фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов решений краевых задач с движущимися границами, численных методов решения нелинейных задач при исследовании резонансных свойств объектов, разработке и исследовании новых линейных и нелинейных математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме интегро–дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, определении эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, оценке близости решений интегро–дифференциальных уравнений динамики объектов переменной длины к соответствующим интегро–дифференциальным уравнениям с фиксированными параметрами, определении понятия собственных функций и собственных чисел для краевых задач в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования.

Практическая значимость результатов работы заключается в возможности применения разработанных математических методов и моделей, реализованных в специализированном комплексе программ, в инженерных расчетах, позволяющих на стадии проектирования технических устройств

предотвратить условия возникновения резонансных явлений и колебаний большой интенсивности; создании условий для повышения надежности работы грузоподъемных установок, безопасности движения лифтов, подвесных канатных дорог, железнодорожной контактной сети, движения поездов; предотвращения высокоинтенсивных колебаний в лентопротяжных механизмах, звеньях передач с гибкой связью, ленточных пилах; безопасной работы деталей машин, турбин, генераторов, редукторов, бурильных колонн и т.д. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств и проблема увеличения интенсивности колебаний при уменьшении длины объекта. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ. Результаты диссертации использованы в учебных пособиях.

Методы исследования. Для решения сформулированных в диссертационной работе проблем и поставленных задач использовались методы математического моделирования, приближенные, численно–аналитические и численные методы решения модельных краевых задач, методы решения интегральных уравнений, методы решения гиперболических уравнений в частных производных, асимптотические методы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Приближенные и численно–аналитические методы решения задач о колебаниях систем с движущимися границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющие получить решения с учетом действия на систему сопротивления среды, вязкоупругости, изгибной жесткости и жесткости основания, при широком спектре граничных условий, отличных от условий первого рода.

2. Метод преобразования переменных для моделирования и нахождения собственных частот объекта в случае, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями.

3. Нелинейные математические модели колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие: взаимодействие продольных и поперечных колебаний, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, геометрическую нелинейность, изгибную жесткость объекта, вязкоупругость и демпфирующие силы. Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей.

4. Численный метод решения нелинейных задач, описывающих

продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами.

5. Результаты, позволяющие количественно оценить влияние демпфирующих сил и движения границ на амплитуду колебаний при моделировании резонансных эффектов систем с демпфированием.

6. Программный комплекс, предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач.

7. Математическое моделирование и исследование новых качественных и количественных резонансных свойств пятнадцати одномерных механических объектов с движущимися границами, широко распространённых в технике.

Соответствие специальности. Направление диссертационного исследования соответствует паспорту специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно, п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно–ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», п. 4 «Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели» и п. 5 «Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей».

Степень достоверности и обоснованность полученных результатов. Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов и исследований подтверждается: корректностью в использовании математического аппарата и применении апробированных программных средств; адекватностью модельных представлений реальному процессу колебаний одномерных механических систем с движущимися границами; преемственностью полученных новых качественных и количественных результатов, сравнением аналитических и приближенных решений в частных случаях.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Математическое моделирование физических, механических, технических и экономических систем и процессов»).

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

– в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» для подготовки магистрантов направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплинам «Уравнения математической физики», «Численные методы решения краевых задач», «Математическое моделирование и компьютерные технологии в науке», «Нелинейное моделирование материалов и механических систем» и аспирантов направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и выполнении выпускных квалификационных работ при подготовке диссертаций направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (имеется акт внедрения);

– в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное Конструкторско–Технологическое Бюро «Пластик» (г.Сызрань, Самарская область), АО «Тяжмаш» (г.Сызрань, Самарская область). Имеются акты внедрения.

Апробация работы.

Основные результаты диссертации представлены на 2–й, 3–й и 4–й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2005, 2006 и 2007 гг.), 1–й, 2–й, 3–й, 4–й, 5–й, 6–й, 7–й, 8–й, 9–й, 10–й и 11–й Всероссийской научно–технической конференции–семинаре «Научно–техническое творчество: проблемы и перспективы» (г.Самара, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 2015 и 2016 гг.), 5–й, 6–й, 7–й, 8–й, 9–й, 10–й, 11–й и 12–й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2016, 2019 и 2024 гг.), 3–й и 4–й Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г.Самара, 2012, 2014 гг.), 10–й Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (г. Нижний Новгород, 2016 г.), 47–й Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (г.Нижний Новгород, 2008 г.), 11–й Всероссийской научно–технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2008» (г.Пермь, 2008 г.), 20–й, 33–й, 34–й, 35–й, 36–й Весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (г.Воронеж, 2009, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 3–й Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (г.Воронеж, 2009 г.), 20–х, 24–х Петербургских чтениях по проблемам прочности (г. Санкт–Петербург, 2012 и

2024 г.), 4-ом Российско–Армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (г. Красноярск, 2012 г.), четвертой Международной конференции, посвящённой 90-летию со дня рождения члена–корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (г.Москва, 2013 г.), 17-й, 19-й и 22-й Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г.Саратов, 2014, 2018 и 2024 гг.), Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций» посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (г.Москва, 2015 г.); 22-й, 23-й, 24-й, 25-й, 26-й, 27-й, 28-й, 29-й, 30-й и 31-й Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г.Москва, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 13-й, 14-й, 15-й, 16-й и 17-й Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (г.Саранск, 2017, 2019, 2021, 2023 и 2025 гг.), 8-й, 9-й, 10-й и 11-й Международной научной школе–семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г.Саранск, 2018, 2020, 2022 и 2024 гг.), 4-й, 5-й и 6-й Международной конференции «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (г.Москва, 2019, 2022 и 2025 гг.), 6-й, 7-й, 8-й и 9-й Всероссийской конференции с международным участием «Технологии разработки и отладки сложных технических систем» (г.Москва, 2019, 2021, 2022 и 2023 гг.), 10-й Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г.Самара, 2017 г.), Международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80-летию академика В.А.Садовниченко (г.Москва, 2019 г.), 1-й, 2-й, 3-й, 4-й, 5-й и 6-й Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» (г. Махачкала, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской научно–технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики в современной науке: теория и практика актуальных исследований» (г. Махачкала, 2025 года), Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (г.Ижевск, 2020, 2022 и 2025 гг.), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г.Суздаль, 2020, 2022 и 2024 гг.), Международной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (г. Уфа, 2020, 2021, 2023 и 2024 гг.), Труды 63-й, 64-й, 65-й и

67-й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Москва, 2020, 2022, 2023 и 2025 гг.), Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г. Воронеж, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 22-й и 23-й Зимней школе по механике сплошных сред (г. Пермь, 2021 и 2023 гг.), International Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis (MPDSIDA)–2021” (г. Долгопрудный, 2021г.), International Conference “Days on Diffraction” (St. Petersburg, 2025), Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (г. Казань, 2021 г.), 14-й, 15-й и 1-й Международной научной конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (г. Махачкала, 2021, 2023 и 2025 гг.), Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (г. Владикавказ, 2019, 2021, 2023 и 2025 гг.), Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г. Уфа, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской научной конференции (с международным участием) «Математика и математическое моделирование» (Самара, 2021 и 2023 гг.), 6-й и 7-й Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (В&НАК) (Кабардино–Балкарская Республика, г. Нальчик, 2021 и 2023 гг.), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (г. Белгород, 2021 г.), International Scientific Conference Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА) (Rostov–on–Don, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025), 15th ISAAC Congress, International Society for Analysis, its Applications and Computation (Astana, Kazakhstan, 2025), Международной конференции «Информационные технологии и технические средства управления» (ICST–2023) (г. Астрахань, 2023г., г. Владикавказ, 2024 г.), International Conference Vavilov Memorial (2024, Saint Petersburg), Международной конференции «Однопараметрические полугруппы операторов» (OPSO) (г. Нижний Новгород, 2022, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление» посвященной 100-летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко (г. Москва, 2022 г.), Международной конференции «Теория оптимального управления и приложения» (ОСТА) (г. Екатеринбург, 2022 г.), 3-й, 4-й и 5-й Международной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (г. Рязань, 2021, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции «Математика искусственного интеллекта» (MathAI2025) (г. Сочи,

2025 г.), 9-й и 10-й Международной конференции по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям (г. Москва, 2022 и 2025 г.), 28-й, 29-й, 30-й и 31-й Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (12-й, 13-й, 14-й и 15-й Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения») (г. Ростов н/Д, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной конференции по геометрическому анализу, посвящённой памяти академика Ю. Г. Решетняка (г. Новосибирск, 2023 и 2024 гг.), XII и XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г.Уфа, 2019г., г. Санкт-Петербург, 2023 г.), 1-й, 2-й, 3-й, 4-й и 5-й конференции Математических центров России (г. Сочи, 2021г., г. Москва, 2022г., г. Майкоп, 2023г., г. Санкт-Петербург, 2024г. и г. Красноярск, 2025г.), Всероссийской научно-технической конференции по строительной механике корабля «БУБНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2022» (г. Санкт-Петербург, 2022 г.), 10-й Всероссийской конференции, посвященной 125-летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (г. Новосибирск, 2025 г.), 21-й, 22-й, 23-й и 24-й Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ) (г. Карши, Узбекистан, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной (53-й , 54-й, 55-й и 56-й Всероссийской) молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 2023, 2024 и 2025 гг.), 8-й, 9-й, 10-й и 11-й Международной конференции по стохастическим методам (ICSM) (г. Геленджик, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 3-й и 4-й Школе-семинаре «Механика, химия и новые материалы» (г.Санкт-Петербург, 2024 и 2025 гг.), Third International Conference “Mathematics in Armenia, Advances and Perspectives”, Dedicated to the 80th anniversary of foundation of Armenian National Academy of Sciences (Yerevan, Armenia, 2023), International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (ISND) (Yaroslavl, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025), 3-й Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ», посвященной 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова (г. Долгопрудный, 2023 г.), 10-й Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30-летию Академии наук республики Саха (Якутия) (г. Якутск, 2023 г.), Международной конференции по алгебре, алгебраической геометрии и теории чисел (г. Тула, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной Казанской школе-конференции «Теория функций, ее

приложения и смежные вопросы» (г. Казань, 2023 и 2025 гг.), Russian–Chinese Conference “Differential and Difference Equations” (Novosibirsk, 2023), Всероссийской научно–технической конференции по строительной механике корабля «Памяти академиков–кораблестроителей», посвященной 160–летию академика А.Н. Крылова и 140–летию академика Ю.А. Шиманского (г. Санкт–Петербург, 2023 г.), Математическом форуме: Итоги науки. Юг России (г. Ростов–на–Дону, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции по комплексному анализу и математической физике, посвященной 75–летию А. Г. Сергеева (г. Москва, 2024 г.), 8th International school–seminar “Nonlinear analysis and extremal problems” (NLA–2024) (Irkutsk, 2024), Всероссийской конференции «Современные проблемы физико–математических наук» (г. Орёл, 2023, 2024 гг.), 51 и 52 Школе–конференции «Актуальные проблемы механики» (г. Великий Новгород, 2024 г. и г. Санкт–Петербург, 2025 г.), XIX Владикавказской молодежной математической школе (ВММШ–2024) (г. Владикавказ, 2024г.), Международной научной конференции «Матричные методы и интегральные уравнения» (г.Сочи, 2024 и 2025 гг.), 33rd St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (г. Санкт–Петербург, 2024 г.), Всероссийской Школе–конференции «Неголономные дни в Переславле» (г.Переславль–Залесский, 2024г.), Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024), посвященной 100–летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (г. Екатеринбург, 2024 г.), Всероссийской конференции «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (DGСТО–2025), посвященной памяти профессора В.И. Ухоботова (г. Челябинск, 2025 г.), Всероссийской Школе–конференции «Математическая весна» (г. Нижний Новгород, 2024 и 2025 гг.), Международной конференции «Интегрируемые системы и квантовая теория» (г. Санкт–Петербург, 2024г.), Международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (г. Ташкент, Узбекистан, 2024 г.), Республиканской научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения», приуроченной к 80–летию академика Ш. А. Алимова (г. Ташкент, Узбекистан, 2025 г.), Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 2025 г.), Международной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» (г. Минск, Белоруссия, 2024г.), Всероссийской конференции, посвященной 105–летию со дня рождения академика РАН Л. В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (г. Новосибирск, 2024г.), Международной конференции «Математика в созвездии наук», к

юбилею ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовниченко (г. Москва, 2024г.), Международной конференции «Комплексный анализ и смежные проблемы» (г. Уфа, 2024 г.), Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50–летию ИВМ СО РАН (г. Красноярск, 2024 г.), Международной конференции, посвященной памяти академика А.В. Кряжмского «Системный анализ: моделирование и управление» (г. Москва, 2024 г.), XX Международной конференции по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям (DFDE-2025), посвященной памяти академика С.П. Новикова (г. Москва, 2025 г.), Международной конференции «Теория функций и ее приложения», посвященной 120–летию со дня рождения академика РАН Сергея Михайловича Никольского (г. Долгопрудный, 2025 г.), на научно–исследовательских семинарах «Актуальные проблемы геометрии и механики» Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН Д.В. Георгиевский, д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН М.В. Шамолин, 2018–2025 гг.), на научно–исследовательских семинарах кафедры Вычислительная механика Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. д.ф.–м.н., академик РАН В.А. Левин, 2017–2020 гг.), на научных семинарах «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.–м.н., профессор В.П. Радченко, 2014–2025 гг.) и др.

Имеются свидетельство о регистрации электронного ресурса № 19517 от 26.09.2013 г. и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025613649 опубл. 13.02.2025 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 102 работы, из них 3 монографии, 20 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, которые входят в утвержденный ВАК Минобрнауки России «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по специальности 1.2.2 (05.13.18) и приравненных к ним отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования (Scopus, Web of Science), 33 статьи – в сборниках трудов конференций и других журналах, 39 тезисов докладов, 5 учебных пособий, получено 2 свидетельства о регистрации электронного программного комплекса.

Личный вклад автора. Автором лично получены следующие наиболее существенные результаты:

–впервые выполнено обобщение и развитие фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов на более широкий класс задач о колебаниях систем с движущимися границами, позволяющих учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость основания, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах при широком спектре граничных условий, отличных от условий первого рода;

–разработаны новые нелинейные математические модели для моделирования и анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие: геометрическую нелинейность, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, изгибную жесткость, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы;

– разработан новый численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами;

– разработано не имеющее аналогов алгоритмическое и программное обеспечение, реализующее в среде MATLAB аналитические и приближенные методы для численного исследования колебаний и резонансных характеристик объектов, встречающихся в прикладных задачах;

–предложены и численно исследованы новые линейные математические модели описания колебательных процессов в системах с движущимися границами, широко распространённых в технике.

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Работы [8–10, 16, 22, 28, 32–34] выполнены самостоятельно, в работах [1–7, 11–15, 17–21] диссертанту принадлежит совместная постановка задач и разработка методов решений, ему лично принадлежит алгоритмизация методов в виде программного комплекса, анализ результатов. В остальных работах [23–27, 29–31, 35], опубликованных в соавторстве, автору диссертации в равной мере принадлежат как постановка задачи, так и результаты выполненных исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, библиографии и четырех приложений. Общий объем диссертации составляет 310 страниц, включая 38 рисунков, 24 таблицы и 4 приложения. Библиография включает 280 наименований на 36 страницах.

Содержание работы.

Во введении обоснована актуальность и научная новизна диссертационной работы, аргументировано сформулированы цель и задачи исследования, показаны степень разработанности темы, теоретическая и практическая значимость, а также степень достоверности полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения и методы исследования, приведена структура диссертационной работы, а также сведения об апробации работы и публикациях.

В первой главе проводится аналитический обзор по теме диссертации. Изложено современное состояние проблемы математического моделирования задач о колебаниях систем с движущимися границами, основы которого заложены в работах Асланова С.К., Боголюбова Н.Н., Весницкого А.И., Владимирова С.А., Горбаня В.А., Горелика Г.О., Горошко О.А., Григоряна Г.А., Гринберга Г.А., Динника А.Н., Икрамова М.В., Ильина Р.Ф., Качурина В.К., Колосова Л.В., Коровина В.Г., Корчинского В.М., Крылова Н.М., Курильской Н.Ф., Лежнёвой А.А., Манговой В.Н., Махмудова А.К., Минакова А.П., Митропольского Ю.А., Мовсисяна Л.А., Моут С., Мулухова К.К., Неронова Н.П., Николаи Е.Л., Новикова В.Д., Потапова А.И., Пенькова А.М., Рагульского К.И., Рахматулина Х.А., Савина Г.Н., Самарина Ю.П., Светлицкого Ю.В., Сергеева А.Д., Столяра А.М., Тарасова В.К., Фещенко С.Ф., Хосаева Х.С., Шевело В.Н., Якубовского Ю.В., Ястребова В.П., Aboshi Mitsuo, Cho Yong Hyeon, Dan Stancioiu, Kotera Tadashi, Lu Sun и многих других авторов.

Проведенный анализ существующих исследований свидетельствует о недостаточной изученности проблемы колебательных и резонансных явлений в системах с подвижными границами. В современных научных публикациях отсутствует универсальный методологический подход к анализу таких ключевых явлений как прохождение через резонанс и установившийся резонанс, особенно при учете демпфирующих свойств системы.

Большинство опубликованных работ ограничивается качественным описанием возможности возникновения резонансных явлений, не предлагая количественных методов оценки их параметров. Существующие аналитические подходы обладают существенными ограничениями, поскольку разработаны преимущественно для волнового уравнения с граничными условиями первого рода и не учитывают комплексное взаимодействие различных факторов. Особую актуальность приобретает разработка новых математических методов, способных преодолеть указанные ограничения и обеспечить всесторонний анализ динамического поведения механических систем с движущимися границами. Необходимость таких исследований обусловлена как

фундаментальной значимостью проблемы, так и ее практической важностью для решения прикладных инженерных задач.

Во второй главе изложены разработанные методы анализа динамики объектов с движущимися границами, включающие переход между дифференциальной и интегро–дифференциальной формами, аппарат собственных функций для нестационарных областей, оценку скорости изменения длины объектов.

В диссертации установлена эквивалентность постановок задач динамики объектов переменной длины в форме дифференциальных уравнений и интегро–дифференциальных уравнений, произведена оценка близости интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины. Установлено, что в интервале времени, соизмеримом с единицей, уравнение колебаний объекта с фиксированными границами отличается от соответствующего уравнения с переменными границами, членами, пропорциональными малому параметру ε .

Произведена оценка скорости изменения длины объектов с движущимися границами. Функция $l(t)$ является функцией медленного времени $\tau_1 = \varepsilon t$, $l = l(\tau_1)$, т.е. является функцией, производная которой по времени пропорциональна некоторому малому параметру ε . Для определения значения параметра ε осуществляется переход к безразмерным переменным в виде

$$\xi = \frac{x}{L_0}; \tau = \omega_0 t \quad (1)$$

где L_0 – максимальная длина объекта; ω_0 – частота колебаний на основной динамической моде.

На участке равномерного подъема $l(t) = L_0 - v_0 t$ величина $l(t)$ будет соответствовать $l(\tau) = 1 - \varepsilon \tau$, где $\varepsilon = \frac{v_0}{\omega_0 L_0}$.

Параметр ε определяется из физических условий задачи в каждом конкретном случае. Выбранный таким образом малый параметр является отношением скорости изменения длины объекта к скорости распространения упругой волны в этом объекте $\varepsilon = \frac{v_0}{c}$. При постоянной скорости изменения длины объекта $v_0 = const$, величина параметра ε определяет медленность изменения длины.

Для многих технических устройств, использующих элементы переменной длины, условие медленности изменения длины выполняется при нормальных режимах их работы.

Во второй главе также определены понятия «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования.

При нахождении «собственных функций» в задачах динамики объектов переменной длины в однородном интегро–дифференциальном уравнении

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\zeta) \frac{\partial^2 V(\zeta, \tau)}{\partial \tau^2} d\zeta, \quad (2)$$

$l(\varepsilon\tau)$ рассматривается как параметр. После формального разделения переменных в уравнении (2) в виде

$$V(\xi, \tau) = X(\xi, l(\varepsilon\tau)) \cos \int_0^\tau \omega_0(l) d\tau$$

получено однородное интегральное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром

$$X(\xi, l(\varepsilon\tau)) = \omega_0^2(l(\varepsilon\tau)) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\zeta) X(\zeta, l(\varepsilon\tau)) d\zeta, \quad (3)$$

содержащее $l(\varepsilon\tau)$ как параметр.

Собственные функции, найденные формально из интегрального уравнения (3), образуют систему «собственных функций» для интегро–дифференциального уравнения (2).

Так же построены интегро–дифференциальные уравнения для задач с интегрируемыми граничными условиями, в частности для поперечных колебаний струны переменной длины и колебаний консольной балки с изменяющейся границей. Приведено разложение интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

В третьей главе изложен разработанный приближенный метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений, обобщенный на более широкий класс модельных краевых задач с условиями, заданными на подвижных границах.

В основу метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений положено непосредственное интегрирование дифференциальных уравнений в сочетании со стандартной заменой искомой функции новой

переменной. Интегральная форма записи уравнений движения объектов переменной длины позволяет установить форму их решений и разработать общие методы их построения.

Данный метод позволяет учитывать комплексное воздействие внешних факторов, включая действие на систему сил сопротивления среды, изгибную жесткость объекта и жесткость подложки. Особое внимание уделено рассмотрению наиболее распространенного на практике случая, когда внешние возмущения действуют на границах.

При фиксированной длине объекта построенные интегро–дифференциальные уравнения переходят в классические уравнения Фредгольма II рода.

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau). \quad (4)$$

Граничные условия:

$$Y_{ji} \left[U \left(1_j(\varepsilon\tau), \tau \right) \right] = F_{ji}(\tau); \quad (5)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2}; m \leq 2.$$

Здесь $U(\xi, \tau)$ – функция смещения; L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$ ($m \leq 2$ – целое положительное число); Y_{ji} – линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ; $\varphi(\xi, \tau), F_{ji}(\tau)$ – заданные функции класса C и C^2 соответственно; $1_j(\varepsilon\tau)$ – закон движения границ; ε – малый параметр, характеризующий медленность движения границ.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях, в уравнение (4) вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau),$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \quad (6)$$

при этом функция $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0$$

и условиям

$$Y_{ji} \left[D_{kr} \left(1_j(\varepsilon\tau), \tau \right) \right] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i; \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases}$$

В результате функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau); \quad (7)$$

$$Y_{ji}[V(1_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (8)$$

Интегро–дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (7), (8), имеет вид

$$V(\xi, \tau) = - \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta, \quad (9)$$

где $K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau)$ – симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Решение задачи (9), (8) ищется в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (10)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения (9)

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta.$$

Собственные функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Получены разложения симметричного по ξ и ζ ядра в ряд по собственным функциям $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ в виде

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \quad (11)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи, определяемые по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)} = \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\xi d\zeta.$$

После подстановки рядов (10) и (11) в уравнение (9) с учетом ортогональности функций $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[1_1(\varepsilon\tau); 1_2(\varepsilon\tau)]$ и замены

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau),$$

где

$$Q_{nkr}(\varepsilon\tau) = - \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi,$$

функция $\mu_n(\tau)$ с точностью до величин порядка малости ε^2 определяется из уравнения

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau).$$

Здесь

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau)g(\xi)d\xi; \quad \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_r}(\xi, \varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)g(\xi)d\xi;$$

$$\theta_n(\tau) = \int_{1_1(\varepsilon\tau)}^{1_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau)g(\xi)d\xi - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\tau).$$

С учетом (6), (10) решение задачи (4) – (5) находится в виде

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

В случае, если внешние возмущения имеют вид

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \quad F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m},$$

где B_{ji} – постоянные величины; $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ – монотонно возрастающие функции; $B_0(\xi)$ – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки, то амплитуда колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, может быть представлена в виде

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (12)$$

где

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta)w_n'(\zeta)}; \quad M_n(\varepsilon\zeta) = \frac{-B_{ji}\omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta)Q_{nji}(\varepsilon\zeta)}{A_{0n}(\varepsilon\zeta)}; \quad a_n(\varepsilon\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}};$$

$$A_{0n}(\varepsilon\zeta) = \exp \left[- \int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)} d\zeta \right]; \quad w_n(\zeta) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta).$$

Разработанный метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений апробирован на примере тестовой задачи. Произведена оценка погрешности метода в зависимости от относительной скорости движения границ. Расчётные данные показывают, что при выполнении условия $\varepsilon < 0,37$ погрешность метода не превышает 5%. Это свидетельствует о его применимости для анализа задач, связанных с колебаниями объектов с движущимися границами, в достаточно широких диапазонах скоростей движения границ.

В главе 3 также изложены разработанные асимптотические методы построения решений однородных интегро–дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами, при помощи которых получены выражения для амплитуд и фаз колебаний

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{C_{n0}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}} \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau\right]; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau + D_{n0}, \quad (13)$$

а также общее решение однородного интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в первом приближении

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau). \quad (14)$$

Установлена эквивалентность данных методов применительно к исследованию задач динамики объектов переменной длины. В качестве примера рассмотрена математическая модель свободных поперечных колебаний балки переменной длины, концы которой закреплены.

В третьей главе развит численно–аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах. Получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде в случае новых граничных условий, отличных от условий первого рода

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (15)$$

Так же в главе 3 метод Канторовича – Галеркина развивается применительно к решению задач, описываемых уравнениями гиперболического типа, при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием. Математическая постановка задачи включает неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных относительно искомой функции смещения, неоднородные граничные условия:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 L_1[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau); \quad (16)$$

$$Y_{ji}[U(1_j(\varepsilon\tau), \tau)] = e^{-\alpha(\varepsilon_1\tau)\tau} F_{ji}(\tau); \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, 2}. \quad (17)$$

При помощи введения в задачу новой функции граничные условия приводятся к однородным. Решение производится в безразмерных переменных с точностью до величин второго порядка малости относительно малых параметров, характеризующих скорость движения границы. При гармоническом внешнем воздействии на систему, получено выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (18)$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\alpha(\varepsilon_1\tau)\tau} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau); \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta).$$

В четвертой главе рассмотрены системы, границы которых движутся равномерно с одинаковыми скоростями. К таким объектам относятся, например, гибкие звенья передач, нити в перемоточных механизмах и т.д. Для них характерно равномерное продольное движение колеблющегося звена относительно неподвижных опор. Резонансные свойства этих систем характеризуются набором постоянных собственных частот.

Разработанный в общем виде метод преобразования переменных для систем с равномерно движущимися границами и равными скоростями, позволяет свести задачу для дифференциального уравнения в частных производных к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и находить собственные частоты объекта, что существенно расширяет аналитические возможности исследования.

Пусть требуется определить собственные частоты объекта, описываемого уравнением:

$$L[U(\xi, \tau)] = 0 \quad (19)$$

при граничных условиях

$$Y_{jk}[U(l_j(\tau), \tau)] = 0, \quad (20)$$

где

$$j = \overline{1, 2}; \quad k = \overline{1, m}; \quad l_1(\tau) = v\tau; \quad l_2(\tau) = 1 + v\tau;$$

L – линейный однородный дифференциальный оператор, коэффициенты которого являются функциями переменной $\zeta = \xi - v\tau$, а максимальный порядок производных по ξ равен $2m$, по τ равен 2; Y_{jk} – линейные однородные дифференциальные операторы, не содержащие коэффициентов, зависящих от τ ; v – безразмерная скорость движения границ; $U(\xi, \tau)$ – функция, описывающая перемещения при колебаниях; ξ – безразмерная геометрическая переменная; τ – безразмерное время.

Для решения задачи вводится замена переменных

$$\zeta = \xi - v\tau; \quad \tau = \tau; \quad V(\zeta, \tau) = U(\xi, \tau).$$

В результате такой замены для преобразованного уравнения

$$L^*[V(\zeta, \tau)] = 0, \quad (21)$$

граничные условия

$$Y_{jk}[V(\zeta_j, \tau)] = 0 \quad (22)$$

будут заданы в неподвижных точках $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 1$.

Операторы L и Y_{jk} выбраны таким образом, что решение задачи (21), (22) ищется в виде

$$V(\zeta, \tau) = \mu(\zeta)e^{W\tau},$$

где $W = r + \omega i$ (r характеризует затухание колебаний, ω – собственная частота колебаний, i – мнимая единица).

В диссертации такие задачи сводятся к двухточечной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z[\mu(\zeta)] = 0; \quad (23)$$

$$Z_{jk}[\mu(\zeta_j)] = 0, \quad (24)$$

где $j = \overline{1, 2}$; $k = \overline{1, m}$; $\zeta_1 = 0$; $\zeta_2 = 1$; Z, Z_{jk} – линейные дифференциальные операторы.

Методы решения задачи (23), (24) по определению собственных частот колебаний рассмотрены в седьмой главе применительно к конкретным динамическим системам.

Во многих практических задачах гибкое звено, обладающее изгибной жесткостью и совершающее поперечные колебания, взаимодействует на границах с опорами типа роликов или шкивов. При этом точка контакта звена с опорой также участвует в колебательном процессе, а её смещение оказывается связанным с динамикой системы. Это приводит к нелинейности граничных условий. Однако, как показано в диссертации, при малых амплитудах колебаний данные нелинейные условия могут быть аппроксимированы линейными соотношениями вида

$$\mu(l_0 + x_0) = f(x_0); \quad \mu'(l_0 + x_0) = f'(x_0); \quad \mu''(l_0 + x_0) = f''(x_0), \quad (25)$$

где $l_0 + x_0$ – координата точки касания звена с опорой в статическом состоянии.

В главе 4 так же исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением. Ставится задача о нахождении изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении

границы.

Пусть на движущуюся границу падает синусоидальная волна $g(x + at)$, где $g(z) = A \sin(\omega z + \gamma)$, а от границ отражается волна $q(x - at)$.

Для отраженной волны получено выражение:

$$Q(P) = -\sin\left(-\frac{1+\alpha}{1-\alpha}P + \gamma\right), \quad (26)$$

где $P = (L(\tau) - \tau)$; $\alpha = V / a$ ($\alpha < 1$).

Анализ решения (26) показывает, что амплитуда при отражении от движущейся границы не изменяется, а частота изменяется согласно эффекту Доплера в $\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$ раз.

В работе получено выражение для энергии отраженной волны:

$$W_{\text{отр.}} = C \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta n \cos \varphi + 1}{\beta n \cos \varphi - 1} \cos(P + 2\varphi(P) + \gamma) \right)^2 dP. \quad (27)$$

Выражение (27) проанализировано на максимум в зависимости от β и γ при различных значениях n . В результате численного решения установлено, что при любых значениях β максимум энергии отраженной волны достигается при $n=2$ и при $\gamma = \pi / 2$. При других значениях n максимум достигается при $\gamma = 0$. В диссертационной работе установлено, что энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при со направленном движении.

В пятой главе разработаны нелинейные математические модели продольно–поперечных колебаний механических объектов с движущимися границами.

В настоящее время для расчета колебаний одномерных объектов с движущимися границами в основном используются линейные постановки задач. В случае больших деформаций линеаризация может привести к большим погрешностям. В диссертационной работе с помощью вариационного принципа Гамильтона учтена геометрическая нелинейность в задаче о поперечных колебаниях балки с движущейся границей, один конец которой жестко закреплен, а другой свободен. Получено нелинейное дифференциальное уравнение колебаний балки

$$\rho u_{tt} + EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) + 3EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \right) - q(x, t) = 0,$$

нелинейные граничные условия на движущейся границе

$$\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \Big|_{x=l(t)} = 0; \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) \Big|_{x=l(t)} + 3 \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \Big|_{x=l(t)} = 0,$$

нелинейные граничные условия на свободном конце

$$EI \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \Big|_{x=l_0} + M(t) = 0; \quad EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) \Big|_{x=l_0} + 3EI \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \Big|_{x=l_0} + F(t) = 0$$

и начальные условия

$$u(l(t_0), t_0) = \varphi_1(x); \quad u_t(l(t_0), t_0) = \varphi_2(x).$$

Так же с помощью вариационного принципа Гамильтона получена нелинейная постановка задачи о колебаниях вязкоупругой балки с движущейся подпружиненной опорой, несущей присоединенную массу (рисунок 1).

При не абсолютно жестком закреплении опоры через движущуюся границу происходит энергетический обмен. В связи с этим возникает сложность в записи граничных условий.

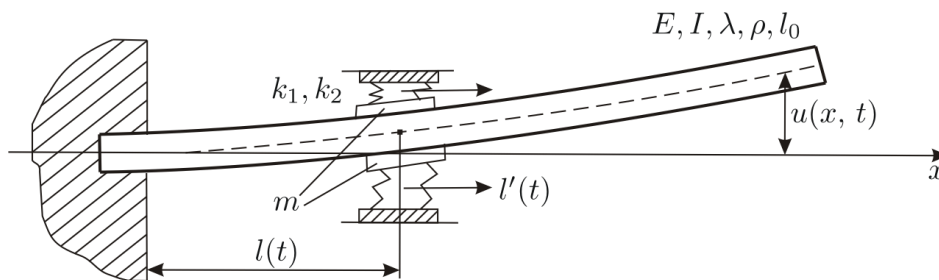


Рис.1. Кинематическая схема балки

Поставленная задача включает в себя дифференциальное уравнение колебаний, начальные условия для изогнутой оси балки и для присоединенной массы:

$$\begin{aligned} \rho u_{tt} + EI u_{xxxx} + \lambda I u_{xxxxt} &= 0; \\ u(x, 0) = \varphi_1(x); \quad u_t(x, 0) &= \varphi_2(x); \\ u(l(0), 0) = a_1; \quad u_t(l(0), 0) &= a_2, \end{aligned}$$

граничные условия:

$$\begin{cases} u(l_0, t) = \varphi_3(t), \\ u_x(l_0, t) = \varphi_4(t); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(l_0, t) = \varphi_3(t), \\ EIu_{xx}(l_0, t) + \lambda Iu_{xxl}(l_0, t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x(l_0, t) = \varphi_4(t), \\ EIu_{xxx}(l_0, t) + \lambda Iu_{xxxl}(l_0, t) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} EIu_{xx}(l_0, t) + \lambda Iu_{xxl}(l_0, t) = 0, \\ EIu_{xxx}(l_0, t) + \lambda Iu_{xxxl}(l_0, t) = 0. \end{cases}$$

Условия на движущейся границе записаны в виде соотношений между значениями функции и ее производных слева и справа от границы:

$$\begin{aligned} & EI(u_{xx}(l(t)+0, t) - u_{xx}(l(t)-0, t)) + \\ & + \lambda I(u_{xxl}(l(t)+0, t) - u_{xxl}(l(t)-0, t)) - k_2 u_x(l(t), t) = 0; \\ & EI(u_{xxx}(l(t)+0, t) - u_{xxx}(l(t)-0, t)) - m(u_{xl}(l(t), t)l'(t) + u_u(l(t), t)) + \\ & + \lambda I(u_{xxxl}(l(t)+0, t) - u_{xxxl}(l(t)-0, t)) - k_1 u(l(t), t) = 0. \end{aligned}$$

Проведена линеаризация разработанных моделей. При этом был соблюден принцип однородности: в случае малых колебаний полученные уравнения совпали с классическими моделями, что подтверждает корректность результатов.

В пятой главе так же сделан подробный анализ известного точного решения задачи о колебаниях струны с равномерно движущейся границей, описываемых волновым уравнением (рисунок 2).

Энергетический анализ точного решения показал, что при движении границы со скоростью близкой к скорости распространения колебаний и при стремлении длины струны к нулю энергия стремится к бесконечности. К бесконечности также стремится частная производная по пространственной переменной, что делает описание колебаний волновым уравнением некорректным.

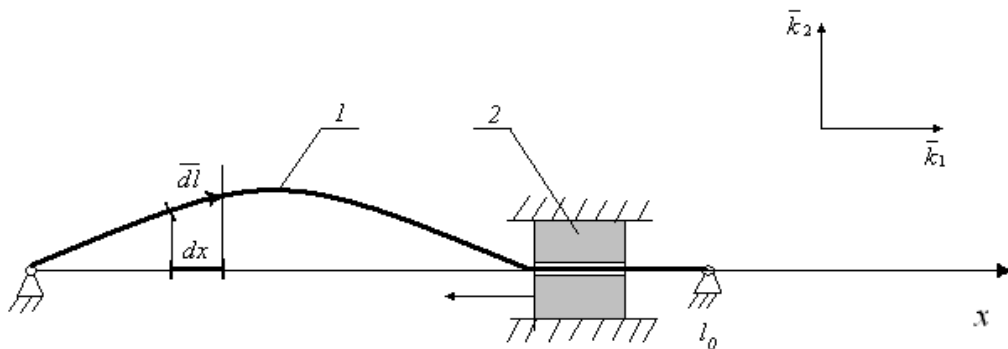


Рис.2 Модель для описания продольно-поперечных колебаний струны

С помощью вариационного принципа Гамильтона сделана постановка задачи о продольно–поперечных колебаниях струны с учётом геометрической нелинейности:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) (1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi}) \right) = 0; \\ U_{2,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) U_{2,\xi} \right) = 0; \\ U_2 = 0, \text{ если } \xi > L(\tau). \end{array} \right.$$

$$U_1(0, \tau) = 0; U_{1,\xi}(L_0, \tau) + KU_1(L_0, \tau) = 0; U_2(0, \tau) = 0; U_2(L(\tau), \tau) = 0;$$

$$U_1(\xi, 0) = 0; U_{1,\tau}(\xi, 0) = 0; U_2(\xi, 0) = \psi(\xi); U_{2,\tau}(\xi, 0) = 0.$$

Полученная математическая модель позволяет описывать колебания большой интенсивности. Поставленная задача решалась численно. Анализ численного решения показал, при уменьшении длины струны размах продольных колебаний увеличивается. В какой–то момент времени появляются сжимающие напряжения, и устойчивость колебаний нарушается. Потеря устойчивости приводит к резкому увеличению продольных деформаций и разрыву струны. В работе построены зоны устойчивых колебаний. Устойчивость уменьшается при увеличении амплитуды и уменьшении первоначальной продольной деформации.

Произведен сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей колебаний струны, который показал, что некорректности линейной модели связаны с увеличением натяжения струны при увеличении интенсивности колебаний, которое линейной моделью не учитывается. Корректность нелинейной модели нарушается при появлении отрицательных продольных деформаций, при этом появляется неустойчивость, и колебания становятся хаотичными. Точность численного решения подтверждается совпадением решений линейной и нелинейной моделей при малых амплитудах колебаний.

В главе 5 так же рассмотрен численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами. Разработанный метод позволяет решать задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейными граничными условиями, а также учитывать энергетический

обмен между частями колеблющегося объекта слева и справа от движущейся границы.

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных задана в обобщённом виде:

$$\begin{cases} u_{1,tt} = F_2(x, t, u_k, u_{k,x}, u_{k,xx}, u_{k,t}, u_{k,xt}, u_{k,xtt}); \\ u_{2,tt} = F_2(x, t, u_k, u_{k,x}, u_{k,xx}, u_{k,xxx}, u_{k,t}, u_{k,xt}, u_{k,xtt}, u_{k,xttt}). \end{cases}$$

Здесь и далее $k = \overline{1, 2}$.

Граничные условия на неподвижных концах ($x = 0, x = L_0$):

$$u_1(0, t) = 0; u_1(L_0, t) = 0; u_2(0, t) = 0; u_{2,xx}(0, t) = 0; u_2(L_0, t) = 0; u_{2,x}(L_0, t) = 0.$$

Условия на движущейся границе:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1(L(t), t)}{dt^2} &= \\ &= f_1(x, t, u_k(L(t), t), u_{k,x}(L(t) \text{ m } 0, t), u_{k,t}(L(t), t), u_{k,xt}(L(t) \text{ m } 0, t)); \\ \frac{d^2 u_2(L(t), t)}{dt^2} &= f_2(x, t, u_2(L(t), t), u_{2,xxx}(L(t) \text{ m } 0, t), u_{2,xtt}(L(t) \text{ m } 0, t)); \\ \frac{d^2 u_{2,x}(L(t), t)}{dt^2} &= f_3(x, t, u_{2,x}(L(t), t), u_{2,xx}(L(t) \text{ m } 0, t), u_{2,xt}(L(t) \text{ m } 0, t)). \end{aligned}$$

Соотношения на движущейся границе:

$$u_k(L(t) - 0, t) = u_k(L(t) + 0, t); u_{2,x}(L(t) - 0, t) = u_{2,x}(L(t) + 0, t).$$

Начальные условия:

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x); u_2(x, 0) = \varphi_2(x); u_{1,t}(x, 0) = \varphi_3(x); u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x).$$

В поставленной задаче использованы следующие обозначения: $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – продольное и поперечное смещения точки объекта с координатой x в момент времени t ; $u_k(L(t) - 0, t)$, $u_k(L(t) + 0, t)$ – значения функций слева и справа от движущейся границы; F_1, F_2, f_m ($m = \overline{1, 3}$), $\varphi_n(x)$ ($n = \overline{1, 4}$) – заданные функции.

По временной переменной сетка разбивается на равноотстоящие временные слои. По пространственной переменной в каждом временном слое слева и справа от движущейся границы сетка разбивается на постоянное число частей равноотстоящими узлами. В связи с движением границы шаг разбиения во временных слоях различен. Такое разбиение позволяет избежать перехода движущейся границы через узлы сетки. Для нахождения функций и их производных используются разностные аппроксимации. Погрешность

аппроксимаций имеет второй порядок малости относительно шагов сетки по пространственной и временной переменным. Решение осуществляется последовательным переходом от одного временного слоя к другому. Численное решение производилось в разработанном в среде MATLAB программном комплексе TB-ANALYSIS-7.

В шестой главе разработан численный метод и алгоритмическое обеспечение для исследования резонансных процессов, характерных для объектов с движущимися границами.

Если в выражении (12) $\Phi'_n(\zeta) = 0$, то в системе возникает явление установившегося резонанса. В этом случае выражение для максимальной амплитуды имеет вид:

$$A_n(\tau) = E_n(\tau) \int_0^{\tau} F_n(\zeta) d\zeta. \quad (28)$$

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0 , где скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равно нулю, т.е.

$$\Phi'_n(\tau_0) = 0. \quad (29)$$

В указанной точке мгновенная частота n -ного собственного колебания проходит через значение частоты внешнего возмущения. Процесс прохождения через резонанс охватывает временной промежуток, содержащий точку τ_0 , причем начало резонансного явления наблюдается до достижения τ_0 , а завершение – после ее прохождения.

При равенстве амплитуды колебаний в начале резонансной области (точка τ_1) амплитуде внешнего воздействия, амплитудная характеристика системы в конце резонансной области (точка τ_2) определяется следующим аналитическим выражением:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (30)$$

Анализ процесса прохождения через резонанс сводится к определению граничных значений τ_1 и τ_2 ($\tau_1 < \tau_0 < \tau_2$) резонансной области, при которых выражение (30) достигает максимума.

Если на колебательную систему не действуют демпфирующие силы и границы движутся в медленном режиме, то в выражении для амплитуды (30) функции E_n и F_n являются функциями так называемого медленного времени. Эти функции за период прохождения через резонанс изменяются

незначительно, и их можно считать постоянными величинами. В этом случае равенство (30) примет приближенный вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) \approx d_n^2 \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (31)$$

Постоянную d_n можно вычислить по формуле $d_n = E_n(\tau_2)F_n(\tau_0)$, где τ_2 – граница резонансной области.

В главе 6 так же произведён анализ влияния демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих в системах с движущимися границами при прохождении через резонанс. Получены неравенства, определяющие области, где необходимо учитывать движение границ и действие демпфирующих сил.

В случае, когда действуют демпфирующие силы, и границы движутся в медленном режиме, выражение для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на n –ой динамической моде, имеет вид

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) e^{-2\alpha_0(\varepsilon_1\tau)\tau} \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (32)$$

где $\alpha_0(\varepsilon_1\tau)$ – некоторая функция медленного времени, ε_1 – малый параметр, характеризующий действие демпфирующих сил.

Заменяя функции медленного времени постоянными величинами и аппроксимируя функцию $\Phi_n(\zeta)$ квадратичной параболой, вместо (32) получим следующее приближённое выражение для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, систем с демпфированием:

$$A_{0n}^2(\tau_1, \tau_2) \approx A^2 e^{-2\alpha_0\tau_2} [I_{os}^2(\tau_1, \tau_2) + I_{oc}^2(\tau_1, \tau_2)], \quad (33)$$

где

$$I_{os}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta; \quad I_{oc}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta;$$

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{1}{2\nu} (\nu\zeta + \omega_0)^2;$$

α_0 – коэффициент, характеризующий затухание в системе (его можно принять равным декременту затухания свободных колебаний); A – постоянная величина.

Практическая реализация алгоритма определения границ резонансной области и исследования выражений (30), (31) и (33) на максимум осуществлена

в специализированном программном комплексе «TB–ANALYSIS–7», разработанном в рамках настоящего исследования.

В седьмой главе описывается программный комплекс «TB–ANALYSIS–7», разработанный на основе результатов диссертационного исследования. Комплекс программ реализует численно–аналитические, приближенные и численные методы для анализа колебательных и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами. Разработанный в среде MATLAB в виде автономного прикладного программного обеспечения, комплекс программ предназначен для решения некоторого класса одномерных краевых задач с подвижными границами и исследования резонансных свойств описываемых этими задачами систем. Программный комплекс зарегистрирован в качестве электронного ресурса [22] и предоставляет следующие возможности:

1. Получение и анализ численных решений модельных уравнений для заданных параметров системы и внешних воздействий.

2. Исследование резонансных свойств моделей в зависимости от различных факторов, таких как тип объекта, скорость движения границ, мода колебаний, сила сопротивления среды, вязкоупругие свойства, изгибная жёсткость объекта и жёсткость основания.

3. Подбор параметров модели для исключения возникновения резонансных эффектов.

4. Решение нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами, с использованием разработанного численного метода.

Структурная блок–схема «TB–ANALYSIS–7» приведена на рисунке 3 и описывает алгоритмы и процессы, выполняемые с помощью комплекса программ, а также порядок взаимодействия отдельных модулей комплекса.

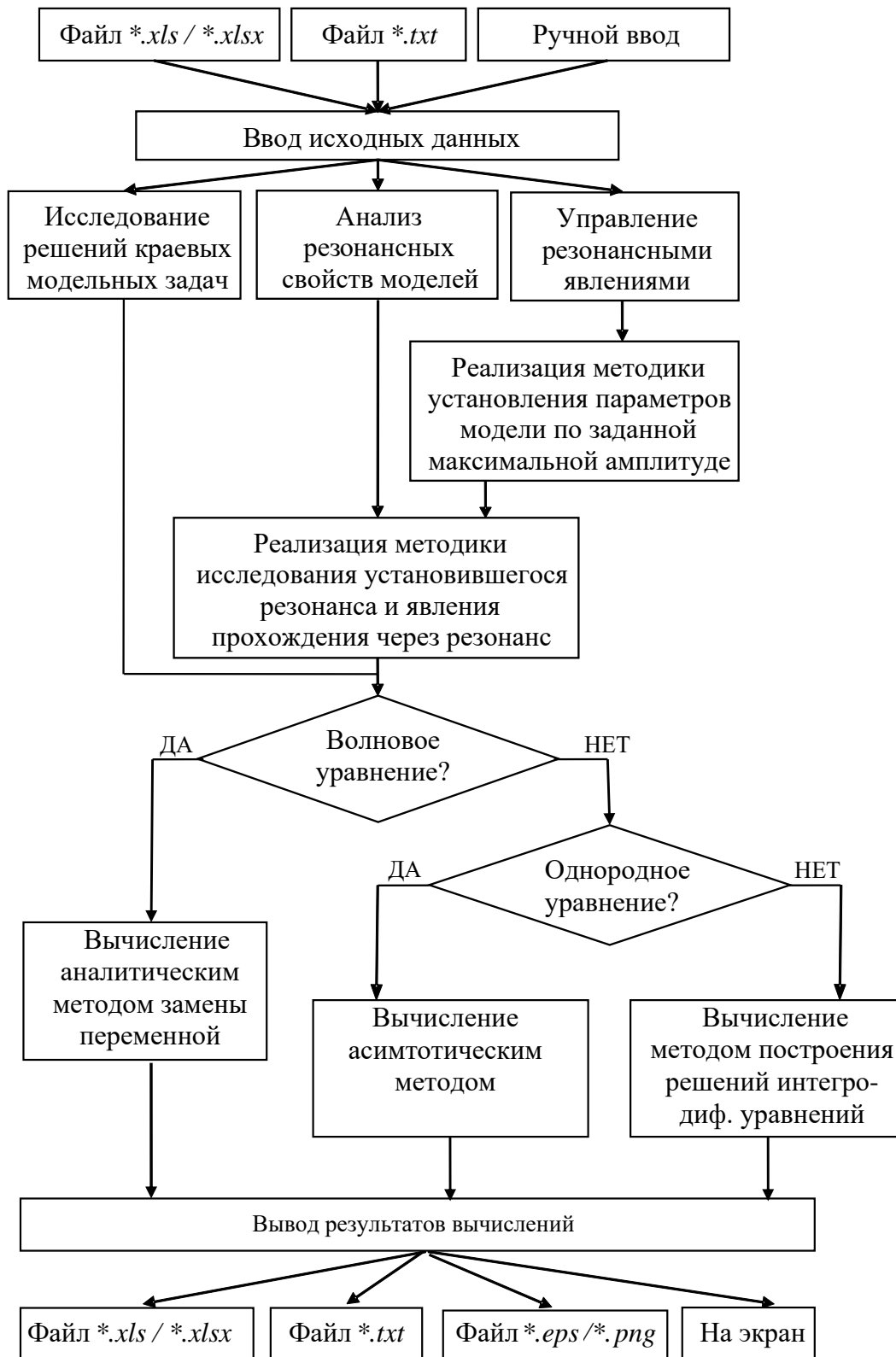


Рис. 3. Блок-схема комплекса программ «TB-ANALYSIS-7»

Интерфейс программного комплекса «TB-ANALYSIS-7» включает четыре окна, одно из которых является главным (рисунок 4). Это окно открывается при запуске программы, а остальные окна активируются через главное. Также они могут быть вызваны друг из друга с помощью меню программы.

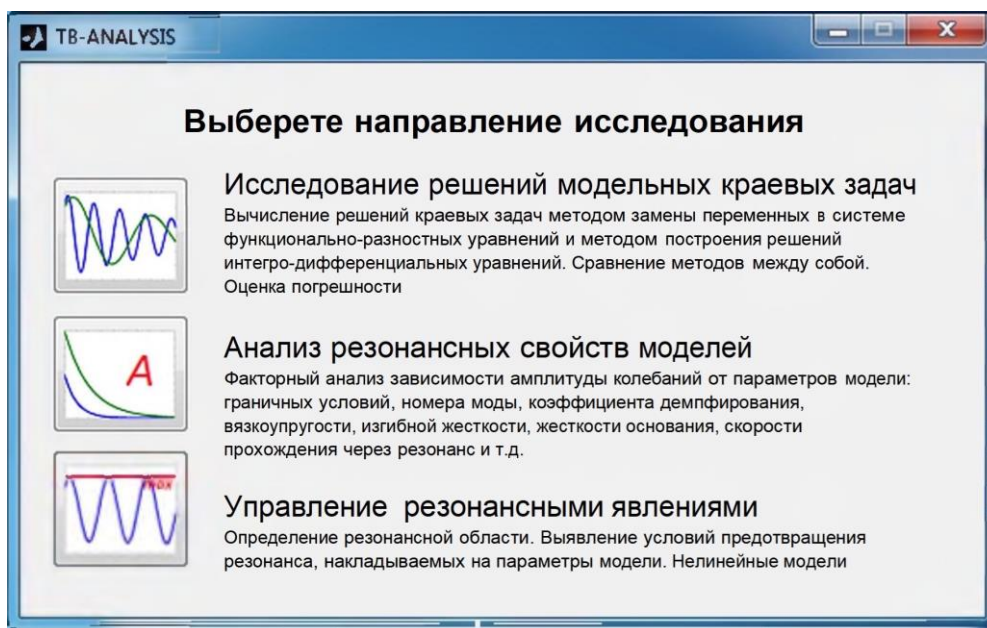


Рис. 4. Главное окно программного комплекса «TB–ANALYSIS–7»

Программный комплекс детально описан с точки зрения алгоритмической структуры и протестирован, что подтвердило его высокую эффективность в решении поставленных задач. На примере тестовой задачи о поперечных колебаниях вязкоупругого каната переменной длины произведена оценка погрешности вычислений.

Используя разработанный программный комплекс, проведено детальное изучение колебаний и резонансных характеристик пятнадцати механических систем с движущимися границами, которые широко применяются в прикладных задачах:

- исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании с учетом влияния сил сопротивления среды;
- математическое моделирование колебаний в передачах с гибкой связью при разгоне;
- вынужденные поперечные колебания струны переменной длины;
- математическое моделирование зависимости частоты поперечных колебаний струны от амплитуды;
- параметрический резонанс нагруженной вязкоупругой нити переменной длины;
- исследование продольных колебаний каната с грузом на конце;
- вычисление собственных частот каната, обладающего изгибной жёсткостью и движущегося в продольном направлении;
- задача о колебаниях кабеля на участке наложения на него изоляции;

- вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость;
- вычисление собственных частот поперечных колебаний каната с учетом сопротивления внешней среды при различных граничных условиях;
- математическая модель продольных колебаний вязкоупругого стержня переменной длины;
- крутильные колебания стержня переменной длины с учетом действия гармонических возмущений на границе;
- задача о колебаниях стержня переменной длины при продольном ударе;
- вынужденные поперечные колебания вязкоупругой балки переменной длины для различных типов граничных условий;
- поперечные колебания консоли переменной длины, лежащей на упругом основании.

Выполнен анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, при этом количественные данные визуализированы в виде графиков и таблиц. Приведены многочисленные результаты соответствующих расчетов.

На рисунке 5 изображен построенный с помощью разработанного программного комплекса график, отображающий зависимость максимальной амплитуды поперечных колебаний каната переменной длины при прохождении через резонанс от относительной скорости движения границ ε для различных значений безразмерного коэффициента сопротивления среды (сверху вниз: $\lambda = 0$; $\lambda = 0,01$; $\lambda = 0,02$) со следующими параметрами модели: номер динамической моды 1; коэффициент жесткости объекта 0,01; коэффициент вязкоупругости 0,01; коэффициент жесткости подложки 0,02.

Проведенный анализ графических зависимостей, представленных на рисунке 5, позволяет установить, что максимальные значения амплитуд колебаний реализуются при нулевых значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды. Указанные значения могут рассматриваться в качестве верхней оценки для амплитуд колебаний при ненулевых значениях данных коэффициентов.

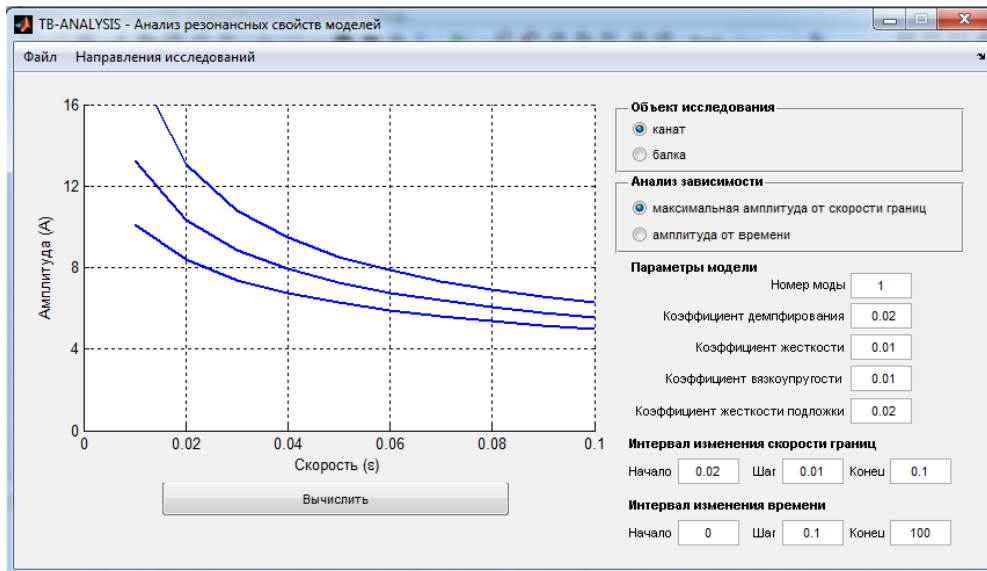


Рис.5. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний каната от относительной скорости движения границ при прохождении через резонанс при различных значениях безразмерных коэффициентов, характеризующих сопротивление среды (сверху вниз: $\lambda = 0$; $\lambda = 0,01$; $\lambda = 0,02$)

В Заключение перечислены основные результаты, полученные в диссертационной работе.

Диссертация является законченной научно–квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований решена научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение для отрасли машиностроения в областях повышения надежности при проектировании широкого круга технических устройств, в которых присутствуют одномерные механические объекты с движущимися границами, заключающаяся в обобщении и развитии фундаментальных приближенных, численно–аналитических и численных методов для решения задач рассматриваемого класса, разработке новых математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов переменной длины, и создании не имеющего аналогов алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

1. Анализ научных публикаций показал, что исследования динамики механических систем с подвижными границами, особенно их резонансных характеристик, остаются недостаточно изученными из–за ограниченной применимости существующих методов, которые не учитывают сложные граничные условия, вязкоупругие свойства, жесткостные параметры системы и демпфирующие характеристики. Кроме того, отсутствуют количественные

оценки резонансных явлений и строгие математические постановки краевых задач, учитывающие нелинейные деформации, взаимосвязь различных типов колебаний и энергообмен через движущуюся границу.

2. Приведены доказательства эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, а также близости решений интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины. Определено понятие «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования.

3. Проведено обобщение и развитие фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов, распространяющее их действие на широкий спектр задач динамики систем с подвижными границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющих учитывать действие на механическую систему демпфирующих сил, жёсткость основания и жёсткость на изгиб, вязкоупругость объекта, а также слабую нестационарность граничных условий, отличных от условий первого рода. Выполнена оценка погрешности приближенных методов.

4. Построены решения однородных интегро–дифференциальных уравнений описывающих движение объектов переменной длины и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами при помощи асимптотических методов, получены выражения для амплитуд и фаз колебаний.

5. Произведена постановка новых нелинейных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами в виде математических моделей, позволяющих учитывать большее число факторов, влияющих на динамический процесс. Проведен сравнительный анализ линейных и нелинейных моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами. Выполнено исследование корректности линейной модели.

6. Разработан оригинальный численный метод для решения нелинейных задач, моделирующих продольно–поперечные колебания систем с изменяющимися во времени граничными условиями.

7. Разработаны и теоретически обоснованы алгоритмы приближенного анализа двух ключевых динамических явлений – прохождения через резонанс и установившегося резонанса – для объектов с движущимися границами с использованием численного метода.

8. Разработан алгоритм получения неравенств, определяющих области, в которых необходимо учитывать подвижность границ и демпфирующие силы при анализе резонансных явлений в механических системах с диссипацией.

9. Создано специализированное программное обеспечение «ТВ– ANALYSIS– 7», интегрированное в среду MATLAB и предназначенное для анализа динамического поведения механических систем с подвижными границами посредством реализации разработанных в диссертации численно–аналитических, приближенных и численных методов расчета колебаний и резонансных явлений. Произведена оценка погрешности вычислений.

10. Исследованы колебания и резонансные характеристики пятнадцати механических объектов с движущимися границами, широко распространённых в технике. Используя разработанный программный комплекс проведен анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, причём количественные характеристики представлены в виде графиков и таблиц.

11. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» в лекционных курсах, в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и выпускных квалификационных работах при подготовке диссертаций по направлению 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника», а также в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное Конструкторско– Технологическое Бюро «Пластик» и АО «Тяжмаш».

Перечень основных публикаций по теме диссертации в изданиях, входящих в перечень ВАК по специальности 1.2.2:

1. Литвинов, В.Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1 (18). – 2009. – С. 149–158.

2. Литвинов, В.Л. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.

3. Литвинов, В.Л. Обоснование граничных условий при взаимодействии струны, обладающей изгибной жесткостью, с роликовой опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов, А.Е. Лукьянов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 5 (21) – 2010. – С. 280–284.

4. Литвинов, В.Л. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения,

описывающего колебания механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012. – С. 145–151.

5. Литвинов, В.Л. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 1 (37) – 2013. – С. 93–98.

6. Литвинов, В.Л. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.

7. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. – С.161–165.

8. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений [Текст]/ В.Л. Литвинов // Тр. Ин–та математики и механики УрО РАН, 26:2 (2020). – С.188–199.

Публикации в отечественных изданиях, входящих в международные реферативные базы данных и системы цитирования, которые приравниваются к публикациям, в которых излагаются основные научные результаты диссертации:

9. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 15, № 3. 2013. – С. 112–119.

10. Литвинов, В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014. – С. 83–88.

11. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот каната, движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.

12. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.

13. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средневолжского математического общества. – 2019. – Т. 21, № 1. – С. 70–77.

14. Литвинов, В.Л. Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средневолжского математического общества, 22:2 (2020). – С. 188–199.

15. Литвинов, В.Л. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 62:6 (2022), –С.977–986.

16. Литвинов, В.Л. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Теоретическая и математическая физика. –2023. –Т.215.–№2.–С. 289–296.

17. Литвинов, В.Л. On one solution of the vibration problem of mechanical systems with moving boundaries [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Вестник Самарского университета.

Естественнонаучная серия, 30:1 (2024), с.40–49.

18. Литвинов, В.Л. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, 2024, № 3, с.53–59.

19. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича–Галеркина для анализа резонансных характеристик систем с затуханием [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Теоретическая и математическая физика. –2025. –Т.224.–№1.–С. 129–138.

20. Литвинов, В.Л. Об одном асимптотическом методе решений однородных интегро–дифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, М.В. Шамолин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2025. – Т. 28. – № 2. – С. 39–54.

Авторские свидетельства о регистрации программ для ЭВМ:

21. Литвинов, В.Л. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТВ–ANALISYS» [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов, Н.С. Яшагин. ОФЭРНиО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.

22. Литвинов, В.Л. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Автоматизированный программный комплекс для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами «ТВ–Analysis–7» [Текст]/ В.Л. Литвинов. № 2025613649, опубл. 13.02.2025 (Рос. Федерация).

Монографии:

23. Литвинов, В.Л. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.

24. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.

25. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. СамГТУ, Самара, 2020. 118 с.

В других изданиях опубликовано 77 работ, из них 10 публикаций приведены ниже:

26. Литвинов, В.Л. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами в разработанном программном комплексе ТВ–Analysis [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ–образование». 2021. Т. 17, № 2.

27. Литвинов, В.Л. Численная схема решения задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами в разработанном программном комплексе ТВ–Analysis [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ– образование». 2022. Т. 18, № 3.

28. Литвинов, В.Л. Стохастические продольные колебания вязкоупругого каната с движущимися границами с учетом действия демпфирующих сил [Текст]/ В.Л. Литвинов // Теория вероятностей и ее применения, 67, № 4, 2022. –С.835–836.

29. Литвинов, В.Л. Solution of boundary value problems with moving boundaries by using an approximate method for constructing solutions of integro – differential equations [Текст]/ В.Л. Литвинов,

А.В. Тараканов // Journal of Physics: Conference Series, 2131 022080 (2021).

30. Литвинов, В.Л. Numerical Study of Longitudinal–Transverse Vibrations of Objects with a Moving Boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham., 2022. Pp. 59–69.

31. Литвинов, В.Л. On One Solution of the Problem of Vibrations of Mechanical Systems with Moving Boundaries/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова, А.В. Тараканов. 7th International Conference on Information, Control, and Communication Technologies (ICCT), Astrakhan, Russian Federation, 2023, Publisher: IEEE.

32. Литвинов, В.Л. Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method [Текст]/ В.Л. Литвинов // Journal of Physics: Conference Series, 2019, № 1392 012015.

33. Литвинов, В.Л. Research of transverse rope oscillations moving in the longitudinal direction / В.Л. Литвинов. AIP Conference Proceedings 2383, 020004 (2022).

34. Литвинов, В.Л. Применение дискретного преобразования Фурье для вычисления частот поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов// Проблемы механики, журнал АН РУз, 2023, № 3, с.28–35.

35. Литвинов, В.Л. Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, А.Л. Семенов, М.В. Шамолин// Computational Mathematics and Information Technologies. 2025; 9(2):34-43.