

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САМАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

На правах рукописи

Литвинов Владислав Львович



МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И
ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЗОНАНСНЫХ СВОЙСТВ
МЕХАНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ С ДВИЖУЩЕЙСЯ
ГРАНИЦЕЙ

1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы
и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
доктора физико–математических наук

Научный консультант
член–корреспондент РАН,
д. ф.–м. н., проф.
Шамолин Максим Владимирович

Самара – 2025

Оглавление

Введение	7
Глава 1. Аналитический обзор	27
1.1. Анализ подходов к исследованию задач динамики объектов с движущимися границами.....	27
1.2. Современные методы решения задач о колебаниях систем с подвижными границами.....	33
1.3. Выводы по первой главе.....	35
Глава 2. Интегро–дифференциальные уравнения движения объектов переменной длины	36
2.1. Интегро–дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны переменной длины.....	37
2.2. Интегро–дифференциальное уравнение колебаний консольной балки переменной длины.....	40
2.3. Эквивалентность формулировок задачи динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах.....	41
2.4. Оценка скорости изменения длины объектов с движущимися границами.....	43
2.5. Оценка близости интегро–дифференциального уравнения динамики объектов переменной длины к соответствующим интегро–дифференциальным уравнениям с фиксированными параметрами.....	47
2.6. Разложение интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.....	50

- 2.7. Определение «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования..... 55
- 2.8. Выводы по второй главе..... 57

Глава 3. Приближенные и аналитические методы решения

- краевых задач с движущимися границами..... 59**
- 3.1. Приближенный метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений движения механических объектов переменной длины 60
- 3.2. Применение метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений..... 67
- 3.3. Оценка погрешности метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений..... 70
- 3.4. Построение асимптотическим методом решений однородных интегро–дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами..... 73
- 3.5. Построение асимптотическим методом решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта переменной длины..... 78
- 3.6. Численно–аналитический метод решения волнового уравнения с широким спектром условий на движущихся границах..... 81
- 3.7. Асимптотический метод решения функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами..... 85
- 3.8. Применение приближенного метода Канторовича – Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием..... 88

3.9. Выводы по третьей главе.....	91
-----------------------------------	----

Глава 4. Исследование влияния движения границ на

резонансные свойства механических систем	93
4.1. Решение краевых задач для случая, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями.....	94
4.2. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением.....	102
4.3. Выводы по четвертой главе.....	107

Глава 5. Нелинейные математические модели

продольно–поперечных колебаний объектов с	
движущимися границами.....	108
5.1. Исследование корректности описания колебаний объектов с движущимися границами волновым уравнением.....	109
5.2. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях нагруженной балки с движущейся границей.....	123
5.3. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о продольных колебаниях стержня конического сечения с движущейся границей.....	127
5.4. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой.....	130
5.5. Численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами.....	137
5.6. Выводы по пятой главе.....	145

Глава 6. Разработка методов анализа резонансных свойств механических объектов с движущимися границами.....	147
6.1. Разработка численного метода и алгоритмов исследования установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс.....	148
6.2. Приближенное исследование явления прохождения через резонанс.....	150
6.3. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием.....	153
6.4. Выводы по шестой главе.....	159
Глава 7. Программный комплекс для исследования колебаний и явлений резонанса в одномерных системах переменной длины.....	161
7.1. Описание комплекса программ	163
7.2. Решений модельных краевых задач с помощью программного комплекса	165
7.3. Вычисление резонансных характеристик математических моделей	168
7.4. Оценка погрешности вычислений на примере математической модели поперечных колебаний вязкоупругого каната переменной длины.....	171
7.5. Математические модели колебаний механических объектов переменной длины.....	178
7.6. Выводы по седьмой главе.....	263
Заключение.....	265
Список литературы.....	268

Приложение А. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025613649.....	306
Приложение Б. Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 19517.....	307
Приложение В. Акт об использовании результатов диссертационной работы в учебном процессе.....	308
Приложение Г. Акты о внедрении результатов диссертационной работы.....	309

Введение

Актуальность темы исследования. С точки зрения технических приложений, одной из наиболее значимых задач в динамике упругих систем является исследование колебаний в системах, где геометрические параметры изменяются с течением времени. На протяжении долгого времени изучение этих вопросов осуществлялось отдельными группами специалистов, каждая из которых занималась решением узкоспециализированных инженерно–технических задач, казавшихся на первый взгляд не связанными между собой. Например, эксперты в области железнодорожного транспорта и мостостроения сосредотачивались на вопросах динамической устойчивости конструкций, подверженных воздействию движущихся нагрузок. В то же время специалисты по механическим передачам анализировали устойчивость гибких элементов в передаточных механизмах. В горной промышленности внимание уделялось динамике шахтных подъемных систем, где применяются канаты, длина которых варьируется в процессе эксплуатации, и другим аналогичным проблемам.

Работы многочисленных исследователей, посвященные изучению динамики подъемных канатов, выявили потребность в формулировке новых задач в области механики, связанных с анализом поведения одномерных объектов, длина которых изменяется во времени. С математической точки зрения это сводится к новым задачам математической физики, а именно к исследованию уравнений гиперболического типа, определенных в областях с изменяющимися границами для обоих аргументов.

На сегодняшний день не существует универсального подхода к формулировке подобных задач, и исследователи в каждом отдельном случае адаптируют известные методы для решения конкретных проблем. При этом стоит отметить, что способы решения таких уравнений в условиях

изменяющихся геометрических областей существенно отличаются от традиционных подходов, используемых в классической математической физике. Например, в случае колебаний струны переменной длины теряется привычный смысл таких понятий, как собственные частоты и фазы, то есть собственных чисел и собственных функций. Это связано с тем, что частоты колебаний струны, длина которой меняется, становятся функциями времени. Кроме того, исчезает независимость отдельных гармоник колебаний. Иными словами, рассматриваемый динамический процесс приобретает эволюционный характер, изменяясь с течением времени.

Эффективность разделения собственных форм движения (или гармоник колебаний) во многом определяется соотношением между скоростью изменения длины объекта и скоростью распространения упругой волны с нем. Если скорость изменения длины становится сопоставимой со скоростью распространения волны в упругой системе, это приводит к возникновению быстротекущего неустановившегося динамического процесса.

Задача колебаний систем с подвижными границами связана с поиском решений систем дифференциальных уравнений в частных производных, определенных в областях, изменяющихся во времени, а также интегро–дифференциальных уравнений, у которых пределы интегрирования и ядра зависят от времени. Это требует введения новых понятий, таких как «собственные функции» и «собственные числа», для объектов переменной длины, а также разработки общей методики исследования краевых задач данного класса. Такой подход должен основываться на сочетании теории интегральных уравнений и асимптотических методов. Кроме того, необходимо решать характерные модельные краевые задачи, связанные с динамикой подъемных канатов, балок, стержней и струн переменной длины, и изучать их резонансные свойства. На данный момент такие задачи остаются недостаточно изученными.

Повышение требований к надежности современных технических систем делает необходимым углубленный анализ их динамических характеристик.

Особую сложность представляют объекты с подвижными границами, широко распространенные в различных областях техники. Отсутствие универсальных методов математического моделирования их динамики и соответствующего программного обеспечения и определяет актуальность диссертационной работы.

Степень разработанности темы исследования. Основы современного состояния проблемы математического моделирования задач о колебаниях систем с движущимися границами заложены в работах Асланова С.К., Боголюбова Н.Н., Весницкого А.И., Владимирова С.А., Горбаня В.А., Горелика Г.О., Горошко О.А., Григоряна Г.А., Гринберга Г.А., Динника А.Н., Икрамова М.В., Ильина Р.Ф., Качурина В.К., Колосова Л.В., Коровина В.Г., Корчинского В.М., Крылова Н.М., Курильской Н.Ф., Лежнёвой А.А., Манговой В.Н., Махмудова А.К., Минакова А.П., Митропольского Ю.А., Мовсисяна Л.А., Моут С., Мулухова К.К., Неронова Н.П., Николаи Е.Л., Новикова В.Д., Потапова А.И., Пенькова А.М., Рагульского К.И., Рахматулина Х.А., Савина Г.Н., Самарина Ю.П., Светлицкого Ю.В., Сергеева А.Д., Столяра А.М., Тарасова В.К., Фещенко С.Ф., Хосаева Х.С., Шевело В.Н., Якубовского Ю.В., Ястребова В.П., Aboshi Mitsuo, Cho Yong Hyeon, Dan Stancioiu, Kotera Tadashi, Lu Sun и многих других авторов.

Анализ научных публикаций показал, что рассматриваемая проблема остается недостаточно изученной: на сегодняшний день отсутствует универсальный подход к решению задач, связанных с динамикой объектов, длина которых изменяется со временем. Особое значение в данном контексте приобретает анализ резонансных свойств таких объектов (прохождение через резонанс, установившийся резонанс), поскольку возникновение резонансных явлений в технических системах с движущимися границами может представлять серьезную опасность и является недопустимым. Не исследованы резонансные свойства систем с демпфированием. В большинстве работ авторы лишь констатируют возможность возникновения резонанса, не приводя количественных оценок данных явлений.

Существующие методы анализа колебаний объектов с движущимися границами требуют развития, поскольку точные решения в основном ограничены волновым уравнением и граничными условиями первого рода. При постановке линейной задачи, исключая учет взаимодействия продольных и поперечных колебаний, а также геометрической нелинейности, возникают значительные погрешности в описании колебаний высокой интенсивности. Существующие известные граничные условия не учитывают возможность энергетического обмена через движущуюся границу.

На сегодняшний день сохраняется нерешенная проблема комплексного подхода к моделированию колебательных процессов в одномерных механических системах с подвижными границами. Существующие методы не учитывают принципиально важные факторы, включая нелинейные деформационные эффекты, жесткостные характеристики, вязкоупругость, взаимосвязанные колебательные процессы, диссипативные явления и сложные энергетические взаимодействия между конструктивными элементами слева и справа от движущейся границы. При этом отсутствуют строгие математические постановки соответствующих краевых задач. Преодоление указанных ограничений создаст основу для разработки точных методов анализа резонансных свойств в динамических системах с движущимися границами.

Научные результаты диссертации, включающие оригинальные методы постановки и решения задач рассматриваемого класса, а также методы исследования резонансных свойств позволяют решить проблемы, возникающие при анализе динамики объектов с движущимися границами.

Объектом исследования являются одномерные механические системы с движущимися границами.

Предметом исследования являются линейные и нелинейные математические модели, описывающие в форме интегро–дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных колебания механических систем с движущимися границами, фундаментальные

приближенные, численно–аналитические и численные методы решения модельных краевых задач.

Цель диссертационной работы состоит в обобщении и развитии фундаментальных приближенных, численно–аналитических и численных методов для решения краевых задач с движущимися границами, разработке линейных и нелинейных математических моделей одномерных объектов переменной длины, создании комплекса программ для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами.

Для достижения поставленной цели решаются следующие взаимосвязанные задачи:

1) проведение комплексного аналитического обзора современных отечественных и зарубежных исследований в области динамики механических систем с подвижными границами с оценкой существующих математических моделей, методов решения краевых задач и анализа резонансных характеристик, а также выявлением нерешенных проблем и перспективных направлений исследований;

2) доказательство эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, а также близости решений интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины;

3) обобщение приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений на более широкий класс задач, позволяющего учитывать изгибную жёсткость объекта, сопротивление среды, жёсткость основания, а также слабую нестационарность граничных условий, с оценкой погрешности метода в зависимости от относительной скорости движения границ;

4) развитие асимптотических методов построения решений однородных интегро–дифференциальных уравнений и систем обыкновенных

дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами, позволяющих получить выражения для амплитуд и фаз колебаний, а также общее решение однородного интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в первом приближении;

5) обобщение приближенного метода Канторовича – Галеркина на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием;

6) разработка метода преобразования переменных для моделирования и нахождения собственных частот объекта в случае, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями;

7) разработка новых нелинейных математических моделей колебаний объектов с движущимися границами, учитывающих взаимодействие продольных и поперечных колебаний, взаимодействие между сегментами объекта слева и справа от движущейся границы, геометрическую нелинейность, изгибную жесткость объекта, вязкоупругость и демпфирующие силы;

8) разработка численного метода решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами;

9) разработка программного обеспечения, предназначенного для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач, с оценкой погрешности вычислений;

10) математическое моделирование и численное исследование колебаний и резонансных характеристик объектов с подвижными границами, наиболее часто встречающихся в прикладных задачах.

Научная новизна выполненной работы заключается в следующем:

1. Впервые проведено обобщение и развитие фундаментальных

приближенных и численно–аналитических методов, распространяющее их действие на широкий спектр задач динамики систем с подвижными границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющих учитывать действие на механическую систему демпфирующих сил, жёсткость основания и жёсткость на изгиб, вязкоупругость объекта, а также слабую нестационарность граничных условий, отличных от условий первого рода. Выполнена оценка погрешности приближенных методов.

2. Для моделирования колебаний систем с подвижными границами построены решения однородных интегро–дифференциальных уравнений описывающих движение объектов переменной длины и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами при помощи асимптотических методов. Впервые получены выражения для амплитуд и фаз колебаний.

3. Произведена постановка новых нелинейных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами в виде математических моделей, позволяющих учитывать большее число факторов, влияющих на динамический процесс. Впервые проведено сравнительное исследование линейных и нелинейных модельных подходов к описанию колебательных процессов в системах с подвижными границами, выявившее принципиальные ограничения линейных моделей.

4. Разработан оригинальный численный метод для решения нелинейных задач, моделирующих продольно–поперечные колебания систем с изменяющимися во времени граничными условиями.

5. Для моделирования резонансных эффектов систем с демпфированием впервые получены результаты, позволяющие количественно оценить влияние демпфирующих сил и движения границ на амплитуду колебаний, возникающих при прохождении через резонанс.

6. Впервые подробно исследованы колебания и резонансные характеристики пятнадцати механических объектов с движущимися

границами, широко распространённых в технике. Используя разработанный программный комплекс проведен анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, причём количественные характеристики представлены в виде графиков и таблиц.

Теоретическая значимость результатов работы заключается в обобщении и развитии фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов решений краевых задач с движущимися границами, численных методов решения нелинейных задач при исследовании резонансных свойств объектов, разработке и исследовании новых линейных и нелинейных математических моделей, описывающих колебания объектов с движущимися границами в форме интегро–дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений в частных производных, определении эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, оценке близости решений интегро–дифференциальных уравнений динамики объектов переменной длины к соответствующим интегро–дифференциальным уравнениям с фиксированными параметрами, определении понятия собственных функций и собственных чисел для краевых задач в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования.

Практическая значимость результатов работы заключается в возможности применения разработанных математических методов и моделей, реализованных в специализированном комплексе программ, в инженерных расчетах, позволяющих на стадии проектирования технических устройств предотвратить условия возникновения резонансных явлений и колебаний большой интенсивности; создании условий для повышения надежности работы грузоподъемных установок, безопасности движения лифтов, подвесных канатных дорог, железнодорожной контактной сети, движения поездов; предотвращения высокоинтенсивных колебаний в лентопротяжных механизмах, звеньях передач с гибкой связью, ленточных пилах; безопасной работы деталей машин, турбин, генераторов, редукторов, бурильных колонн и

т.д. Возникновение колебаний большой амплитуды в указанных объектах часто бывает недопустимым, поэтому на первом плане здесь стоит анализ резонансных свойств и проблема увеличения интенсивности колебаний при уменьшении длины объекта. Результатами такого анализа могут стать: повышение надежности работы технических объектов с переменными во времени границами, повышение точности расчетов конструкций на динамическую прочность. Получены свидетельства о регистрации программ для ЭВМ. Результаты диссертации использованы в учебных пособиях.

Методы исследования. Для решения сформулированных в диссертационной работе проблем и поставленных задач использовались методы математического моделирования, приближенные, численно–аналитические и численные методы решения модельных краевых задач, методы решения интегральных уравнений, методы решения гиперболических уравнений в частных производных, асимптотические методы.

Положения, выносимые на защиту:

1. Приближенные и численно–аналитические методы решения задач о колебаниях систем с движущимися границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющие получить решения с учетом действия на систему сопротивления среды, вязкоупругости, изгибной жесткости и жесткости основания, при широком спектре граничных условий, отличных от условий первого рода.

2. Метод преобразования переменных для моделирования и нахождения собственных частот объекта в случае, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями.

3. Нелинейные математические модели колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие: взаимодействие продольных и поперечных колебаний, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы, геометрическую нелинейность, изгибную жесткость объекта, вязкоупругость и демпфирующие силы. Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей.

4. Численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами.

5. Результаты, позволяющие количественно оценить влияние демпфирующих сил и движения границ на амплитуду колебаний при моделировании резонансных эффектов систем с демпфированием.

6. Программный комплекс, предназначенный для решения некоторого класса краевых задач с движущимися границами, математического моделирования и изучения резонансных свойств объектов, состояние которых описывается этими постановками задач.

7. Математическое моделирование и исследование новых качественных и количественных резонансных свойств пятнадцати одномерных механических объектов с движущимися границами, широко распространённых в технике.

Соответствие специальности. Направление диссертационного исследования соответствует паспорту специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а именно, п. 1 «Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений», п. 3 «Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно–ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента», п. 4 «Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели» и п. 5 «Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей».

Степень достоверности и обоснованность полученных результатов. Обоснованность выносимых на защиту научных положений, выводов и рекомендаций, а также достоверность полученных результатов и исследований подтверждается: корректностью в использовании математического аппарата и применении апробированных программных средств; адекватностью модельных представлений реальному процессу колебаний одномерных механических систем с движущимися границами;

преимуществом полученных новых качественных и количественных результатов, сравнением аналитических и приближенных решений в частных случаях.

Связь диссертационной работы с планами научных исследований.

Работа выполнялась в рамках тематического плана НИР СамГТУ (тема «Математическое моделирование физических, механических, технических и экономических систем и процессов»).

Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы:

– в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» для подготовки магистрантов направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» по дисциплинам «Уравнения математической физики», «Численные методы решения краевых задач», «Математическое моделирование и компьютерные технологии в науке», «Нелинейное моделирование материалов и механических систем» и аспирантов направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и выполнении выпускных квалификационных работ при подготовке диссертаций направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (Приложение В);

– в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное Конструкторско–Технологическое Бюро «Пластик» (г.Сызрань, Самарская обл.), АО «Тяжмаш» (г.Сызрань, Самарская обл.) (Приложение Г).

Апробация результатов. Основные результаты диссертации представлены на 2–й, 3–й и 4–й Всероссийской научной конференции «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2005, 2006 и 2007 гг.), 1–й, 2–й, 3–й, 4–й, 5–й, 6–й, 7–й, 8–й, 9–й, 10–й и 11–й Всероссийской научно–технической конференции–семинаре «Научно–

техническое творчество: проблемы и перспективы» (г.Самара, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014 2015 и 2016 гг.), 5–й, 6–й, 7–й, 8–й, 9–й, 10–й, 11–й и 12–й Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (г.Самара, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2016, 2019 и 2024 гг.), 3–й и 4–й Международной конференции «Математическая физика и ее приложения» (г.Самара, 2012, 2014 гг.), 10–й Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (г. Нижний Новгород, 2016 г.), 47–й Международной конференции «Актуальные проблемы прочности» (г.Нижний Новгород, 2008 г.), 11–й Всероссийской научно–технической конференции «Аэрокосмическая техника, высокие технологии и инновации – 2008» (г.Пермь, 2008 г.), 20–й, 33–й, 34–й, 35–й, 36–й Весенней математической школе «Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения» (г.Воронеж, 2009, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 3–й Международной научной конференции «Современные проблемы прикладной математики и математического моделирования» (г.Воронеж, 2009 г.), 20–х, 24–х Петербургских чтениях по проблемам прочности (г. Санкт–Петербург, 2012 и 2024 гг.), 4–ом Российско–Армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (г. Красноярск, 2012 г.), четвертой Международной конференции, посвящённой 90–летию со дня рождения члена–корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева (г.Москва, 2013 г.), 17–й, 19–й и 22–й Международной Саратовской зимней школы «Современные проблемы теории функций и их приложения» (г.Саратов, 2014, 2018 и 2024 гг.), Международной конференции «Функциональные пространства и теория приближения функций» посвященная 110–летию со дня рождения академика С.М. Никольского (г.Москва, 2015 г.); 22–й, 23–й, 24–й, 25–й, 26–й, 27–й, 28–й, 29–й, 30–й и 31–й Международной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов» (г.Москва, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 13–й, 14–й, 15–й, 16–й и 17–й Международной научной конференции «Дифференциальные

уравнения и их приложения в математическом моделировании» (г.Саранск, 2017, 2019, 2021, 2023 и 2025 гг.), 8–й, 9–й, 10–й и 11–й Международной научной школе–семинаре «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г.Саранск, 2018, 2020, 2022 и 2024 гг.), 4–й, 5–й и 6–й Международной конференции «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (г.Москва, 2019, 2022 и 2025 гг.), 6–й, 7–й, 8–й и 9–й Всероссийской конференции с международным участием «Технологии разработки и отладки сложных технических систем» (г.Москва, 2019, 2021, 2022 и 2023 гг.), 10–й Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (г.Самара, 2017 г.), Международной научной конференции «Современные проблемы математики и механики», посвященной 80–летию академика В.А.Садовниченко (г.Москва, 2019 г.), 1–й, 2–й, 3–й, 4–й, 5–й и 6–й Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и информационных технологий» (г. Махачкала, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской научно–технической конференции «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики в современной науке: теория и практика актуальных исследований» (г. Махачкала, 2025 года), Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н. В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (г.Ижевск, 2020, 2022 и 2025 гг.), Международной конференции по дифференциальным уравнениям и динамическим системам (г.Суздаль, 2020, 2022 и 2024 гг.), Международной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации» (г. Уфа, 2020, 2021, 2023 и 2024 гг.), Труды 63–й, 64–й, 65–й и 67–й Всероссийской научной конференции МФТИ (г. Москва, 2020, 2022, 2023 и 2025 гг.), Воронежской зимней математической школе «Современные методы теории функций и смежные проблемы» (г.Воронеж, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 22–й и 23–й Зимней школе по механике сплошных сред (г.Пермь, 2021 и 2023 гг.), International

Conference “Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite–Dimensional Analysis (MPDSIDA)–2021” (г. Долгопрудный, 2021г.), International Conference “Days on Diffraction” (St. Petersburg, 2025), Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии (г.Казань, 2021 г.), 14–й, 15–й и 1–й Международной научной конференция «Фундаментальные и прикладные проблемы математики и информатики» (г. Махачкала, 2021, 2023 и 2025 гг.), Международной научной конференции «Порядковый анализ и смежные вопросы математического моделирования. Теория операторов и дифференциальные уравнения» (г. Владикавказ, 2019, 2021, 2023 и 2025 гг.), Международной научной конференции «Уфимская осенняя математическая школа» (г.Уфа, 2021, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской научной конференции (с международным участием) «Математика и математическое моделирование» (Самара, 2021 и 2023 гг.), 6–й и 7–й Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (В&НАК) (Кабардино–Балкарская Республика, г.Нальчик, 2021 и 2023 гг.), Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы» (г. Белгород, 2021 г.), International Scientific Conference Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis (ОТНА) (Rostov–on–Don, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025), 15th ISAAC Congress, International Society for Analysis, its Applications and Computation (Astana, Kazakhstan, 2025), Международной конференции «Информационные технологии и технические средства управления» (ICCT–2023) (г. Астрахань, 2023г., г.Владикавказ, 2024 г.), International Conference Vavilov Memorial (2024, Saint Petersburg), Международной конференции «Однопараметрические полугруппы операторов» (OPSO) (г. Нижний Новгород, 2022, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление» посвященной 100–летию со дня рождения академика Евгения Фроловича Мищенко (г. Москва, 2022 г.), Международной конференции

«Теория оптимального управления и приложения» (ОСТА) (г. Екатеринбург, 2022 г.), 3–й, 4–й и 5–й Международной конференции «Геометрические методы в теории управления и математической физике» (г. Рязань, 2021, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции «Математика искусственного интеллекта» (MathAI2025) (г. Сочи, 2025 г.), 9–й и 10–й Международной конференции по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям (г. Москва, 2022 и 2025 г.), 28–й, 29–й, 30–й и 31–й Международной конференции «Математика. Экономика. Образование» (12–й, 13–й, 14–й и 15–й Международный симпозиум «Ряды Фурье и их приложения») (г. Ростов н/Д, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной конференции по геометрическому анализу, посвящённой памяти академика Ю. Г. Решетняка (г. Новосибирск, 2023 и 2024 гг.), XII и XIII Всероссийском съезде по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики (г. Уфа, 2019 г., г. Санкт–Петербург, 2023 г.), 1–й, 2–й, 3–й, 4–й и 5–й конференции Математических центров России (г. Сочи, 2021 г., г. Москва, 2022 г., г. Майкоп, 2023 г., г. Санкт–Петербург, 2024 г. и г. Красноярск, 2025 г.), Всероссийской научно–технической конференции по строительной механике корабля «БУБНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2022» (г. Санкт–Петербург, 2022 г.), 10–й Всероссийской конференции, посвященной 125–летию со дня рождения академика Михаила Алексеевича Лаврентьева «Лаврентьевские чтения по математике, механике и физике» (г. Новосибирск, 2025 г.), 21–й, 22–й, 23–й и 24–й Международной конференции имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование» (ИТММ) (г. Карши, Узбекистан, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной (53–й, 54–й, 55–й и 56–й Всероссийской) молодежной школе–конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (г. Екатеринбург, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Всероссийской конференции «Необратимые процессы в природе и технике» (г. Москва, 2023, 2024 и 2025 гг.), 8–й, 9–й, 10–й и 11–й Международной конференции по стохастическим методам (ICSM) (г. Геленджик, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), 3–й и 4–й Школе–семинаре

«Механика, химия и новые материалы» (г. Санкт–Петербург, 2024 и 2025 гг.), Third International Conference “Mathematics in Armenia, Advances and Perspectives”, Dedicated to the 80th anniversary of foundation of Armenian National Academy of Sciences (Yerevan, Armenia, 2023), International Conference on Integrable Systems and Nonlinear Dynamics (ISND), (Yaroslavl, 2021, 2022, 2023, 2024), 3–й Международной конференции «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ», посвященной 100–летию В.С. Владимирова, 100–летию Л.Д. Кудрявцева и 85–летию О.Г. Смолянова (г. Долгопрудный, 2023 г.), 10–й Международной конференции по математическому моделированию, посвященной 30–летию Академии наук республики Саха (Якутия) (г. Якутск, 2023 г.), Международной конференции по алгебре, алгебраической геометрии и теории чисел (г. Тула, 2022, 2023, 2024 и 2025 гг.), Международной Казанской школе–конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы» (г. Казань, 2023 и 2025 гг.), Russian–Chinese Conference “Differential and Difference Equations” (Novosibirsk, 2023), Всероссийской научно–технической конференции по строительной механике корабля «Памяти академиков–кораблестроителей», посвященной 160–летию академика А.Н. Крылова и 140–летию академика Ю.А. Шиманского (г. Санкт–Петербург, 2023 г.), Математическом форуме: Итоги науки. Юг России (г. Ростов–на–Дону, 2023 и 2024 гг.), Международной конференции по комплексному анализу и математической физике, посвященной 75–летию А. Г. Сергеева (г. Москва, 2024 г.), 8th International school–seminar “Nonlinear analysis and extremal problems” (NLA–2024) (Irkutsk, 2024), Всероссийской конференции «Современные проблемы физико–математических наук» (г. Орёл, 2023, 2024 гг.), 51 и 52 Школе–конференции «Актуальные проблемы механики» (г. Великий Новгород, 2024 г. и г. Санкт–Петербург, 2025 г.), XIX Владикавказской молодежной математической школе (ВММШ–2024) (г. Владикавказ, 2024г.), Международной научной конференции «Матричные методы и интегральные уравнения» (г. Сочи, 2024 и 2025 гг.), 33rd St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (г.

Санкт–Петербург, 2024 г.), Всероссийской Школе–конференции «Неголономные дни в Переславле» (г.Переславль–Залесский, 2024г.), Международной конференции «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры» (SCDG2024), посвященной 100–летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (г. Екатеринбург, 2024 г.), Всероссийской конференции «Дифференциальные игры, теория управления и оптимизация» (DGСТО–2025), посвященной памяти профессора В.И. Ухоботова (г. Челябинск, 2025 г.), Всероссийской Школе–конференции «Математическая весна» (г. Нижний Новгород, 2024 и 2025 гг.), Международной конференции «Интегрируемые системы и квантовая теория» (г. Санкт–Петербург, 2024г.), Международной научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения» (г. Ташкент, Узбекистан, 2024 г.), Республиканской научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения», приуроченной к 80–летию академика Ш. А. Алимова (г. Ташкент, Узбекистан, 2025 г.), Международной конференции «Современные проблемы математики и её приложения» (г. Душанбе, Таджикистан, 2025 г.), Международной конференции «XIV Белорусская математическая конференция» (г. Минск, Белоруссия, 2024г.), Всероссийской конференции, посвященной 105–летию со дня рождения академика РАН Л. В. Овсянникова «Математические проблемы механики сплошных сред» (г. Новосибирск, 2024г.), Международной конференции «Математика в созвездии наук», к юбилею ректора МГУ, академика Виктора Антоновича Садовниченко (г. Москва, 2024г.), Международной конференции «Комплексный анализ и смежные проблемы» (г. Уфа, 2024 г.), Всероссийской конференции «Математическое моделирование в механике», посвящённой 50–летию ИВМ СО РАН (г. Красноярск, 2024 г.), Международной конференции, посвященной памяти академика А.В. Кряжимского «Системный анализ: моделирование и управление» (г. Москва, 2024 г.), XX Международной конференции по дифференциальным и функционально–дифференциальным уравнениям

(DFDE-2025), посвященной памяти академика С.П. Новикова (г. Москва, 2025 г.), Международной конференции «Теория функций и ее приложения», посвященной 120-летию со дня рождения академика РАН Сергея Михайловича Никольского (г. Долгопрудный, 2025 г.), на научно-исследовательских семинарах «Актуальные проблемы геометрии и механики» Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН Д.В. Георгиевский, д.ф.–м.н., чл.–корр. РАН М.В. Шамолин, 2018–2025 гг.), на научно-исследовательских семинарах кафедры Вычислительная механика Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова (рук. д.ф.–м.н., академик РАН В.А. Левин, 2017–2020 гг.), на научных семинарах «Механика и прикладная математика» Самарского государственного технического университета (рук. д.ф.–м.н., профессор В.П. Радченко, 2014–2025 гг.) и др.

Имеются свидетельство о регистрации электронного ресурса № 19517 от 26.09.2013 г. и свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025613649 опубл. 13.02.2025 г.

Публикации. По материалам диссертации опубликовано 102 работы, из них 3 монографии, 20 статей в ведущих рецензируемых научных журналах, которые входят в утвержденный ВАК Минобрнауки России «Перечень российских рецензируемых научных журналов, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученых степеней доктора и кандидата наук» по специальности 1.2.2 (05.13.18) и приравненных к ним отечественных изданиях, которые входят в международные реферативные базы данных и системы цитирования (Scopus, Web of Science), 33 статьи – в сборниках трудов конференций и других журналах, 39 тезисов докладов, 5 учебных пособий, получено 2 свидетельства о регистрации электронного программного комплекса.

Благодарности. Автор выражает благодарность научному консультанту доктору физико-математических наук М.В. Шамолину за консультации и постоянное внимание к работе, доктору физико-математических наук В.П.

Радченко и кандидату физико–математических наук В.Н. Анисимову за ряд постановок задач и поддержку работы.

Личный вклад автора. Автором лично получены следующие наиболее существенные результаты:

–впервые выполнено обобщение и развитие фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов на более широкий класс задач о колебаниях систем с движущимися границами, позволяющих учитывать действие на механическую систему сил сопротивления среды, изгибную жёсткость и жёсткость основания, вязкоупругие свойства колеблющегося объекта и слабые возмущения на границах при широком спектре граничных условий, отличных от условий первого рода;

–разработаны новые нелинейные математические модели для моделирования и анализа продольно–поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, учитывающие: геометрическую нелинейность, взаимодействие продольных и поперечных колебаний, вязкоупругость, изгибную жесткость, взаимодействие между частями объекта слева и справа от движущейся границы;

– разработан новый численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами;

– разработано не имеющее аналогов алгоритмическое и программное обеспечение, реализующее в среде MATLAB аналитические и приближенные методы для численного исследования колебаний и резонансных характеристик объектов, встречающихся в прикладных задачах;

–предложены и численно исследованы новые линейные математические модели описания колебательных процессов в системах с движущимися границами, широко распространённых в технике.

Работы [107, 110, 113, 115–118, 121, 123, 124, 130, 133, 135–137, 140, 141, 145, 147, 150, 158, 161, 167, 168, 170, 172, 190, 197] выполнены самостоятельно, в работах [5–7, 9–20, 104–106, 108, 109, 114, 122, 126–129,

131, 132, 134, 142–144, 146, 148, 149, 157, 159, 178–183, 185–189, 191–196] диссертанту принадлежит совместная постановка задач и разработка методов решений, ему лично принадлежит алгоритмизация методов в виде программного комплекса, анализ результатов. В остальных работах [8, 111, 112, 119, 120, 125, 138, 139, 151–156, 160, 162–166, 169, 171, 173–177, 184], опубликованных в соавторстве, автору диссертации в равной мере принадлежат как постановка задачи, так и результаты выполненных исследований.

Структура и объём диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, семи глав, заключения, библиографии и четырех приложений. Общий объём диссертации составляет 310 страниц, включая 38 рисунков, 24 таблицы и 4 приложения. Библиография включает 280 наименований на 36 страницах.

Глава 1

Аналитический обзор

Исследование динамики механических систем с движущимися границами представляет собой важную научную задачу, имеющую широкое практическое применение в различных областях техники. Начало систематическому изучению данной проблемы было положено в работе Е.Л. Николаи, где впервые исследовались колебания струны с подвижной границей. Дальнейшее развитие данного направления было обусловлено потребностями промышленности, особенно в области горного дела, подъемно–транспортных систем и специальных технических устройств.

В настоящей главе представлен комплексный анализ эволюции научных представлений о динамике объектов переменной длины, начиная с классических работ А.Н. Динника до современных исследований. Рассматриваются различные математические подходы к решению соответствующих задач, включая методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, функционально–дифференциальных уравнений, методы, основанные на введении новых переменных, асимптотические методы.

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [8, 123, 125, 139].

1.1. Анализ подходов к исследованию задач динамики объектов с движущимися границами

Выполненная в 1919 г. работа Е. Л. Николаи [214] положила начало углубленному изучению динамики объектов переменной длины и их

поведения под воздействием различных факторов. В частности, Николай исследовал колебания струны, проходящей через два опорных кольца, одно из которых может свободно перемещаться с установленной постоянной скоростью. Решая эту задачу, Николай продемонстрировал, что при сокращении длины участка, участвующего в колебаниях, их интенсивность возрастает, а при его удлинении величина энергии колебаний снижается.

Активное развитие данное направление получило в середине двадцатого века благодаря стремительному прогрессу и усовершенствованию различных технических устройств. В этот период возникли такие актуальные проблемы, как обеспечение надежности работы канатов и тросов в подъемных механизмах – исследования О. А. Горошко, Л. В. Колосова, Г. Н. Савина, А. М. Столяра [48–51, 74, 80, 81, 217, 227, 228]; предотвращение колебаний кабелей, проволоки и проката на производственных линиях, а также магнитных лент в лентопротяжных устройствах – работы К. И. Рагульского [222]; устойчивость колебаний нитей, волокон и ленточных передач – исследования В. А. Горбань и Ю. В. Якубовского [44–46, 246]; снижение вибраций ленточных пил – исследования С. Моут [210] и передач с гибкими связями – работы Я. Кожешника и В. А. Светлицкого [78, 233, 234]. Проблематика также охватывает такие явления, как колебания ленточных конвейеров – исследования К. К. Мулухова и Х. С. Хосаева [211, 241], предотвращение продольных, поперечных, изгибных и крутильных колебаний струн, валов, балок, канатов и стержней с подвижными закреплениями – работы А. И. Весницкого, О. А. Горошко, М. В. Икрамова, В. П. Ястребова, Kotera Tadashi [30–38, 48–51, 69, 247, 236, 237], обеспечение надежности работы железнодорожной контактной сети – исследования А. Д. Сергеева, Aboshi Mitsuo, Cho Yong Hyeon [235, 248, 251], вибрации конструкций под воздействием движущихся нагрузок – работы Н. Ф. Курильской, Dan Stancioiu, Lu Sun [98, 270, 271], устойчивость горения твердого топлива – исследования С. К. Асланова [22], колебания проволоки при производстве оболочек

вращения методом намотки – работы В. Г. Коровина [82], колебания систем с переменной зоной контакта – исследования С. А. Владимирова [40] и другие.

Основным импульсом для развития исследований в области динамики объектов с изменяющейся длиной послужили задачи, связанные с расчетами динамики шахтных подъемных канатов, применяемых на больших глубинах. Канат в шахтной подъемной системе представляет собой один из ключевых и наиболее дорогостоящих компонентов. Особенности проектирования механизмов навивки и приводных устройств, которые призваны гарантировать долговечность и надежность работы подъемной установки, делают выбор параметров каната критически важным. Данные параметры напрямую влияют на габариты всех шахтных конструкций и оборудования, а значит, и на общую стоимость проекта. Согласно устоявшимся нормам, подтвержденным многолетним опытом, диаметр барабана, на который наматывается канат, должен превышать диаметр каната в 70–90 раз, чтобы избежать усталостного разрушения из-за напряжений, возникающих при изгибе. При этом недостаточный запас прочности каната категорически недопустим по соображениям безопасности. Это обуславливает необходимость высокой точности в оценке работоспособности канатов с применением динамической теории. Методы таких расчетов постоянно совершенствовались в течение последних десятилетий, и задачи, связанные с динамикой шахтных подъемных канатов, стали классическими в механике объектов переменной длины, аналогично тому, как задача о колебаниях струны стала классическим примером для демонстрации основных свойств задач гиперболического типа в математической физике.

Исследования в области динамики объектов с изменяющейся длиной охватывают широкий круг задач, направленных на изучение научных основ прочности, надежности и долговечности горного оборудования, подъемно–транспортных систем, буксирных и траловых устройств, а также других механизмов, где стальные канаты используются как рабочий элемент [11, 27, 28, 36, 41–42, 59, 60, 68, 69, 105–110, 126, 128, 138, 145, 167, 176, 178, 182].

Помимо этого, в область динамики объектов переменных длин входят задачи, связанные с расчетом чувствительных компонентов некоторых измерительных приборов. Также сюда относятся работы по анализу динамики передач с гибкой связью. В последнее время особое внимание уделяется изучению баллистики гибких нитей, которые приводятся в движение брошенным телом [225, 243].

В области динамики гибких нитей выделяют три ключевых направления. Первое из них посвящено анализу устойчивости траектории движения нитей при их перематывании, когда нить перемещается аналогично потоку жидкости. Полученные результаты находят практическое применение, особенно в текстильной отрасли. Теоретические основы этого направления, разработанные в исследованиях А. П. Минакова [200], успешно применяются в технологиях производства стеклопластиковых оболочек.

Второе направление охватывает задачи, связанные с проведением статических расчетов гибких нитей, которые применяются при проектировании подвесных канатных дорог, контактных сетей железнодорожного транспорта [27, 258], вантовых мостов, проводов и других подобных конструкций. Основные методы, используемые для решения таких задач, подробно изложены в монографии В. К. Качурина [73], а также в ряде других исследований. В издании [234] также приводится систематизированный обзор литературы, посвященной методам статического расчета гибких нитей.

Третье направление сформировалось в результате разработки методов динамического анализа гибких нитей как постоянной, так и переменной длины, которые выступают в конструкциях в качестве основного несущего элемента. К числу наиболее типичных задач этого направления относятся исследования динамики шахтных подъемных канатов, а также динамические задачи, связанные с подъемно–транспортным, проходческим, траловым и буксирным оборудованием.

Важное место в исследованиях динамики несущих нитей занимают труды Х. А. Рахматулина [224] и его учеников, которые посвящены изучению поперечного удара и распространения упругопластических волн в нитях.

Изучение колебаний шахтных подъемных канатов привело к появлению новых задач математической физики, которые выходят за рамки классических. В частности, это касается изучения уравнений гиперболического типа в геометрических областях, изменяющихся во времени. При этом законы движения границ рассматриваемых механических систем могут быть заданы с помощью некоторых непрерывных функций.

Первые научные работы, посвященные динамике шахтных подъемных канатов, были выполнены академиком А. Н. Динником [58, 59]. В своих исследованиях он установил, что волновое уравнение может служить теоретической основой для анализа динамических процессов в шахтных подъемных канатах. Его труды заложили фундамент для дальнейших экспериментальных и теоретических изысканий в данной области, определив ключевые направления развития научных исследований.

Важные исследования в области динамики нитей переменной длины были проведены Н. П. Нероновым [213], который четко определил основные допущения и вывел систему функционально–дифференциальных уравнений, описывающих подъем и спуск груза при заданном законе вращения барабана. Полученные Нероновым уравнения волнового типа включают не только искомую функцию, но и ее значения в граничных точках, что существенно усложняет их анализ. При этом своих работах Неронов не рассматривал реальные процессы, происходящие в точке набегания нити на барабан, а граничные условия были сформулированы в предположении отсутствия проскальзывания набегающих элементов.

Функционально–дифференциальные уравнения, полученные в ходе исследований, были решены Нероновым и его учениками с применением метода распространяющихся волн. Тем не менее, высокая сложность этих решений позволила получить решения только для ограниченного числа

начальных временных интервалов, соответствующих периоду, в течение которого упругая волна распространяется по свободной части каната.

С. Ф. Фещенко использовал разработанный им асимптотический метод анализа линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами для решения ряда частных задач. В. Н. Шевело решил несколько задач, связанных с определением критической скорости подъема грузов на вязкоупругих нитях.

В работе [198] А. С. Локшин, опираясь на исследования Е. Л. Николаи, рассматривает две новые задачи, связанные с определением динамических усилий в тонком упругом стержне переменной длины, что актуально для расчетов шахтного подъемного каната. В рамках первой задачи исследуются динамические усилия, возникающие в стержне с грузом на конце при продольных колебаниях. Основное допущение заключается в том, что изменение длины стержня происходит за счет его равномерного движения через опорное кольцо, которое не препятствует перемещению стержня, но исключает относительные смещения, обусловленные упругими деформациями в сечениях, проходящих через кольцо. Вторая задача посвящена определению усилий в том же стержне при условии, что концевому грузу сообщается некоторая относительная скорость. Однако предложенные постановки задач, ввиду их искусственности и ограниченности, не полностью соответствуют реальным условиям функционирования подъемного каната как объекта с изменяющейся длиной.

А. М. Пеньков [215] исследовал задачу, связанную с поперечными колебаниями каната, рассматривая его как струну переменной длины.

Р. Ф. Ильин [66, 67], применяя функционально–дифференциальные уравнения, предложенные в работе [228], разработал и проанализировал систему уравнений, описывающих колебания поднимаемых грузов. В своих исследованиях он учел взаимное влияние колебаний усилий в поднимающейся и опускающейся ветвях подъемного каната, а также упругую податливость приводного устройства.

1.2. Современные методы решения задач о колебаниях систем с подвижными границами

Точные методы решения краевых задач, связанных с колебаниями механических систем с подвижными границами, в основном ограничиваются применением волнового уравнения [13, 30–38, 88, 121, 142]. При этом предполагается, что границы таких объектов движутся медленно по сравнению со скоростью распространения колебаний. Большинство приближенных решений было получено именно для таких систем. Наиболее распространенным подходом здесь является метод Галеркина [6, 18, 123, 124, 131, 171, 177, 188, 252], который часто используется в сочетании с методом Крылова–Боголюбова–Митропольского [29, 117, 139, 201, 208].

Асимптотические методы, разработанные Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым, нашли широкое применение в различных задачах, связанных с изучением колебательных процессов. Развитие этих методов применительно к исследованию систем с переменными параметрами в основном представлено в работах Ю. А. Митропольского [29, 202]. Эти методы, известные как методы Боголюбова–Митропольского, успешно применяются и для анализа задач динамики объектов переменной длины. Вопросы, связанные с нестационарными процессами в нелинейных колебательных системах с множеством степеней свободы, подробно рассмотрены в монографии Ю. А. Митропольского [201]. Данный асимптотический метод был адаптирован для исследования динамики канатов шахтных подъемников О. А. Горошко, Г. Н. Савиным и А. М. Столяром [217, 227, 228]. К электродинамическим объектам данный подход использовался В. М. Корчинским [83].

В исследованиях А. А. Лежневой [100–101] были изучены колебания балок переменной длины. Основываясь на предположении о медленном изменении длины балки, А. А. Лежнева применила асимптотические методы, разработанные Н. Н. Боголюбовым и Ю. А. Митропольским. В ходе работы она выявила законы изменения амплитуд колебаний балок с различными

граничными условиями, а также исследовала прохождение через резонанс на переменной во времени частоте балки.

Еще одним значимым приближенным методом в динамике систем с подвижными границами является метод Канторовича [57], который часто используется в сочетании с методом Галеркина [6, 18, 161, 170, 171, 177, 182, 185, 188, 192, 252]. А. А. Лежнева применяет этот подход для нахождения решений волнового уравнения [100] и уравнения изгибных колебаний балки [101] при простых однородных граничных условиях, заданных на одной подвижной и одной неподвижной границах.

В исследовании автора Kawai Riozi [256] задача о колебаниях стержня переменной длины с помощью линейной замены переменных сводится к интегрированию уравнения с переменными коэффициентами в области постоянной длины. Однако после выполнения замены автор вводит упрощения, которые оказывают существенное влияние на определение амплитуд колебаний.

В исследованиях Л. А. Мовсисяна [205–206] рассмотрены задачи, связанные с колебаниями полубесконечной балки с перемещающимся концом, а также колебания балки, длина которой изменяется периодически.

В системах с подвижными границами выделяют три типа резонансных явлений: установившийся резонанс, прохождение через резонанс и параметрический резонанс. Установившийся резонанс впервые был изучен Г. О. Гореликом [47]. Параметрический резонанс, возникающий при периодическом изменении длины объекта, например, в случае согласования процесса колебаний и закона движения границы, был исследован в работах А. И. Весницкого [31, 38].

Приведенные задачи демонстрируют специфику динамики объектов с изменяющейся длиной, а также особенности применения методов исследования для решения поставленных задач.

1.3. Выводы по первой главе

1. Проведенный анализ развития исследований в области динамики объектов с движущимися границами демонстрирует последовательную эволюцию научных представлений – от первых работ Е.Л. Николаи и А.Н. Динника до современных комплексных подходов. Современные методы исследования колебаний систем с подвижными границами развиваются в нескольких ключевых направлениях. Точные решения в основном ограничиваются волновым уравнением и случаями медленного движения границ. Наиболее распространенными приближенными методами являются метод Галеркина и его комбинации с методами Крылова–Боголюбова–Митропольского.

2. Анализ научных публикаций выявил существующие пробелы в исследованиях динамики механических систем с подвижными границами, особенно в части анализа их резонансных характеристик. Существующие методы решения подобных задач обладают рядом принципиальных ограничений – они применимы преимущественно к волновому уравнению с простыми граничными условиями, не учитывают взаимосвязь различных типов колебаний и энергообмен через движущуюся границу. Особую проблему представляет отсутствие количественных оценок резонансных явлений и строгих математических постановок краевых задач, учитывающих комплекс факторов: нелинейные деформации, вязкоупругие свойства, демпфирующие характеристики и жесткостные параметры систем.

3. Полученные результаты аналитического обзора создают теоретическую основу для дальнейших исследований, представленных в последующих главах работы, и позволяют сформулировать новые перспективные направления развития методов анализа динамики систем с движущимися границами.

Глава 2

Интегро–дифференциальные уравнения движения объектов переменной длины

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [139, 141, 159, 164, 196].

Как отмечают некоторые исследователи (например, И. М. Бабаков [23] и др.), в простейших случаях методы интегральных уравнений не обладают преимуществами перед методами дифференциальных уравнений при изучении колебаний систем с бесконечным числом степеней свободы. Однако преимущества методов интегральных уравнений становятся очевидными при переходе к более сложным динамическим системам, таким как системы с сосредоточенными массами, под воздействием подвижных нагрузок и др. Данные методы могут оказаться особенно эффективными при анализе динамики нитей переменной длины и других механических объектов с движущимися границами.

Интегро–дифференциальные уравнения движения объектов постоянных размеров могут быть получены путем суммирования воздействия всех приложенных сил с использованием соответствующей функции влияния [51, 95, 204, 225, 239]. Однако для объектов переменных размеров понятие функции влияния теряет свой традиционный смысл. Кроме того, при формулировке задач в виде интегро–дифференциальных уравнений движения объектов переменной длины необходимо учитывать влияние возмущений, вызванных неинтегрируемыми (неголономными) граничными условиями.

Интегро–дифференциальные уравнения для задач с интегрируемыми граничными условиями могут быть получены путем непосредственного интегрирования соответствующих дифференциальных уравнений. В случае

задач с неинтегрируемыми граничными условиями интегро–дифференциальные уравнения получаются через интегрирование дифференциальных уравнений с последующим переходом к новой переменной

Рассмотрим на примерах процесс построения интегро–дифференциальных уравнений для задач с интегрируемыми граничными условиями

2.1. Интегро–дифференциальное уравнение поперечных колебаний струны переменной длины

Рассмотрим случай, когда натяжение струны T в процессе изменения ее длины остается постоянным.

Изменение длины происходит за счет перемещения одной из опор в соответствии с заданным законом $l = l(t)$. Уравнение колебаний струны имеет вид

$$\rho \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \varphi(x, t), \quad (2.1)$$

Граничные условия на закрепленных концах

$$U(0, t) = 0; U(l(t), t) = 0. \quad (2.2)$$

Начальные условия

$$U(x, 0) = \varphi_1(x); \frac{\partial U(x, 0)}{\partial t} = \varphi_2(x). \quad (2.3)$$

Здесь $U(x, t)$ – поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t ; $\rho(s)$ – переменная (в общем случае) линейная плотность массы струны; T – сила натяжения струны; $\varphi(x, t)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ – заданные функции класса C^2 .

Интегрируя уравнение (2.1) дважды по x , получим

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \int_0^x \left[\rho(s) \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \varphi(s,t) \right] \frac{1}{T} ds,$$

$$U(x,t) - U(0,t) - x \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = \int_0^x \frac{x-s}{T} \left[\rho(s) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} - \varphi(s,t) \right] ds. \quad (2.4)$$

Для исключения из (2.4) неизвестного граничного условия распространим интегрирование в (2.4) от 0 до $l(t)$ с учетом граничных условий (2.2):

$$l(t) \frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = - \int_0^{l(t)} \frac{l(t)-s}{T} \left[\rho(s) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} - \varphi(s,t) \right] ds. \quad (2.5)$$

Подставляя из (2.5) в (2.4), получим интегро-дифференциальное уравнение

$$U(x,t) = \int_0^x \frac{x-s}{T} \left[\rho(s) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} - \varphi(s,t) \right] ds -$$

$$- \frac{1}{l(t)} \int_0^{l(t)} \frac{l(t)-s}{T} \left[\rho(s) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} - \varphi(s,t) \right] ds. \quad (2.6)$$

Разделяя интеграл $\int_0^{l(t)}$ на сумму $\int_0^x + \int_x^{l(t)}$, после элементарных

преобразований получим

$$U(x,t) = - \int_0^{l(t)} K(x,s,l(t)) \rho(s) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} ds + \int_0^{l(t)} K(x,s,l(t)) \varphi(s,t) ds, \quad (2.7)$$

где через $K(x,s,l(t))$ обозначено ядро уравнения

$$K(x,s,l(t)) = \begin{cases} \frac{l(t)-x}{Tl(t)} s, & s \leq x, \\ \frac{l(t)-s}{Tl(t)} x, & s \geq x. \end{cases} \quad (2.8)$$

Здесь $K(x,s,l(t))$ – симметричная относительно x и s функция. Кроме того, $K(x,s,l(t))$, оставаясь симметричной, зависит от времени через параметр $l(t)$, представляющий переменную длину струны. По своей структуре интегро-дифференциальное уравнение (2.7) в данном простейшем случае совпадает с соответствующим уравнением колебаний струны постоянной длины. Однако

это сходство является лишь формальным, поскольку в уравнении (2.7) ядро и пределы интегрирования представляют собой функции, зависящие от времени.

При фиксированной длине $l = const$ после разделения переменных по формуле $U(x,t) = \varphi(x) \cos \lambda t$ однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (2.7), переходит в классическое уравнение Фредгольма II рода:

$$\varphi(x) = \lambda^2 \int_0^l K(x,s,l) \rho(s) \varphi(s) ds.$$

Сходство полученного уравнения (2.7) с классическим может быть использовано для разработки приближенных методов исследования поставленной задачи.

Существует также альтернативный подход к выводу интегро–дифференциального уравнения (2.7) для поперечных колебаний струны переменной длины. В качестве ядра интегро–дифференциального уравнения выберем функцию (2.8), симметричную относительно своих аргументов x и s , которая при фиксированном значении $l(t)$ совпадает с функцией влияния прогибов струны постоянной длины, закрепленной на концах.

Умножим уравнение (2.1) на $K(x,s,l(t))ds$ и проинтегрируем от 0 до $l(t)$ по s

$$\int_0^{l(t)} \rho \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial t^2} K(x,s,l(t)) ds - \int_0^{l(t)} K(x,s,l(t)) \varphi(s,t) ds = T \int_0^{l(t)} K(x,s,l(t)) \frac{\partial^2 U(s,t)}{\partial s^2} ds.$$

Выполняя интегрирование по частям в правой части данного уравнения с учетом выражения для $K(x,s,l(t))ds$ (2.8) и граничных условий (2.2) получим интегро–дифференциальное уравнение (2.7).

2.2. Интегро–дифференциальное уравнение колебаний консольной балки переменной длины

Предположим, что изменение длины упругой консольной балки происходит за счет перемещения опоры, препятствующей поворотам поперечных сечений.

Дифференциальное уравнение колебаний и граничные условия для рассматриваемой балки переменной длины, один конец которой жестко закреплен, а другой свободен, имеют вид

$$\rho \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 V}{\partial x^4} = \varphi(x, t), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial^3 V(0, t)}{\partial x^3} = 0; \quad \frac{\partial^2 V(0, t)}{\partial x^2} = 0; \quad \frac{\partial V(l(t), t)}{\partial x} = 0; \quad V(l(t), t) = 0. \quad (2.10)$$

Здесь $V(x, t)$ – поперечное смещение точки балки с координатой x в момент времени t ; E – модуль упругости материала балки; I – осевой момент инерции сечения балки; $\rho(s)$ – переменная (в общем случае) линейная плотность массы балки; $\varphi(x, t)$ – заданная функция класса C .

Начальные условия для функции $V(x, t)$ определяются в виде (2.3).

Интегрируя уравнение (2.9) четырежды по x и освобождаясь от граничных значений функции $V(x, t)$, по аналогии с (2.5) получим интегро–дифференциальное уравнение поперечных колебаний консоли переменной длины в виде (2.7):

$$V(x, t) = - \int_0^{l(t)} K(x, s, l(t)) \left(\rho(s) \frac{\partial^2 V(s, t)}{\partial t^2} - \varphi(s, t) \right) ds. \quad (2.11)$$

Ядро уравнения (2.11) в рассматриваемом случае будет определяться функцией

$$K(x, s, l(t)) = \begin{cases} \frac{(l(t) - x)^2}{EI} \left(\frac{l(t) - x}{3} + \frac{x - s}{2} \right), & s \leq x, \\ \frac{(l(t) - s)^2}{EI} \left(\frac{l(t) - s}{3} + \frac{s - x}{2} \right), & s \geq x. \end{cases} \quad (2.12)$$

Функция (2.12) также симметрична относительно аргументов x и s и зависит от времени через содержащийся в ней параметр $l(t)$. При фиксированном значении $l(t)$ функция (2.12) совпадает с функцией влияния прогибов консольной балки постоянной длины.

Таким образом, и в этом случае задача сводится к интегро–дифференциальному уравнению с симметричным ядром, изменяющимся во времени, и пределами интегрирования, зависящими от времени.

2.3. Эквивалентность формулировок задачи динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах

Эквивалентность формулировок задач динамики, представленных в виде дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений для объектов постоянных размеров с классическими граничными условиями, доказывается в рамках курса математической физики. Для объектов переменной длины можно сформулировать следующую теорему, устанавливающую эквивалентность таких формулировок.

Теорема 2.1. При заданных начальных условиях (2.3) всякое решение интегро–дифференциального уравнения (2.7) одновременно является решением дифференциального уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) в области $(0; l(t))$, изменяющейся во времени.

Верно и обратное. Всякое решение дифференциального уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) в области $(0; l(t))$, изменяющейся во времени,

при начальных условиях (2.3) будет также решением интегро-дифференциального уравнения (2.7).

Доказательство. Предположим, что функция $\bar{U}(x, t)$ является решением уравнения (2.1), удовлетворяющим граничным условиям (2.2) и начальным условиям (2.3) в области $(0; l(t))$

Повторяя те же преобразования (2.4)–(2.6), что и при выводе уравнения (2.7), относительно тождества

$$\rho \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 \bar{U}}{\partial x^2} \equiv \varphi(x, t),$$

придем к тождеству

$$\bar{U}(x, t) \equiv - \int_0^{l(t)} K(x, s, l(t)) \rho(s) \frac{\partial^2 \bar{U}(s, t)}{\partial t^2} ds + \int_0^{l(t)} K(x, s, l(t)) \varphi(s, t) ds.$$

Таким образом, решение дифференциального уравнения одновременно является и решением интегро-дифференциального уравнения

Доказательство обратного утверждения проведем методом от противного. Предположим, что функция $U_0(x, t)$, являясь решением интегро-дифференциального уравнения (2.7) при начальных условиях (2.3), не является решением дифференциального уравнения (2.1) с граничными условиями (2.2) при начальных условиях (2.3) в области $(0; l(t))$, изменяющейся во времени, т. е.

$$\rho \frac{\partial^2 U_0}{\partial t^2} - T \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} \neq \varphi(x, t). \quad (2.13)$$

Нетрудно убедиться, что функция $U_0(x, t)$, являясь решением интегро-дифференциального уравнения (2.7), удовлетворяет граничным условиям (2.2). Следовательно, применяя к неравенству (2.13) те же преобразования (2.4) – (2.6), что и при выводе уравнения (2.7), мы придем к неравенству

$$U_0(x, t) \neq - \int_0^{l(t)} K(x, s, l(t)) \rho(s) \frac{\partial^2 U_0(s, t)}{\partial t^2} ds + \int_0^{l(t)} K(x, s, l(t)) \varphi(s, t) ds. \quad (2.14)$$

Однако неравенство (2.14) противоречит предположению о том, что функция $U_0(x, t)$ является решением интегро–дифференциального уравнения (2.7). Данное противоречие доказывает ошибочность допущения (2.13). \square

Таким образом, при построении интегро–дифференциального уравнения методом, описанным в разделе 2.1, не происходит потери или возникновения дополнительных решений. Это подтверждает эквивалентность формулировок задачи динамики струны переменной длины, представленных в виде дифференциальных и интегро–дифференциальных уравнений.

Аналогичным образом можно доказать эквивалентность постановок в дифференциальной и интегро–дифференциальной форме для случая колебаний консольной балки переменной длины, используя подход, описанный в разделе 2.2.

2.4. Оценка скорости изменения длины объектов с движущимися границами

В исследованиях задач динамики объектов переменной длины важное значение имеют оценки относительной скорости изменения длины. Поэтому, прежде чем перейти к разработке методов исследования, необходимо установить оценки скоростей изменения длины объектов.

В исследовании Ю.А. Митропольского [202] подчеркивается, что при изучении нестационарных процессов в системах, где параметры изменяются во времени, необходимо оценивать, насколько медленно происходят эти изменения по сравнению с характерным временным масштабом системы. В частности, важно сравнить скорость изменения параметров с периодом собственных колебаний системы. Чтобы оценить степень «медленности» изменения размеров объектов, которые могут варьироваться, целесообразно перейти к безразмерным величинам.

Будем считать, что функция $l(t)$ является функцией медленного времени $\tau_1 = \varepsilon t$, $l = l(\tau_1)$, т.е. является функцией времени производная которой по времени $\frac{dl(\tau_1)}{dt} = \varepsilon \frac{dl(\tau_1)}{d\tau_1}$ пропорциональна некоторому малому параметру ε .

В подъемных установках условие медленного изменения параметров уравнения обычно соблюдается. Для определения значения параметра ε , можно, например, в исследуемом уравнении перейти к безразмерным переменным, как это будет сделано в главах 3–7. В качестве естественных безразмерных переменных можно взять

$$\xi = \frac{x}{L_0}; \quad \tau = \omega_0 t \quad (2.15)$$

где L_0 – максимальная длина объекта; ω_0 – частота колебаний на основной динамической моде.

Тогда на участке равномерного подъема $l(t) = L_0 - v_0 t$ (v_0 – скорость перемещения границы объекта), в безразмерных переменных (2.15) величина $l(t)$ будет соответствовать

$$l(\tau) = 1 - \frac{v_0}{\omega_0 L_0} \tau,$$

производная по безразмерному времени

$$\frac{dl(\tau)}{d\tau} = -\frac{v_0}{\omega_0 L_0}.$$

В качестве малого параметра можно использовать безразмерную величину $\varepsilon = \frac{v_0}{\omega_0 L_0}$, которая характеризует относительное изменение длины системы за один период ее собственных колебаний, а в качестве медленного времени величину $\tau_1 = \varepsilon \tau$. Следовательно $l(\tau) = 1 - \varepsilon \tau$.

Параметр ε определяется из физических условий задачи в каждом конкретном случае.

Например, если параметры подъемной установки имеют следующие значения: глубина $L_0 = 250$ м., $v_0 = 10$ м/с. – скорость перемещения границы

объекта, $\omega_0 = 2c^{-1}$ – частота колебаний на основной динамической моде исследуемого объекта в начальный момент времени, значение малого параметра будет $\varepsilon = 0,02$.

Для грузоподъемной установки по определению динамических усилий в канате с параметрами $v_0 = 15 \text{ м/с}$, $ES = 20 \cdot 10^6 \text{ н}$. (S – площадь поперечного сечения каната), массой груза $M = 30 \cdot 10^3 \text{ кг}$, длиной колеблющейся части $50 \text{ м} < L_0 - l(\tau) < 1500 \text{ м}$, при каждом фиксированном значении $l(\tau)$ вычисляется значение параметра ε . В данном примере эти значения располагаются в интервале

$$0,01 < \varepsilon < 0,03.$$

Параметр ε остается малым и при более высоких скоростях изменения длины. Например, при $v_0 = 100 \text{ м/с}$, в рассмотренном выше примере ε будет находиться в пределах

$$0,03 < \varepsilon < 0,17.$$

Пусть ω_{0n} – частота колебаний на n -ой динамической моде объекта переменной длины. Поскольку

$$\frac{v_0}{\omega_{0n} L_0} < \frac{v_0}{\omega_0 L_0} = \varepsilon,$$

то оценка медленности изменения параметров, основанная на сравнении с частотой основной моды колебаний, будет выполняться еще более строго, если за единицу времени принять период колебаний объекта переменной длины на n -й динамической моде.

С другой стороны, выбранный таким образом малый параметр во многих задачах представляет собой отношение скорости изменения длины объекта к скорости распространения упругой волны в этом объекте. Например, для стержня или струны

$$\varepsilon = \frac{v_0}{c}, \quad (2.16)$$

где $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho}}$ – скорость распространения упругой волны вдоль стержня,

$c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$ – скорость распространения поперечной волны вдоль струны.

При постоянной скорости изменения длины объекта $v_0 = const$, величина параметра ε определяет медленность изменения длины. При равноускоренном изменении длины $l(t) = L_0 - v_0 t - \frac{at^2}{2}$, в безразмерных переменных будем иметь

$$\frac{dl(\tau)}{d\tau} = -\frac{v_0}{\omega_0 L_0} \left(1 + \frac{a\tau}{\omega_0 v_0} \right) = \varepsilon \left(1 + \frac{a}{\omega_0 v_0} \tau \right), \quad (2.17)$$

и в этом случае производная пропорциональна параметру ε .

Будем рассматривать медленно изменяющиеся функции как функции $\varepsilon\tau$, которые меняются незначительно за характерный временной промежуток, связанный с динамикой системы. В случаях, когда малый параметр $\varepsilon \ll 1$, изменение длины объекта считается медленным. Это означает, что скорость изменения длины объекта значительно меньше характерных скоростей процессов в системе, таких как скорость распространения упругих волн или частота собственных колебаний. Напротив, если параметр ε соизмерим с единицей, изменение длины объекта считается быстрым, и такие изменения могут существенно влиять на динамику системы. Как было показано на конкретных примерах для различных технических устройств, использующих элементы переменной длины (например, подъемные установки), условие медленного изменения длины обычно выполняется при нормальных режимах их работы. В подъемных системах изменения длины канатов или тросов происходят плавно и постепенно, что позволяет считать эти процессы медленными по сравнению с динамическими характеристиками системы, такими как период собственных колебаний или время распространения упругих возмущений.

В данной работе рассматриваются задачи, в которых изменение длины объектов происходит в соответствии с условиями медленности. Все оценки медленности изменения параметров строятся в окрестности некоторой фиксированной длины объекта $L_0 - l(\tau) = const$, а сами значения параметра ε получаются при этом постоянными.

Аналогичным способом можно было бы создать переменные оценки медленности, осуществив переход к безразмерным переменным

$$\xi_1 = \frac{x}{L_0 - l(t)}; \quad \tau_1 = \int_0^t \omega_0(l(t)) dt,$$

где $\omega_0(l(t))$ – переменная частота основной моды колебаний объекта.

Величину ε при этом можно представить соотношением

$$\varepsilon(l(t)) = \frac{v_0}{\omega_0(l(t))(L_0 - l(t))},$$

а медленное время ввести по формуле

$$\tau_1 = \int_0^t \varepsilon(l(t)) dt.$$

Однако в таком случае вид уравнений движения, записанных в безразмерных переменных, может стать значительно более сложным. Чтобы избежать этих усложнений, будем использовать для оценки медленности изменения длины объекта соотношения вида (2.15).

2.5. Оценка близости интегро–дифференциального уравнения динамики объектов переменной длины к соответствующим интегро– дифференциальным уравнениям с фиксированными параметрами

Используя введенную в пункте 2.4 оценку медленности изменения длины (12.16), определим временной интервал, в течение которого интегро–

дифференциальные уравнения движения объектов с переменной длиной отличаются от соответствующих уравнений с постоянными параметрами длины $l(\tau)$ на величину, пропорциональную параметру ε .

Рассмотрим уравнение движения объектов переменной длины, записанное в безразмерных переменных:

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\tau)} K(\xi, \zeta, l(\tau)) [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta. \quad (2.18)$$

В уравнении (2.18) при использовании безразмерных переменных для упрощения записи индексы опущены. При выполнении условий медленного изменения параметров, которые выражены соответствующим неравенством $\varepsilon \ll 1$, а также при ограниченности производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$, относительно этого уравнения может быть сформулирована следующая теорема

Теорема 2.2. На временном интервале $\Delta\tau$, сопоставимом с единицей, уравнение колебаний объекта с постоянным параметром $l = l(\tau_0)$ отличается от соответствующего уравнения для объекта с изменяющимся параметром $l = l(\tau)$ членами, пропорциональными множителю ε .

Доказательство. Рассмотрим разложение правой части уравнения (2.18) в ряд Тейлора относительно параметра $l(\tau)$ в окрестности определенного значения безразмерной длины $l(\tau_0)$. Это разложение выполняется с учетом того, что уравнение (2.18) представлено в безразмерной форме.

Полагая

$$l(\tau_0 + \Delta\tau) = l(\tau_0) + \Delta l(\tau) + \dots$$

получим

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta - \\ & - \Delta l(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [\rho(l(\tau_0)) V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \varphi(l(\tau_0), \tau)] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta \Big\} - \\
& - \frac{(\Delta l(\tau))^2}{2!} \left[\frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right].
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Дифференциал длины объекта $\Delta l(\tau)$ в соответствии с правилом дифференцирования функции медленного времени (п.2.4) вычисляется по формуле $\Delta l(\tau_1) = \varepsilon \frac{dl(\tau_1)}{d\tau_1} \Delta \tau$.

Выберем интервал времени $\Delta \tau$ в виде

$$\Delta \tau = \theta(\tau), \tag{2.20}$$

где $\theta(\tau)$ – некоторая функция порядка единицы.

Подставляя (2.20) в (2.19), найдем, что в интервале времени $\Delta \tau$, имеющем порядок единицы, разложение (2.19) имеет вид

$$\begin{aligned}
V(\xi, \tau) = & - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta - \\
& - \varepsilon l'(\tau) \theta(\tau) \left\{ K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0)) [\rho(l(\tau_0)) V_{\tau\tau}(l(\tau_0), \tau) - \varphi(l(\tau_0), \tau)] + \right. \\
& + \left. \int_0^{l(\tau_0)} \frac{\partial K(\xi, \zeta, l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta \right\} - \\
& - \varepsilon^2 l'^2(\tau) \frac{\theta(\tau)}{2!} \left[\frac{\partial K(\xi, l(\tau_0), l(\tau_0))}{\partial l(\tau)} \dots \right].
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Учитывая условие теоремы, которое предполагает ограниченность производной ядра $K(x, s, l)$ по параметру $l(\tau)$, и сравнивая уравнения (2.21) и (2.18), можно сделать вывод, что уравнение с постоянным параметром $l = l(\tau_0) = const$

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\tau_0)} K(\xi, \zeta, l(\tau_0)) [\rho(\zeta) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau)] d\zeta$$

отличается от уравнения с переменным параметром $l(\tau)$ в интервале $\Delta \tau \sim 1$ членами, пропорциональными параметру ε . Тем самым теорема доказана. \square

Согласно теореме, интегро–дифференциальные уравнения, описывающие колебания систем постоянной и переменной длины, близки между собой в некотором временном промежутке $\Delta\tau$, соизмеримом с единицей

Поскольку в безразмерных переменных период собственных колебаний на основной моде пропорционален единице, физический смысл приведенной выше теоремы заключается в том, что уравнение движения объекта переменной длины в течение временного интервала, сравнимого с периодом колебаний, изменяется незначительно.

Учитывая установленную близость уравнений, форма решений для объектов переменной длины будет близкой к форме решений для объектов постоянной длины. В частности, по аналогии с известным методом разложения интегро–дифференциальных уравнений в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, интегро–дифференциальное уравнение, описывающее динамику объектов с переменной длиной, также может быть представлено в виде бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

2.6. Разложение интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассмотрим разложение интегро–дифференциального уравнения, описывающего движение объектов переменной длины, в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Для этого представим искомую функцию в виде ряда по формально построенным «собственным функциям» соответствующего интегрального уравнения, содержащего $l(\tau)$ как параметр. Обоснование справедливости такого разложения будет приведено в разделе 2.7.

Рассмотрим интегро–дифференциальное уравнение (2.11) для задачи с интегрируемыми граничными условиями. Предположим, что все необходимые преобразования к безразмерным переменным уже выполнены в соответствии с методикой, изложенной в разделе 2.4. Представим решение этого уравнения в виде ряда

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, l(\varepsilon\tau)), \quad (2.22)$$

где $X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))$ – координатные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X(\xi, l(\varepsilon\tau)) = \omega_0^2(l(\varepsilon\tau)) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\zeta) X(\zeta, l(\varepsilon\tau)) d\zeta, \quad (2.23)$$

содержащего $l(\varepsilon\tau)$ как параметр; $f_n(\tau)$ в уравнении (2.22) — обобщенные координаты, искомые функции.

Рассматривая $l(\varepsilon\tau)$ в уравнениях (2.22) и (2.23) формально как параметр, разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))$ [51, 95, 227, 236]:

$$K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k(\xi, l(\varepsilon\tau)) X_k(\zeta, l(\varepsilon\tau))}{\omega_{0k}^2(l(\varepsilon\tau))}, \quad (2.24)$$

где $\omega_{0k}^2(l(\varepsilon\tau))$ – «собственные числа», определяемые по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0k}^2(l(\varepsilon\tau))} = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) X_n(\xi, l(\varepsilon\tau)) X_k(\zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\xi) \rho(\zeta) d\xi d\zeta$$

$(k = 1, 2, 3, \dots)$.

Продифференцируем ряд (2.22) по времени, принимая во внимание правило дифференцирования функций «медленного времени»:

$$\frac{\partial V(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n'(\tau) X_n(\xi, l(\varepsilon\tau)) + \varepsilon l'(\varepsilon\tau) f_n(\tau) \frac{\partial X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l} \right].$$

После повторного дифференцирования найдем вторую производную ряда (2.22) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^2(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = & \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n''(\tau) X_n(\xi, l(\varepsilon\tau)) + 2\varepsilon l'(\varepsilon\tau) f_n'(\tau) \frac{\partial X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l} + \right. \\ & \left. + \varepsilon^2 \left[l'^2(\varepsilon\tau) \frac{\partial^2 X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l^2} + l''(\varepsilon\tau) \frac{\partial X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l} \right] f_n(\tau) \right]. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Подставляя ряды (2.22), (2.24) и (2.25) в уравнение (2.11) и применяя условие ортогональности функций $X_n(\xi, l(\varepsilon\tau))$ с весом $g(\xi)$, получим бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами в виде

$$\begin{aligned} A_k(l(\varepsilon\tau)) f_k''(\tau) + 2\varepsilon l'(\varepsilon\tau) A_{kk}(l(\varepsilon\tau)) f_k'(\tau) + A_k(l(\varepsilon\tau)) \omega_{0k}^2(l(\varepsilon\tau)) f_k(\tau) = & \theta_k(\tau) - \\ - 2\varepsilon l'(\varepsilon\tau) \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} A_{ik}(l(\varepsilon\tau)) f_i'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[l'^2(\varepsilon\tau) A'_{ik}(l(\varepsilon\tau)) + l''(\varepsilon\tau) A_{ik}(l(\varepsilon\tau)) \right] f_i(\tau), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A_k(l(\varepsilon\tau)) &= \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_k^2(\xi, l(\varepsilon\tau)) g(\xi) d\xi; \\ A_{ik}(l(\varepsilon\tau)) &= \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_i(\xi, l(\varepsilon\tau)) \frac{\partial X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l(\varepsilon\tau)} g(\xi) d\xi; \\ A'_{ik}(l(\varepsilon\tau)) &= \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_i(\xi, l(\varepsilon\tau)) \frac{\partial^2 X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))}{\partial l^2(\varepsilon\tau)} g(\xi) d\xi; \\ \theta_k(\tau) &= \int_0^{l(\varepsilon\tau)} \varphi(\zeta, \tau) X_k(\zeta, l(\varepsilon\tau)) g(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Тождество

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_i(\xi, l(\varepsilon\tau)) X_k(\xi, l(\varepsilon\tau)) g(\xi) d\xi \equiv 0, \quad i \neq k \quad (2.27)$$

вытекает из условия ортогональности функций $X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))$ в интервале $(0, l(\varepsilon\tau))$, являющихся решением уравнения (2.23). Дифференцируя тождество (2.27) по $l(\varepsilon\tau)$, получим

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} \left(\frac{\partial X_k}{\partial l} X_i + X_k \frac{\partial X_i}{\partial l} \right) g(\xi) d\xi = -X_i(l(\varepsilon\tau), l(\varepsilon\tau)) X_k(l(\varepsilon\tau), l(\varepsilon\tau)) g(l(\varepsilon\tau)).$$

В тех задачах, для которых выполняется граничное условие

$$X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))\Big|_{\xi=l(\varepsilon\tau)} = 0,$$

будет иметь место тождество

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} \frac{\partial X_k}{\partial l} X_i g(\xi) d\xi = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} \frac{\partial X_i}{\partial l} X_k g(\xi) d\xi,$$

т.е. матрица из элементов $A_{ik}(l(\varepsilon\tau))$ в уравнениях (2.26) будет кососимметричной.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.26) в первом приближении при малом параметре $\varepsilon = 0$ представляет собой линейную диагональную систему с медленно изменяющимися переменными коэффициентами. Коэффициенты, отвечающие за взаимовлияние между отдельными уравнениями, входят в систему (2.26) с малым параметром. Подобная квазидиагональная система обыкновенных дифференциальных уравнений может быть также построена также для интегро-дифференциальных уравнений, соответствующих задаче с неинтегрируемыми граничными условиями.

Начальные условия для функций $f_n(\tau)$, которые определяются путем решения системы (2.26), находятся из начальных условий (2.3) как решения уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) X_k(\xi, l(0)) &= \varphi_1(\xi); \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k'(0) X_k(\xi, l(0)) + \varepsilon l'(0) f_k(0) \frac{\partial X_k(\xi, l(0))}{\partial l} \right] &= \varphi_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Если в начальный момент движения скорость изменения длины объекта $l'(0)$ равна нулю, то из (2.28) получим формулы

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(0) X_k(\xi, l(0)) &= \varphi_1(\xi); \\ \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(0) X_k(\xi, l(0)) &= \varphi_2(\xi). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Принимая во внимание, что $X_k(\xi, l(\varepsilon\tau))$ образуют ортогональную с весом $g(\xi)$ систему нормированных функций, из (2.29) получим для функций $f_k(0)$ и $f'_k(0)$ следующие выражения:

$$\begin{aligned} f_k(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_k(\xi, l(0)) \varphi_1(\xi) g(\xi) d\xi; \\ f'_k(0) &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_k(\xi, l(0)) \varphi_2(\xi) g(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Из (2.30) следует, что $f_k(0)$ и $f'_k(0)$ являются коэффициентами разложения в ряд Фурье по функциям $X_k(\xi, l(0))$ начальных условий (2.3).

Вопрос о сходимости дифференцированного ряда (2.25), а значит, и о представлении решения в форме (2.22), по крайней мере для моментов времени, близких к начальному, может быть решен на основе анализа скорости сходимости разложений (2.29), т. е. быстроты убывания коэффициентов $f_k(0)$ и $f'_k(0)$. Из теории рядов Фурье [238] известно, что порядок убывания коэффициентов разложения зависит от степени гладкости функций, разлагаемых в ряды. Таким образом, если функции $f_k(0)$ и $f'_k(0)$, задающие начальные условия, являются достаточно гладкими, то вопрос о возможности представления решения в форме (2.22) решается положительно.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (2.26), построенная на основе разложения интегро–дифференциального уравнения, описывающего движение объекта переменной длины, содержит переменные коэффициенты и начальные условия (2.3) и может быть положена в основу для приближенного исследования задачи о колебаниях объекта с движущейся границей.

2.7. Определение «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования

Решение линейного уравнения в частных производных или интегро–дифференциального уравнения может быть выражено через разложение по собственным функциям рассматриваемого уравнения или по другой полной системе ортогональных функций, удовлетворяющих граничным условиям. В первом случае обобщенные координаты определяются из диагональной системы уравнений канонического вида, что упрощает вид решений. Во втором случае обобщенные координаты находятся из недиагональной бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, что усложняет задачу. Система (2.26), построенная по собственным функциям интегрального уравнения (2.23), не является строго диагональной. Это означает, что выбранные таким образом функции не являются собственными функциями задачи в том смысле, как это принято в классической теории краевых задач.

Для уравнений с переменными пределами интегрирования и ядрами, зависящими от времени, понятия «собственных функций» и «собственных чисел» в общепринятом смысле не определены. Тем не менее, по аналогии с классическими случаями понятий собственных функций объектов постоянной длины, можно ввести понятия «собственных функций» и для объектов переменной длины, задав соответствующим образом их свойства.

В задачах динамики объектов переменной длины «собственными функциями» будем называть систему функций, зависящих от геометрической координаты ξ , содержащих параметр длины объекта $l(\varepsilon\tau)$ и обладающих следующими свойствами: 1) «собственные функции» удовлетворяют граничным условиям задачи в области, ограниченной изменяющимися во времени границами, и образуют ортогональную систему с весом $g(\xi)$; 2) при

фиксированных границах области эти функции переходят в собственные функции соответствующей краевой задачи для объекта постоянной длины; 3) от всякой другой системы ортогональных функций система «собственных функций» отличается тем, что построенная на их основе бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений типа (2.26) для определения обобщенных координат наименее отличается от диагональной формы.

Под выражением «наименее отличается от диагональной» понимается, что система (2.26) содержит минимальное количество недиагональных членов и их значений, определяющих взаимную зависимость уравнений системы (2.26).

Для нахождения «собственных функций» в задачах динамики объектов переменной длины, соответствующих приведенному определению, зафиксируем в однородном интегро–дифференциальном уравнении, соответствующем неоднородному уравнению (2.11),

$$V(\xi, \tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\zeta) \frac{\partial^2 V(\zeta, \tau)}{\partial \tau^2} d\zeta, \quad (2.31)$$

длину $l(\varepsilon\tau)$ и будем рассматривать ее как параметр. Затем выполним формальное разделение переменных, представив решение этого уравнения в виде произведения двух функций

$$V(\xi, \tau) = X(\xi, l(\varepsilon\tau)) \cos \int_0^\tau \omega_0(l) d\tau. \quad (2.32)$$

После разделения переменных в уравнении (2.31) получим однородное интегральное уравнение Фредгольма II рода с симметричным ядром

$$X(\xi, l(\varepsilon\tau)) = \omega_0^2(l(\varepsilon\tau)) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, l(\varepsilon\tau)) \rho(\zeta) X(\zeta, l(\varepsilon\tau)) d\zeta, \quad (2.33)$$

содержащее $l(\varepsilon\tau)$ как параметр.

Собственные функции, полученные формально из интегрального уравнения (2.33), содержащего $l(\varepsilon\tau)$ как параметр, образуют систему

«собственных функций» для интегро–дифференциального уравнения (2.31) [51, 227].

2.8. Выводы по второй главе

1. Для сложных динамических систем, таких как объекты переменной длины под действием подвижных нагрузок, систем с сосредоточенными массами и др., методы интегро–дифференциальных уравнений оказываются более эффективными, чем методы классических дифференциальных уравнений. Они позволяют учесть влияние неинтегрируемых граничных условий и изменяющихся во времени параметров, что особенно важно при моделировании колебаний нитей, струн, балок и других механических систем с движущимися границами. Построенные интегро–дифференциальные уравнения для задач с интегрируемыми граничными условиями, в частности для поперечных колебаний струны переменной длины и колебаний консольной балки с изменяющейся границей, создают принципиально новый математический инструментарий для анализа динамики механических систем с изменяющейся геометрией.

2. Установленная эквивалентность постановок задач динамики объектов переменной длины в форме дифференциальных уравнений и интегро–дифференциальных уравнений позволяет обоснованно выбирать наиболее эффективный математический аппарат для конкретных задач, обеспечивая при этом корректность получаемых решений.

3. Разработанные критерии оценки скорости изменения длины объектов с движущимися границами дают возможность эффективно исследовать динамику объектов переменной длины, особенно в случаях медленного изменения параметров. Установлено, что для технических устройств, в которых используются элементы с переменной длиной, условие медленного изменения длины выполняется при нормальных режимах их эксплуатации.

4. Установленная оценка близости интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины обосновывает применение упрощенных расчетных схем при анализе динамики объектов с медленно меняющейся геометрией, что существенно сокращает вычислительные затраты.

5. Разработанная процедура разложения интегро–дифференциальных уравнений движения объектов переменной длины в бесконечную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами открывает новые возможности для численного моделирования, создания эффективных вычислительных алгоритмов, а также для анализа взаимного влияния различных форм колебаний.

6. Введенное обобщение понятий «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования, позволяет сохранить преимущества модального анализа при исследовании систем с переменной геометрией, обеспечивая физическую интерпретируемость результатов, вычислительную эффективность, преемственность с классическими методами.

Глава 3

Приближенные и аналитические методы решения краевых задач с движущимися границами

Задача, описывающая колебательные процессы объектов с движущимися границами, сформулированная в виде дифференциального уравнения с граничными и начальными условиями, представляет собой обобщение классической задачи гиперболического типа. Для упрощения процедуры построения решения и обоснования выбора его аналитической формы осуществляется переход к эквивалентным интегро–дифференциальным уравнениям, содержащим симметричные ядра, зависящие от временной переменной, а также изменяющиеся пределы интегрирования. Методология построения решений таких уравнений основывается на непосредственном интегрировании исходных дифференциальных уравнений в сочетании с применением стандартной замены искомой функции новой переменной. Интегральная форма представления уравнений движения объектов переменной длины позволяет определить структуру их решений и разработать универсальные алгоритмы для их построения.

В рамках настоящей работы предложенный метод был расширен на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих такие параметры, как изгибная жесткость колеблющегося объекта [101, 108–110, 261], сопротивление внешней среды [119, 129], а также жесткость подложки [39, 119, 129, 166, 258]. Особый акцент сделан на анализе наиболее распространенного в практических приложениях случая, при котором внешние возмущения действуют на границах.

При условии постоянной длины объекта сформулированные интегро–дифференциальные уравнения редуцируются к классическим уравнениям Фредгольма II рода.

С помощью асимптотического метода получено общее решение однородного интегро–дифференциального уравнения движения объектов переменной длины в первом приближении.

Численно–аналитический метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений развивается применительно к новым различного рода граничным условиям.

Приближенный метод Канторовича–Галеркина распространен на более широкий класс модельных краевых задач при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием.

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [6, 8, 13, 14, 115–133, 139–142, 154, 159–177, 182–196].

3.1. Приближенный метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений движения механических объектов переменной длины

Дифференциальное уравнение движения механических объектов переменной длины имеет вид

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau). \quad (3.1)$$

Граничные условия запишем в следующем виде

$$Y_{ji} \left[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau) \right] = F_{ji}(\tau); \quad (3.2)$$

$$i = \overline{1, m}; j = \overline{1, 2}.$$

Здесь $U(\xi, \tau)$ – функция смещения; L – линейный однородный дифференциальный оператор по ξ порядка $2m$ ($m \leq 2$ – целое положительное число); Y_{ji} – линейные однородные дифференциальные операторы по ξ ;

$\varphi(\xi, \tau), F_{ji}(\tau)$ – заданные функции класса C и C^2 соответственно; $\ell_j(\varepsilon\tau)$ – закон движения границ; ε – малый параметр, характеризующий медленность движения границ.

При анализе резонансных свойств начальные условия принимаются нулевыми.

Для исключения неоднородностей в граничных условиях, в уравнение (3.1) вводится новая функция

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (3.3)$$

где

$$H(\xi, \tau) = \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) F_{kr}(\tau), \quad (3.4)$$

при этом функция $D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяет уравнению

$$L[D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)] = 0 \quad (3.5)$$

и условиям

$$Y_{ji} [D_{kr}(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = \begin{cases} 1, & k = j \wedge r = i; \\ 0, & k \neq j \vee r \neq i. \end{cases} \quad (3.6)$$

При подстановке (3.3) в уравнение (3.1) с учетом (3.4), (3.5), функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau); \quad (3.7)$$

$$Y_{ji} [V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (3.8)$$

В главе 2 получено интегро–дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (3.7), (3.8), в виде

$$V(\xi, \tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) - \varphi(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta, \quad (3.9)$$

где $K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau)$ – симметричное по ξ и ζ ядро, зависящее от времени через параметр $\varepsilon\tau$.

Решение задачи (3.9) будем искать в виде ряда:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (3.10)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta, \quad (3.11)$$

где $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Собственные функции $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ удовлетворяют граничным условиям (3.8) и играют в данном случае роль динамических мод.

Используя результаты главы 2, разложим симметричное по ξ и ζ ядро в ряд по собственным функциям $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$:

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \quad (3.12)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи, определяемые по формуле

$$\frac{1}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)} = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\xi d\zeta. \quad (3.13)$$

Продифференцируем ряд (3.10) по времени:

$$V_\tau(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) \right].$$

После повторного дифференцирования получим

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ f_n''(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + 2\varepsilon X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) f_n'(\tau) + \varepsilon^2 X_{n_{\tau\tau}}(\xi, \varepsilon\tau) f_n(\tau) \right\}. \quad (3.14)$$

Подставим ряды (3.10), (3.12), (3.14) в уравнение (3.9) с учетом ортогональности функций $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[\ell_1(\varepsilon\tau); \ell_2(\varepsilon\tau)]$ с весом $g(\xi)$ и замены

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\tau),$$

где

$$Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = - \frac{\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}{\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi}.$$

Заметим, что, если разложить функцию $H(\xi, \tau)$ в ряд Фурье:

$$H(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (3.15)$$

где

$$\varphi_n(\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} H(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi;$$

здесь $g(\xi)$ – весовая функция, то замену можно произвести в более простом виде

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) - \varphi_n(\tau).$$

При возникновении резонансных явлений амплитуды всех динамических мод, за исключением резонансной, малы. В связи с этим нерезонансные члены в разложениях (3.10) и (3.14) могут быть отброшены вследствие их незначительного вклада в общую динамику системы. В результате такого упрощения получается расщепленная система обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, аналогичная системе (2.26)

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} \theta_n(\tau) = & E_n(\tau) - 2\varepsilon \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}'(\tau) - \varepsilon^2 \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau) - \\ & - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) F_{kr}(\varepsilon\tau). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Здесь:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (3.18)$$

$$\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (3.19)$$

$$\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} X_{n_{\tau\tau}}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (3.20)$$

$$\varepsilon B_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)]_\tau \cdot X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi; \quad (3.21)$$

$$\varepsilon^2 C_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} [Q_{n_{kr}}(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + D_{kr}(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} \cdot X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi;$$

$$E_n(\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi.$$

Система (3.16) с точностью до величин порядка малости ε^2 будет иметь вид

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (3.22)$$

где

$$\theta_n(\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)\varphi_n(\tau) + E_n(\tau).$$

С учетом (3.10), (3.15) решение (3.3) будет иметь вид:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (3.23)$$

Для упрощения введем в уравнение (3.22) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau), \quad (3.24)$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left[-\int_0^{\tau} \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau\right]. \quad (3.25)$$

Тогда уравнение (3.22) не будет содержать члена с $y'(\tau)$:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)] \quad (3.26)$$

Пусть

$$\varphi(\xi, \tau) = B_0(\xi) \cos W_0(\tau); \quad (3.27)$$

$$F_{ji}(\tau) = B_{ji} \cos W_{ji}(\tau); \quad j = \overline{1, 2}; \quad i = \overline{1, m}, \quad (3.28)$$

где B_{ji} – постоянные величины; $W_0(\tau), W_{ji}(\tau)$ – монотонно возрастающие функции; $B_0(\xi)$ – функция, характеризующая интенсивность распределенной нагрузки.

С учетом равенств (3.27), (3.28) выражение (3.17) примет вид

$$\frac{\theta_n(\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)} = M_{n0}(\varepsilon\tau) \cos W_0(\tau) + \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^m M_{nji}(\varepsilon\tau) \cos W_{nji}(\tau), \quad (3.29)$$

где

$$M_{n0}(\varepsilon\tau) = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} B_0(\xi) X_n(\xi, \varepsilon\tau) g(\xi) d\xi / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)];$$

$$M_{nji}(\varepsilon\tau) = \frac{-B_{ji} \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) Q_{nji}(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)}. \quad (3.30)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда выражение (3.29) имеет вид

$$\theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)] = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau), \quad (3.31)$$

где $W_n(\tau)$ – монотонно возрастающая функция.

Равенство (3.29) можно заменить равенством (3.31) в случаях, описанных в работах [8, 125, 139].

С учетом изложенного уравнение (3.26) примет вид

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W_n(\tau). \quad (3.32)$$

Решение уравнения (3.32) при нулевых начальных условиях $y(0) = 0$; $y'(0) = 0$ имеет вид [84]:

$$y_n(\tau) = \int_0^\tau \gamma_n(\tau, \zeta) M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) d\zeta, \quad (3.33)$$

где

$$\gamma_n(\tau, \zeta) = \frac{-y_{1n}(\tau) y_{2n}(\zeta) - y_{1n}(\zeta) y_{2n}(\tau)}{y_{1n}(\zeta) y'_{2n}(\zeta) - y'_{1n}(\zeta) y_{2n}(\zeta)},$$

а y_{1n}, y_{2n} – линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (3.32), т.е.

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = 0. \quad (3.34)$$

Линейно независимые решения (3.34) имеют вид [8, 125, 139]:

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \quad (3.35)$$

$$y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau). \quad (3.36)$$

Здесь функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются с точностью до величин порядка ε^2 из следующей системы уравнений, полученной при помощи асимптотического метода, рассмотренного далее в разделе 3.4:

$$\begin{cases} \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau); \\ \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\frac{a_n(\varepsilon\tau)}{2\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \cdot \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau}. \end{cases}$$

Решение этой системы с точностью до константы имеет вид

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau; \quad (3.37)$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}. \quad (3.38)$$

Так как $\omega_{0n}(\varepsilon\tau) > 0$, то из равенств (3.37), (3.38) следует, что $w_n(\tau)$ – монотонно возрастающая функция.

Возвращаясь к решению (3.33), с учетом (3.35), (3.36) получим:

$$\begin{aligned} y_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \cos w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta - \\ - a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) \int_0^\tau \frac{M_n(\varepsilon\zeta) \cos W_n(\zeta) \sin w_n(\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)} d\zeta. \end{aligned}$$

Используя известные тригонометрические тождества и учитывая соотношение (3.24), можно получить выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующей n -й динамической моде:

$$\begin{aligned} A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta + \int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n2}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.39) \end{aligned}$$

где

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{M_n(\varepsilon\zeta)}{a_n(\varepsilon\zeta) w_n'(\zeta)};$$

$$\begin{aligned}\Phi_{n1}(\zeta) &= w_n(\zeta) - W_n(\zeta); \\ \Phi_{n2}(\zeta) &= w_n(\zeta) + W_n(\zeta).\end{aligned}\quad (3.40)$$

Интегралы содержащие

$$\sin \Phi_{n1}(\zeta), \cos \Phi_{n1}(\zeta) \quad (3.41)$$

возрастают в течение всего периода, пока наблюдается резонансное явление, и вносят основной вклад в амплитуду. Пренебрегая членами, содержащими $\Phi_{n2}(\zeta)$ получим следующее выражение для амплитуды колебаний:

$$A_n^2(\tau) = \frac{1}{4} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_{n1}(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (3.42)$$

3.2. Применение метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений

Рассмотрим наиболее распространенную задачу с граничными условиями первого рода

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (3.43)$$

$$U(\ell_1(\varepsilon\tau), \tau) = F_{11}(\tau); U(\ell_2(\varepsilon\tau), \tau) = F_{21}(\tau); \quad (3.44)$$

где

$$\ell_1(0) = 0; \ell_2(0) = 1; \ell_2(\varepsilon\tau) > \ell_1(\varepsilon\tau).$$

Для исключения неоднородностей в граничных условиях введем в уравнение (3.43) новую функцию

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (3.45)$$

где $H(\xi, \tau)$ определяется выражением (3.4), при этом функции $D_{11}(\xi, \varepsilon\tau)$ и $D_{21}(\xi, \varepsilon\tau)$ (см. (3.6)) определяются следующим образом:

$$\begin{aligned}D_{11\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) &= 0; \quad D_{21\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) = 0; \\ D_{11}(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) &= 1; \quad D_{21}(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0;\end{aligned}$$

$$D_{11}(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0. \quad D_{21}(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 1.$$

Отсюда

$$D_{11}(\xi, \varepsilon\tau) = \frac{\ell_2(\varepsilon\tau) - \xi}{\ell(\varepsilon\tau)}; \quad D_{21}(\xi, \varepsilon\tau) = \frac{\xi - \ell_1(\varepsilon\tau)}{\ell(\varepsilon\tau)}, \quad (3.46)$$

где

$$\ell(\varepsilon\tau) = \ell_2(\varepsilon\tau) - \ell_1(\varepsilon\tau).$$

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = -H_{\tau\tau}(\xi, \tau); \quad (3.47)$$

$$V(\ell_1(\varepsilon\tau), \tau) = 0; \quad V(\ell_2(\varepsilon\tau), \tau) = 0. \quad (3.48)$$

В главе 2 получено интегро–дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (3.47), (3.48), в виде

$$V(\xi, \tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) [V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) + H_{\tau\tau}(\zeta, \tau)] d\zeta, \quad (3.49)$$

где ядро $K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau)$ определяется выражением (2.8).

Решение задачи (3.49) будем искать в виде ряда:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (3.50)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции, в качестве которых выбраны формально построенные решения интегрального уравнения

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta. \quad (3.51)$$

$$X_n(\ell_1(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0; \quad X_n(\ell_2(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0.$$

Решая данную задачу, получим

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin \frac{\pi n [\xi - \ell_1(\varepsilon\tau)]}{\ell(\varepsilon\tau)}, \quad \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{\ell(\varepsilon\tau)}.$$

Следуя методике, описанной в разделе 3.1, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) \mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) \mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (3.52)$$

где

$$\theta_n(\tau) = -\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau) \sum_{k=1}^2 \sum_{r=1}^m Q_{nkr}(\varepsilon\tau)F_{kr}(\varepsilon\tau).$$

Вычисляя для данной задачи функции A_{0n} , A_{1n} , εA_{2n} , Q_{n11} , Q_{n21} , получим

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{\ell(\varepsilon\tau)}, \quad A_{1n}(\varepsilon\tau) = \ell(\varepsilon\tau)/2; \quad \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \varepsilon\ell'(\varepsilon\tau)/4;$$

$$Q_{n11}(\varepsilon\tau) = -2/(\pi n); \quad Q_{n21}(\varepsilon\tau) = 2(-1)^n/(\pi n).$$

Решение задачи (3.43), (3.44) можно представить в виде ряда

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau),$$

где

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

а функция y_n удовлетворяет следующему уравнению:

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau)A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \quad (3.53)$$

Рассмотрим часто встречающийся в практических задачах случай, когда система подвергается внешнему гармоническому воздействию, при этом одна из границ закреплена, а другая перемещается по линейному закону, т.е.

$$F_{11}(\tau) = 0; \quad F_{21}(\tau) = B \cos W(\tau);$$

$$\ell_1(\tau) = 0; \quad \ell_2(\tau) = 1 + \varepsilon\tau.$$

Тогда функция $\theta_n(\tau)$ определяется из уравнения (3.31), где $M_n(\varepsilon\tau)$ с точностью до величин порядка малости ε^2 имеет вид:

$$M_n(\varepsilon\tau) = -\frac{2\pi n(-1)^n B}{\ell^{3/2}(\varepsilon\tau)}.$$

В этом случае уравнение (3.53) будет иметь следующий вид:

$$y_n''(\tau) + \frac{\pi^2 n^2}{(1 + \varepsilon\tau)^2} y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau). \quad (3.54)$$

Два линейно независимых решения этого уравнения записываются в виде (3.35), (3.36), где

$$w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau); \quad (3.55)$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 + \varepsilon\tau}. \quad (3.56)$$

С учетом сделанных вычислений выражение для амплитуды колебаний, соответствующее n -ной динамической моде, имеет вид

$$A_n^2(\tau) = B^2 \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.57)$$

где

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \frac{1}{1 + \varepsilon\zeta}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta).$$

3.3. Оценка погрешности метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений

Рассмотрим тестовую задачу:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (3.58)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(1 + \varepsilon\tau, \tau) = B \cos W(\tau). \quad (3.59)$$

Внешние нагрузки, полученные аналитическим методом (раздел 3.6) и приближенным методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений (раздел 3.2), в случае установившегося резонанса имеют следующий вид:

$$W_{\text{точн.}}(\tau) = \frac{2\pi n \ln(1 + \varepsilon\tau)}{\ln\left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)}; \quad (3.60)$$

$$W_{\text{прибл.}}(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau).$$

Вычислим погрешность в виде:

$$\Delta = \left| \frac{W'_{\text{точн.}}(\tau) - W'_{\text{прибл.}}(\tau)}{W'_{\text{точн.}}(\tau)} \right| \cdot 100\%. \quad (3.61)$$

Здесь $W'_{\text{точн.}}(\tau)$, $W'_{\text{прибл.}}(\tau)$ – мгновенные резонансные частоты.

Результаты вычислений погрешности (3.61) сведем в таблицу 3.1.

Таблица 3.1. Оценка погрешности (%) метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений в зависимости от относительной скорости движения границ ε

ε	0,01	0,02	0,05	0,1	0,3	0,5
Δ , %	0,002	0,010	0,077	0,317	3,155	9,837

Величина Δ не превосходит 5% при $\varepsilon < 0,37$.

Проведем анализ зависимости максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс для первой и второй динамических мод, а также границ резонансной области, от относительной скорости движения границ для задачи (3.58) и (3.59). Решения задачи были получены как аналитическим методом [8, 125, 139], так и приближенным методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений (3.57).

Основные этапы анализа:

1. Определение максимальной амплитуды колебаний A_n при прохождении через резонанс в зависимости от изменения относительной скорости движения границ. Особое внимание уделяется резонансным пикам, соответствующим первой и второй динамическим модам.

2. Определение границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму амплитуды при прохождении через резонанс от относительной скорости движения границ.

3. Численные исследования максимальной амплитуды колебаний и границ резонансной области для различных значений относительной скорости движения границ, с использованием разработанного программного комплекса, результаты которых занесены в таблицу 3.2.

4. Сравнение результатов, полученных аналитическим и приближенным методами, для оценки погрешности приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений. Аналитический метод

служит эталоном для проверки корректности приближенных и численных решений.

Таблица 3.2. Зависимость величин A_n, τ_1, τ_2 от относительной скорости ε при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	ε	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	$A_{1\text{точн.}}$	18,45	5,85	4,10	3,34	2,85
	$A_{1\text{прибл.}}$	18,46	5,94	4,22	3,46	2,98
	$\tau_{1\text{точн.}}$	171,59	10,48	3,33	1,36	0,39
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	172,37	10,38	3,30	1,26	0,29
	$\tau_{2\text{точн.}}$	246,57	33,95	20,08	14,84	12,22
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	246,09	33,76	19,69	14,55	11,64
2 мода	$A_{2\text{точн.}}$	13,03	4,11	2,94	2,37	2,08
	$A_{2\text{прибл.}}$	13,04	4,22	3,04	2,46	2,17
	$\tau_{1\text{точн.}}$	461,14	35,89	15,04	8,44	5,24
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	461,82	35,75	14,84	8,15	4,95
	$\tau_{2\text{точн.}}$	565,70	69,16	38,51	27,55	21,63
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	566,09	68,87	38,02	26,87	20,86

Проведенный анализ позволяет сделать выводы о влиянии скорости движения границ на резонансные свойства системы и оценить погрешность предложенных приближенных методов решения.

Данные, представленные в таблице 3.2, подтверждают вывод о том, что максимальная погрешность метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений не превышает 5 % для исследуемых величин при $\varepsilon < 0,37$. Это свидетельствует о его применимости для анализа задач,

связанных с колебаниями объектов с движущимися границами, в достаточно широких диапазонах скоростей движения границ.

3.4. Построение асимптотическим методом решений однородных интегро–дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами

Асимптотические методы, разработанные Н.М. Крыловым и Н.Н. Боголюбовым [29, 208], получили широкое распространение в решении разнообразных задач, связанных с исследованием процессов колебаний. Развитие этих методов применительно к изучению колебательных систем с переменными параметрами в значительной степени связано с работами Ю. А. Митропольского [201, 202]. В частности, методы Боголюбова–Крылова–Митропольского с успехом могут быть применены для анализа динамики объектов переменной длины. В монографии Ю. А. Митропольского [201] подробно рассмотрены задачи, связанные с нестационарными процессами в нелинейных колебательных системах, обладающих многими степенями свободы. Эти работы заложили основу для анализа сложных динамических систем, где учет нелинейностей и изменяющихся параметров играет ключевую роль. Кроме того, в исследованиях Б. И. Мосеевкова [208, 209] изучены колебания в системах с бесконечным числом степеней свободы.

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (3.9), имеет вид:

$$V(\xi, \tau) = - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) V_{\tau\tau}(\zeta, \tau) d\zeta. \quad (3.62)$$

Используя форму решения интегро–дифференциального уравнения движения объекта переменной длины, установленную в работах [51, 227], построим асимптотический ряд для нахождения решения уравнения (3.62) в первом приближении

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau), \quad (3.63)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции для объекта переменной длины, определение и способ построения которых рассмотрены в разделе 2.6, $a_n(\varepsilon\tau), w_n(\tau)$ – соответственно амплитуды и фазы колебаний объекта переменной длины подлежащие определению. В соответствии с теорией асимптотических методов [201] функции $a_n(\varepsilon\tau), w_n(\tau)$ определяются из системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = \varepsilon A_n(a, w, \tau); \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau) + \varepsilon B_n(a, w, \tau). \end{cases} \quad (3.64)$$

Здесь $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи, величина $\varepsilon\tau$ рассматривается как параметр.

Дифференцируя ряд (3.63) по времени с учетом выражения (3.64), получим

$$V_\tau(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) [\varepsilon A_n \cos w_n - a_n(\omega_{0n} + \varepsilon B_n) \sin w_n] + \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) a_n \cos w_n.$$

Дифференцируя повторно, получим выражение второй производной функции $V(\xi, \tau)$, выраженной через асимптотический ряд в виде

$$\begin{aligned} V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \left\{ -a_n \omega_{0n}^2 \cos w_n + \varepsilon \left[\frac{\partial A_n}{\partial w} \omega_{0n} - 2a_n \omega_{0n} B_n \right] \cos w_n - \right. \\ \left. - \varepsilon \left[\frac{\partial B_n}{\partial w} a_n \omega_{0n} + 2A_n \omega_{0n} + a_n \frac{d\omega_{0n}}{d\tau} \right] \sin w_n \right\} - 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} X_{n_\tau}(\xi, \varepsilon\tau) a_n \omega_{0n} \sin w_n. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Ядро уравнения (3.62), симметричное по аргументам по ξ и ζ , представим, как и в случае (3.12), в виде ряда по собственным функциям $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$:

$$K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau)}{\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}, \quad (3.66)$$

Подставляя асимптотические выражения искомой функции и ее производных в уравнение (3.62), получим уравнение

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau) = & - \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \left\{ -a_n \omega_{0n}^2 \cos w_n \right. \right. \\ & + \varepsilon \left[\frac{\partial A_n}{\partial w} \omega_{0n} - 2a_n \omega_{0n} B_n \right] \cos w_n - \varepsilon \left[\frac{\partial B_n}{\partial w} a_n \omega_{0n} + 2A_n \omega_{0n} + a_n \frac{d\omega_{0n}}{d\tau} \right] \sin w_n \left. \right\} - \\ & - 2\varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n \omega_{0n} \sin w_n \left. \right\} d\zeta. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Для того чтобы асимптотический ряд (3.63) формально удовлетворял уравнению (3.62) в рамках асимптотических методов, описанных в работах [201], необходимо потребовать равенства коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра ε в левой и правой частях уравнения (3.67).

Из равенства коэффициентов при ε в нулевой степени получим уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n \cos w_n = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) a_n \omega_{0n}^2 \cos w_n d\zeta, \quad (3.68)$$

или, приравнявая в левой и правой частях (3.68) коэффициенты при одинаковых гармониках $\cos w_n$, получим

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} K(\xi, \zeta, \varepsilon\tau) X_n(\zeta, \varepsilon\tau) d\zeta, \quad (3.69)$$

Приравнявая в уравнении (3.67) нулю коэффициенты при ε в первой степени и получающемся при этом уравнении коэффициенты при одинаковых гармониках, получим систему уравнений для определения функций A_n, B_n :

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n}{\partial w} = 2a_n(\varepsilon\tau) B_n; \\ \frac{\partial B_n}{\partial w} = -\frac{2}{a_n(\varepsilon\tau)} A_n - \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} - 2 \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_n(\varepsilon\tau)}. \end{cases} \quad (3.70)$$

В качестве A_n и B_n выберем частные решения системы уравнений (3.70), необходимые для построения уравнений (3.64), определяющих амплитуды и фазы колебаний $a_n(\varepsilon\tau), w_n(\tau)$:

$$\begin{cases} B_n = 0; \\ A_n = -\frac{a_n(\varepsilon\tau)}{2} \left[\frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} + 2 \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} \right]. \end{cases}$$

Подставляя найденные решения в уравнения (3.64), получим

$$\begin{cases} \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = -\varepsilon a_n(\varepsilon\tau) \left[\frac{1}{2\omega_{0n}(\varepsilon\tau)} \frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} + \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} \right]; \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau). \end{cases} \quad (3.71)$$

Уравнения (3.71) в большинстве случаев могут быть проинтегрированы в квадратурах. Решая систему (3.71) можно получить выражения для определения амплитуд и фаз колебаний в первом приближении:

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{C_{n0}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}} \exp \left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau \right]; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau + D_{n0}, \quad (3.72)$$

где постоянные C_{n0}, D_{n0} – определяются из начальных условий.

Таким образом, с точностью до членов, пропорциональных квадрату параметра ε , общее решение уравнения (3.62), описывающего движение объекта переменной длины, имеет вид

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{C_{n0}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}} \exp \left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau \right] \cos \left(\int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau + D_{n0} \right). \quad (3.73)$$

Решение, полученное методом Канторовича – Галеркина имеет аналогичный вид [101, 131]:

$$\begin{aligned} V(\xi, \tau) = & \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{1}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}} \exp \left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau \right] \times \\ & \times \left(E_{n0} \cos \left(\int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau \right) + F_{n0} \sin \left(\int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau \right) \right), \end{aligned}$$

где E_{n0}, F_{n0} – константы.

В большинстве практических задач можно ограничиться первым приближением (3.63), которое обеспечивает удовлетворительные количественные и качественные результаты. Более высокие приближения, не повышают точность, но позволяют выявить новые качественные особенности

системы, такие как слабая связь между модами колебаний, возникающая вследствие изменения длины объекта [51, 101, 117, 139, 201, 208, 227], что важно для углубленного анализа сложных динамических процессов.

В качестве примера рассмотрим свободные поперечные колебания балки переменной длины, концы которой закреплены.

Дифференциальное уравнение колебаний имеет вид:

$$U_{tt}(x,t) + \alpha^2 U_{xxxx}(x,t) = 0.$$

Граничные условия

$$U(0,t) = 0; \quad U_x(0,t) = 0;$$

$$U(l_0(t),t) = 0; \quad U_x(l_0(t),t) = 0,$$

Начальные условия

$$U(x,0) = f(x); \quad U_t(x,0) = F(x).$$

Здесь $U(x,t)$ – поперечное смещение точки с координатой x балки в момент времени t ; $\alpha^2 = EI / \rho$, E – модуль упругости материала балки, I – осевой момент инерции сечения балки, ρ – линейная плотность массы балки; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения правой границы, L_0 – начальная длина балки, v_0 – скорость движения границы; $f(x)$, $F(x)$ – функции класса C^2 .

Введем безразмерные переменные

$$\xi = \frac{x}{L_0}; \quad \tau = \frac{\alpha}{L_0^2} t; \quad V(\xi, \tau) = U(x,t) / L_0.$$

Исходная задача примет вид:

$$V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = 0;$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_\xi(0, \tau) = 0;$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0; \quad V_\xi(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0,$$

$$V(\xi, 0) = \varphi_1(\xi); \quad V_\tau(\xi, 0) = \varphi_2(\xi).$$

где

$$l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = -v_0 L_0 / \alpha.$$

Применим к задаче рассмотренный выше асимптотический метод и методику раздела 3.1.

Величины $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ и $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ являются соответственно собственными функциями и собственными частотами следующей краевой задачи:

$$X_{n\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) - \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0.$$

Решая данное уравнение, получим:

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0,62 \left\{ C_n(\varepsilon\tau) \left[\cos(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - ch(r_n(\varepsilon\tau)\xi) \right] + \sin(r_n(\varepsilon\tau)\xi) - sh(r_n(\varepsilon\tau)\xi) \right\},$$

где

$$C_n(\varepsilon\tau) = \frac{\cos(r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)) - ch(r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau))}{\sin(r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)) + sh(r_n(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau))}; \quad r_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = k_n^2/l^2(\varepsilon\tau); \quad k_n \approx \pi n + \pi/2.$$

В данном случае динамические моды X_n определяются с точностью до постоянного множителя и выбраны таким образом, что $\max [X_n(\xi, \varepsilon\tau)] = 1$.

Уравнения (3.72) имеют вид

$$a_n(\varepsilon\tau) = l(\varepsilon\tau)/k_n; \quad w_n(\tau) = -k_n^2/(\varepsilon l(\varepsilon\tau)).$$

Следовательно, общее решение задачи выглядит следующим образом

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \cdot \frac{\sqrt{l(\varepsilon\tau)}}{k_n} \cdot C_n \cdot \cos\left(\frac{k_n^2}{\varepsilon l(\varepsilon\tau)} + \alpha_n\right),$$

где постоянные C_n, α_n определяются из начальных условий.

3.5. Построение асимптотическим методом решений однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение объекта переменной длины

Система (3.22) была получена из интегро-дифференциального уравнения путем разложения его решения в ряд по собственным функциям. Это означает, что на основе решений однородной системы уравнений, соответствующей

(3.22), можно построить общее решение задачи динамики объекта переменной длины. Это общее решение будет совпадать с решением (3.73), которое получено путем непосредственного решения однородного интегро–дифференциального уравнения (3.62).

Однородная система, соответствующая системе (3.22), имеет вид:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau)\mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)\mu_n'(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = 0. \quad (3.74)$$

Будем находить решения системы (3.74) асимптотическим методом, предложенным Ю. А. Митропольским [201, 202], т.е.

$$\mu_n(\tau) = a_n(\varepsilon\tau)\cos w_n(\tau), \quad (3.75)$$

в которых функции $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ определяются из дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{da_n(\varepsilon\tau)}{d\tau} = \varepsilon A_n(a, w, \tau); \\ \frac{dw_n(\tau)}{d\tau} = \omega_{0n}(\varepsilon\tau) + \varepsilon B_n(a, w, \tau). \end{cases} \quad (3.76)$$

Подставляя в (3.74) значения функции $\mu_n(\tau)$, определенной равенством (3.75) и ее производных

$$\begin{aligned} \mu_n'(\tau) &= \varepsilon A_n \cos w_n - a_n(\omega_{0n} + \varepsilon B_n) \sin w_n \\ \mu_n''(\tau) &= -a_n \omega_{0n}^2 \cos w_n + \varepsilon \left[\frac{\partial A_n}{\partial w} \omega_{0n} - 2a_n \omega_{0n} B_n \right] \cos w_n - \\ &- \varepsilon \left[\frac{\partial B_n}{\partial w} a_n \omega_{0n} + 2A_n \omega_{0n} + a_n \frac{d\omega_{0n}}{d\tau} \right] \sin w_n, \end{aligned}$$

с учетом (3.76), получим с точностью до величин порядка ε^2

$$\begin{aligned} \varepsilon \left[\frac{\partial A_n}{\partial w} \omega_{0n} - 2a_n \omega_{0n} B_n \right] \cos w_n - \varepsilon \left[\frac{\partial B_n}{\partial w} a_n \omega_{0n} + 2A_n \omega_{0n} + a_n \frac{d\omega_{0n}}{d\tau} \right] \sin w_n - \\ - 2\varepsilon \frac{A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} a_n \omega_{0n} \sin w_n = 0. \end{aligned} \quad (3.77)$$

В соответствии с асимптотическими методами, приравнивая в уравнении (3.77) соответствующие коэффициенты при ε в первой степени, а также в получающемся при этом уравнении коэффициенты при одинаковых

гармониках, получим систему уравнений для определения функций A_n, B_n вида (3.70)

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n}{\partial w} = 2a_n(\varepsilon\tau)B_n; \\ \frac{\partial B_n}{\partial w} = -\frac{2}{a_n(\varepsilon\tau)}A_n - \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}\frac{d\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}{d\tau} - 2\frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)}. \end{cases}$$

Далее, используя методику, изложенную в п.3.4, получим общее решение системы (3.74), описывающей движение объекта переменной длины, совпадающее с (3.73)

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{C_{n0}}{\sqrt{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)}} \exp\left[-\int_0^{\tau} \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} d\tau\right] \cos\left(\int_0^{\tau} \omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\tau + D_{n0}\right).$$

Таким образом, устанавливается равнозначность двух подходов к исследованию задач динамики объектов переменной длины: непосредственного интегрирования интегро–дифференциальных уравнений и построение решения промежуточной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами вида (3.74).

Основное преимущество первого подхода – метода прямого исследования интегро–дифференциальных уравнений – заключается в том, что он обеспечивает строгое теоретическое обоснование возможности разложения решений по собственным функциям, опираясь на общую теорию интегральных уравнений. Кроме того, данный метод позволяет расширить и обобщить понятия собственных функций и собственных частот для рассматриваемого класса задач.

3.6. Численно–аналитический метод решения волнового уравнения с широким спектром условий на движущихся границах

Рассмотрим численно–аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах. Пусть движение системы описывается волновым уравнением

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0. \quad (3.78)$$

Граничные условия на закрепленных концах имеют вид

$$u(l_1(t),t) = f_1(t); \quad u_x(l_2(t),t) = f_2(t), \quad (3.79)$$

$$l_1(0) \leq x \leq l_2(0).$$

Начальные условия

$$u(x,0) = \varphi_0(x); \quad u_t(x,0) = \varphi_1(x). \quad (3.80)$$

Здесь $u(x,t)$ – смещение точки объекта с координатой x в момент времени t ; a – скорость распространения волн в системе; $l_1(x), l_2(x)$ – законы движения границ (функции класса C); $f_1(t), f_2(t), \varphi_0(x), \varphi_1(x)$ – заданные функции класса C^2 .

Весницким А.И. [33, 38] был предложен следующий метод подбора новых переменных для волнового уравнения:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(t + x/a) - \psi(t - x/a); \\ \tau &= a^{-1} [\varphi(t + x/a) + \psi(t - x/a)], \end{aligned} \quad (3.81)$$

где φ и ψ – некоторые функции, которые определяются из системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} \varphi(\tau + l_1(\tau)) = \psi(\tau - l_1(\tau)); \\ \varphi(\tau + l_2(\tau)) = \psi(\tau - l_2(\tau)) + 1. \end{cases} \quad (3.82)$$

В новых переменных исходная задача (3.78) – (3.80) сводится к следующей

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (3.83)$$

при граничных условиях

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_{\xi}(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.84)$$

$$\ell_1(0)=0; \ell_2(0)=1; \ell_2(\tau) > \ell_1(\tau)$$

и начальных условиях

$$U(\xi, 0) = \Phi_0(\xi); U_{\tau}(\xi, 0) = \Phi_1(\xi). \quad (3.85)$$

Для решения задачи (3.83) используется представление Даламбера

$$U(\xi, \tau) = g(\tau + \xi) + G(\tau - \xi). \quad (3.86)$$

Подставляя решение (3.86) в граничные (3.84) и начальные (3.85) условия, соответственно получим

$$\begin{cases} g(\tau + \ell_1(\tau)) + G(\tau - \ell_1(\tau)) = F_1(\tau); \\ g'(\tau + \ell_2(\tau)) - G'(\tau - \ell_2(\tau)) = F_2(\tau); \end{cases} \quad (3.87)$$

$$\begin{cases} g(\xi) + G(-\xi) = \Phi_0(\xi), 0 \leq \xi \leq 1; \\ g'(\xi) + G'(-\xi) = \Phi_1(\xi), 0 \leq \xi \leq 1. \end{cases} \quad (3.88)$$

В работе [123] в отличие от метода А.И. Весницкого для упрощения задачи вводятся новые функции

$$g'(z) = r(\varphi(z)); G'(z) = R(\psi(z)). \quad (3.89)$$

После преобразований система уравнений (3.87) примет вид

$$\begin{cases} r(\varphi(\tau + \ell_1(\tau))) + R(\psi(\tau - \ell_1(\tau))) = F_1'(\tau); \\ r(\varphi(\tau + \ell_2(\tau))) - R(\psi(\tau - \ell_2(\tau))) = F_2(\tau). \end{cases} \quad (3.90)$$

Введем обозначения в первом уравнении системы (3.90)

$$\varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = z; \psi(\tau - \ell_1(\tau)) = z$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = z; \psi(\tau - \ell_2(\tau)) = z - 1.$$

Для решения полученной задачи используем методику, описанную в [123]. Таким образом, задача сводится к решению разностного уравнения

$$r(z) + r(z - 1) = \theta(z), \quad (3.91)$$

при начальных условиях

$$r(z) = \begin{cases} -R(z), & -1 \leq z \leq \varphi(0); \\ r(z), & \varphi(0) \leq z \leq 0. \end{cases} \quad (3.92)$$

Если принять внешнюю нагрузку равной $\theta(z) = B \cos W(\tau)$, то после соответствующих преобразований полную амплитуду колебаний на n -ной динамической моде в точке $\xi = \xi_0(\tau)$ можно записать в виде

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.93)$$

где $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$; $\Phi_n(\zeta) = k_n \zeta - W(\zeta)$, $k_n = \pi(2n - 1)$.

Точка $\xi = \xi_0(\tau)$, соответствующая максимальному размаху колебания напряжений, находится из уравнения

$$\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} = \pm 1.$$

Решение соответствующей (3.83) – (3.85) задачи с однородными граничными условиями находится следующим образом [85, 125, 232]:

$$\begin{aligned} U(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n} \xi) (D_n \cos(\omega_{0n} \tau) + E_n \sin(\omega_{0n} \tau)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left\{ \sin(\omega_{0n}(\tau + \xi) + \alpha_n) - \sin(\omega_{0n}(\tau - \xi) + \alpha_n) \right\}, \end{aligned} \quad (3.94)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau) = \frac{\pi n}{\ell_2 - \ell_1}$; $r_n = \frac{1}{2} \sqrt{D_n^2 + E_n^2}$; $\alpha_n = \arctg(E_n / D_n)$.

Здесь постоянные D_n, E_n определяются из начальных условий (3.80).

Возвращаясь к переменным x и t , получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left\{ \sin(\omega_{0n} \varphi(t + x) + \alpha_n) - \sin(\omega_{0n} \psi(t - x) + \alpha_n) \right\}. \quad (3.95)$$

Приведенная методика позволяет получить выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде для широкого класса краевых условий:

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.96)$$

$$U_\xi(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.97)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\tau(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.98)$$

$$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.99)$$

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\xi(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau); \quad (3.100)$$

$$U(\ell_1(\tau), \tau) = F_1(\tau); U_\tau(\ell_2(\tau), \tau) = F_2(\tau). \quad (3.101)$$

Полученные результаты сведем в таблицу 3.3.

Таблица 3.3. Вычисление амплитуды колебаний при различных граничных условиях

Вид граничных условий	$U(\ell_1(\tau), \tau);$ $U(\ell_2(\tau), \tau)$	$U_\xi(\ell_1(\tau), \tau);$ $U_\xi(\ell_2(\tau), \tau)$	$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau);$ $U_\xi(\ell_2(\tau), \tau)$	$U(\ell_1(\tau), \tau);$ $U_\xi(\ell_2(\tau), \tau)$	$U_\tau(\ell_1(\tau), \tau);$ $U_\tau(\ell_2(\tau), \tau)$	$U(\ell_1(\tau), \tau);$ $U_\tau(\ell_2(\tau), \tau)$
Замена переменных	$g(z) = r(\varphi(z));$ $G(z) = R(\psi(z))$	$g'(z) = r(\varphi(z));$ $G'(z) = -R(\psi(z))$	$g'(z) = r(\varphi(z));$ $G'(z) = R(\psi(z))$			
Разностное уравнение	$r(z) - r(z-1) = \theta(z)$		$r(z) + r(z-1) = \theta(z)$		$r(z) - r(z-1) = \theta(z)$	
Функция $\theta(z)$	$\theta(z) = \theta_2(z) - \theta_1(z-1)$		$\theta(z) = \theta_2(z) +$ $+\theta_1(z-1)$	$\theta(z) = \theta_2(z) +$ $+\theta_1'(z-1)$	$\theta(z) = \theta_2(z) -$ $-\theta_1(z-1)$	$\theta(z) = \theta_2(z) -$ $-\theta_1'(z-1)$
Начальные условия	$r(z) = \begin{cases} -R(z), & -1 \leq z \leq \varphi(0); \\ r(z), & \varphi(0) \leq z \leq 0 \end{cases}$					
Общее решение	$U(\xi, \tau) =$ $= r(\varphi(\tau + \xi)) +$ $+R(\psi(\tau - \xi))$	$U_\xi(\xi, \tau) =$ $= r(\varphi(\tau + \xi)) +$ $+R(\psi(\tau - \xi))$	$U_\xi(\xi, \tau) = r(\varphi(\tau + \xi)) - R(\psi(\tau - \xi))$			
Форма колебаний (мода)	$\sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\}$		$\cos\left\{\frac{k_n}{2}[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\right\}$		$\cos\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\}$	
Полная амплитуда	$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}$					
Функции $\Phi_n(\zeta), b(\tau)$	$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta);$ $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$		$\Phi_n(\zeta) = k_n\zeta - W(\zeta);$ $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$		$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(\zeta);$ $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau))$	

Насколько известно, решения волнового уравнения при граничных условиях (3.96) – (3.101) другими известными аналитическими методами не получались.

3.7. Асимптотический метод решения функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами

Следует отметить, что возможность нахождения решения задачи (3.83) – (3.85) определяется сложностью граничных условий, а также тем, удастся ли решить систему (3.82). Решение системы (3.82), в общем случае, представляет собой непростую задачу. При ее решении можно выделить два основных подхода:

– обратная задача [8, 38, 120, 122, 123, 125, 130], которая заключается в определении законов движения границ $\ell_i(\tau)$ по известным «фазам» собственных колебаний φ и ψ ;

– прямая задача [117, 139], которая предполагает нахождение «фаз» собственных колебаний φ и ψ при заданных законах движения границ $\ell_i(\tau)$.

На основе обратной задачи Весницким А.И. и Потаповым А.И. [33–38] были найдены решения для широкого спектра законов движения границ. Полученные законы были разбиты на отдельные классы. Новые решения, относящиеся к различным классам, также были представлены в работе [123].

Решение прямой задачи сопряжено с большими трудностями, в связи с этим рассмотрим приближенное решение функционального уравнения

$$\varphi(\tau + \ell(\tau)) - \varphi(\tau - \ell(\tau)) = 1. \quad (3.102)$$

Для приближенного решения уравнения (3.102) предлагается использовать асимптотический метод [38, 117, 139].

Решение уравнения (3.102) в случае неподвижных границ имеет вид:

$$\varphi(z) = \frac{z}{2\ell} + const.$$

При медленном движении границы, используя разложение $\varphi(z)$ в степенной ряд по $\ell(\tau)$ и подставляя его в (3.102), получим дифференциальное уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n \varphi}{d\tau^n} \ell^n(\tau) = 1, \quad (3.103)$$

решение которого нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(\tau). \quad (3.104)$$

Подставляя (3.104) в (3.103) и приравнявая к нулю члены одинакового порядка малости, получим для нулевого приближения

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \frac{dt}{\ell(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $\ell(\tau) = 1 + v\tau$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(vz + 1) / (1 + v)]}{2v}. \quad (3.105)$$

Значения (3.105) сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения [123]:

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(vz + 1) / (1 - v)]}{\ln[(1 + v) / (1 - v)]} - 1. \quad (3.106)$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы v приведены в таблице 3.4.

Таблица 3.4. Погрешность асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

В интервале $v \in [0,1; 0,6]$ погрешности приближенного метода малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (3.106) при $v \rightarrow 1$ становится бесконечно большой.

В случае равноускоренного закона движения границы $\ell(t) = 1 + v\tau^2$ при использовании асимптотического метода фаза динамических собственных колебаний имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\sqrt{v}} \operatorname{arctg}(z\sqrt{v}).$$

Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [8].

Для получения приближенного решения функционального уравнения (3.102) можно использовать и несколько иной подход.

Функцию $\varphi(z)$ найдем в виде многочлена степени n :

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + \dots + p_n z^n. \quad (3.107)$$

Параметры $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$ с помощью метода наименьших квадратов находились таким образом, чтобы функция (3.107) как можно лучше удовлетворяла уравнению (3.102) при различных τ_i ($i = \overline{1, m}$).

Для оценки точности метода рассмотрена тестовая задача. Для линейного закона движения $l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau$ при различных ε находился многочлен пятой степени

$$\varphi(z) = p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 + p_5 z^5 + p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + p_5 - 1, \quad (3.108)$$

удовлетворяющий условию $\varphi(-1) = -1$.

Значения многочлена, полученного по методу наименьших квадратов, сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (3.106). Сравнение производилось за период времени, пока длина уменьшалась от 1 до 0.3. При меньших длинах многочлен (3.108) плохо описывает функцию $\varphi(z)$. При стремлении $l(\tau)$ к нулю уравнение (3.102) принимает вид

$$\varphi(\tau + 0) - \varphi(\tau - 0) = 1,$$

т.е. функция $\varphi(z)$ в точке τ терпит разрыв.

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ (разница между функциями (3.106) и (3.108)) в зависимости от скорости движения границы ε приведены в таблице 3.5.

Таблица 3.5. Погрешность метода наименьших квадратов в зависимости от скорости движения границы

ε	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,017	0,015	0,013	0,015	0,017	0,039	0,054	0,046	0,140

В интервале $\varepsilon \in [0,1;0,6]$ погрешности малы.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный метод для решения функционального уравнения (3.102) в случаях, когда его точное решение не известно.

Данные решения могут быть применены для анализа колебаний канатов в грузоподъемных механизмах в условиях равномерного или равноускоренного подъема (спуска), а также при исследовании колебаний гибких звеньев передач, таких как ременные передачи, и других аналогичных систем.

3.8. Применение приближенного метода Канторовича – Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием

Метод Канторовича–Галеркина может быть применён в более сложных случаях. В данной работе метод распространён на более широкий класс модельных краевых задач, учитывающих изгибную жесткость колеблющегося объекта [101, 124, 131, 133, 171, 177, 182, 188, 261], сопротивление внешней среды [107, 119, 124, 129, 176] и жесткость подложки [39, 119, 129, 166, 258].

Пусть требуется получить решение дифференциального уравнения в частных производных:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[U(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 U(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) \quad (3.109)$$

при граничных условиях:

$$Y_{ji}[U(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = e^{-\alpha(\varepsilon_1\tau)\tau} F_{ji}(\tau); \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, 2}, \quad (3.110)$$

где ε_1 – малый параметр, характеризующий сопротивление внешней среды.

Для того, чтобы избавиться от неоднородностей в граничных условиях, вводится новая функция (3.3).

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + L[V(\xi, \tau)] + \varepsilon_1 V(\xi, \tau) = \varphi(\xi, \tau) - H_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 H(\xi, \tau), \quad (3.111)$$

$$Y_{ji}[V(\ell_j(\varepsilon\tau), \tau)] = 0. \quad (3.112)$$

Для решения задачи используем метод Канторовича в совокупности с методом Галеркина. Решение задачи будем искать в виде:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau), \quad (3.113)$$

где $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ – собственные функции следующей краевой задачи

$$L[X_n(\xi, \varepsilon\tau)] = \omega_n^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau); \quad (3.114)$$

$$Y_{ji}[X_n(\ell_j(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau)] = 0.$$

Здесь $\omega_n(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи.

Разложение функции $H(\xi, \tau)$ в ряд Фурье имеет вид (3.15).

Тогда, согласно методу Галеркина, с учетом (3.114), (3.15), функции $f_n(\tau)$ будут удовлетворять следующей системе:

$$\begin{aligned} & \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \sum_{n=1}^{\infty} \{ [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \omega_n^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \\ & + [\varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \varepsilon_1 \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \} X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d(\xi) = \\ & = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_m(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d(\xi), \end{aligned} \quad (3.115)$$

где $m = 1, 2, 3, \dots$

Решение системы (3.115) представляет значительные трудности. В условиях резонанса амплитуды всех динамических мод, кроме резонансной,

малы. Поэтому в каждом уравнении системы членами, не содержащими резонансную моду $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$, можно пренебречь из-за их малой величины. В таком случае система (3.115) упрощается и становится расщепленной, а уравнение для определения $f_n(\tau)$ принимает следующий вид:

$$\int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \{ [f_n(\tau) + \varphi_n(\tau)] X_n(\xi, \varepsilon\tau) \}_{\tau\tau} + \Omega_n^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \varepsilon_1 \varphi_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \} X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi = \int_{\ell_1(\varepsilon\tau)}^{\ell_2(\varepsilon\tau)} \varphi(\xi, \tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) q(\xi) d\xi, \quad (3.116)$$

где $\Omega_n^2(\varepsilon\tau) = \omega_n^2(\varepsilon\tau) + \varepsilon_1$.

Введем новую функцию: $\mu_n(\tau) = f_n(\tau) + \varphi_n(\tau)$, тогда уравнение (3.116) примет вид:

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) \mu_n''(\tau) + 2\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) \mu_n'(\tau) + \varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) + A_{1n}(\varepsilon\tau) \Omega_n^2(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) = \theta_n(\tau), \quad (3.117)$$

где функции $A_{1n}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)$, $\varepsilon^2 A_{3n}(\varepsilon\tau)$, $\theta_n(\tau)$ определены ранее в разделе 3.1.

С учетом (3.113), (3.15) решение (3.3) будет иметь вид:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

При использовании методики раздела 3.1. уравнение (3.117) с точностью до величин порядка ε^2 преобразуется к виду:

$$y_n''(\tau) + \Omega_n^2(\varepsilon\tau) y_n(\tau) = \theta_n(\tau) / [A_{0n}(\varepsilon\tau) A_{1n}(\varepsilon\tau)]. \quad (3.118)$$

При гармоническом внешнем воздействии на систему (см. раздел 3.1.), получим следующее выражение для полной амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) e^{\alpha(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (3.119)$$

где

$$w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_n(\varepsilon\tau) d\tau; \quad a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_n(\varepsilon\tau)}};$$

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{1}{4} e^{-2\alpha(\varepsilon_1\tau)\tau} A_{0n}^2(\varepsilon\tau) a_n^2(\varepsilon\tau); \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta).$$

Математическая модель системы с демпфированием рассмотрена в главе 7: исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании с учетом влияния сил сопротивления среды.

3.9. Выводы по третьей главе

1. Разработанный приближенный метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений позволяет анализировать колебательные процессы в системах с движущимися границами, учитывая комплексное воздействие внешних факторов, включая действие на систему сил сопротивления среды, изгибную жесткость объекта и жесткость подложки. Полученные квадратурные формулы для амплитуд колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, создают основу для расчетов в системах с изменяющейся геометрией.

2. Проведенная оценка погрешности метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений в зависимости от скорости движения границ устанавливает границы применимости разработанного подхода и позволяет выбирать оптимальные математические модели для конкретных технических систем, обеспечивая требуемую точность расчетов.

3. Развитые асимптотические методы построения решений однородных интегро–дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений предоставляют эффективный инструмент для исследования динамических характеристик систем с изменяющимися параметрами, включая определение амплитудно–фазовых соотношений и построение общего решения однородного уравнения в первом приближении.

Установленная эквивалентность данных методов применительно к исследованию задач динамики объектов переменной длины подтверждает корректность разработанного математического аппарата.

4. Развитый численно–аналитический метод решения волнового уравнения с условиями, заданными на движущихся границах, расширяет класс решаемых краевых задач за счет учета разнообразных граничных условий, отличных от условий первого рода, что особенно важно при моделировании реальных технических объектов.

5. Разработанный асимптотический метод решения функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами позволяет существенно упростить анализ динамических процессов при сохранении требуемой точности, что подтверждается проведенными оценками погрешности.

6. Обобщение метода Канторовича–Галеркина на более широкий класс модельных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами, описываемых уравнениями гиперболического типа, при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием существенно расширяет возможности анализа нестационарных динамических процессов и открывает новые перспективы для исследования резонансных явлений в сложных механических системах.

Глава 4

Исследование влияния движения границ на резонансные свойства механических систем

Одномерные объекты, границы которых движутся с постоянными и равными скоростями, часто встречаются в технических устройствах. К ним относятся гибкие звенья передач, кабели в процессе их производства, нити в механизмах для перемотки и другие подобные системы. Для таких объектов характерно продольное движение колеблющегося элемента относительно неподвижных опор, что позволяет сохранять постоянную длину колеблющейся части. Математическое моделирование таких систем во многом схоже с задачами, связанными с движущимися нагрузками.

Функционирование таких систем включает две основные фазы: разгон от состояния покоя до рабочей скорости и стационарный режим работы, при котором движение происходит с постоянной скоростью.

Фаза разгона может быть исследована с использованием уже рассмотренных методов. При стационарном режиме резонансные свойства, как и в случае систем с неподвижными границами, определяются набором постоянных собственных частот. Благодаря простому характеру движения границ исходная задача может быть сведена к двухточечной краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения, что позволяет определить собственные частоты системы.

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [5, 8, 9, 112].

4.1. Решение краевых задач для случая, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями

4.1.1. Поставим задачу следующим образом. Требуется определить собственные частоты объекта, описываемого уравнением:

$$L[U(\xi, \tau)] = 0 \quad (4.1)$$

при граничных условиях

$$Y_{jk}[U(l_j(\tau), \tau)] = 0, \quad (4.2)$$

где

$$j = \overline{1, 2}; \quad k = \overline{1, m}; \quad l_1(\tau) = v\tau; \quad l_2(\tau) = 1 + v\tau;$$

L – линейный однородный дифференциальный оператор, коэффициенты которого являются функциями переменной $\zeta = \xi - v\tau$, а максимальный порядок производных по ξ равен $2m$, а по τ равен 2;

Y_{jk} – линейные однородные дифференциальные операторы, не содержащие коэффициентов, зависящих от τ ;

v – безразмерная скорость движения границ;

$U(\xi, \tau)$ – функция, описывающая перемещения при колебаниях;

ξ – безразмерная геометрическая переменная;

τ – безразмерное время.

Для решения задачи воспользуемся заменой переменных, предложенной в работе [45]:

$$\zeta = \xi - v\tau; \quad \tau = \tau; \quad V(\zeta, \tau) = U(\xi, \tau).$$

Тогда для преобразованного уравнения

$$L^*[V(\zeta, \tau)] = 0, \quad (4.3)$$

граничные условия

$$Y_{jk}[V(\zeta_j, \tau)] = 0 \quad (4.4)$$

будут заданы в неподвижных точках $\zeta_1 = 0$, $\zeta_2 = 1$.

Операторы L и Y_{jk} (см. (4.1), (4.2)) выбраны таким образом, что решение задачи (4.3), (4.4) можно искать в виде

$$V(\zeta, \tau) = \mu(\zeta)e^{W\tau}, \quad (4.5)$$

где $W = r + \omega i$ (r характеризует затухание колебаний, ω – собственная частота колебаний, i – мнимая единица).

После подстановки выражения (4.5) в (4.3), (4.4) получим двухточечную краевую задачу для обыкновенного дифференциального уравнения

$$Z[\mu(\zeta)] = 0; \quad (4.6)$$

$$Z_{jk}[\mu(\zeta_j)] = 0, \quad (4.7)$$

где $j = \overline{1, 2}$; $k = \overline{1, m}$; $\zeta_1 = 0$; $\zeta_2 = 1$; Z, Z_{jk} – линейные дифференциальные операторы.

Методы решения задачи (4.6), (4.7) будут рассмотрены в седьмой главе применительно к конкретным динамическим системам.

4.1.2. Во многих прикладных задачах важно учитывать как изгибную жесткость, так и натяжение колеблющегося элемента. Часто такие ситуации встречаются в системах, где гибкое звено движется между двумя вращающимися роликами. В подобных случаях возникает задача обоснования граничных условий, которые формируются в результате взаимодействия звена с цилиндрической опорой (рисунок 4.1).

При колебаниях точка контакта перемещается по опоре. Очевидно, что перемещение границы взаимосвязано с $U(x, t)$. Наличие такой связи делает задачу нелинейной, на что указывалось в статье [230].

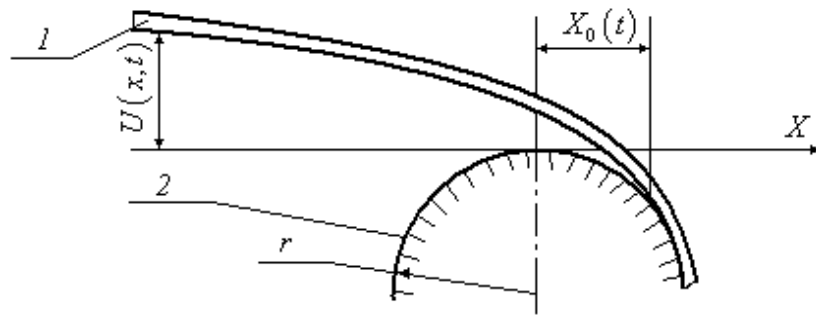


Рис. 4.1. Взаимодействие звена с круглой опорой

На рисунке 4.1 обозначено: 1 – гибкое звено; 2 – опора; $f(x-l_0)$ – функция, аппроксимирующая форму опоры; $X_0(t)$ – расстояние от оси симметрии до точки касания звена с опорой; $U(x, t)$ – поперечное смещение точки с координатой X в момент времени t .

В дальнейшем граничные условия на левом конце и начальные условия будут опускаться: предполагается, что решение удовлетворяет им.

Задачу (см. рисунок 4.1) можно поставить следующим образом: для дифференциального уравнения $L[U(x, t)] = \varphi(x, t)$, описывающего колебания звена, требуется найти решение, удовлетворяющее граничным условиям:

$$U(l_0 + x_0(t), t) = f(x_0(t)); \quad (4.8)$$

$$U_x(l_0 + x_0(t), t) = f'(x_0(t)); \quad (4.9)$$

$$U_{xx}(l_0 + x_0(t), t) = f''(x_0(t)). \quad (4.10)$$

Выражение (4.8) получено на основе условия контакта звена с опорой, а выражения (4.9) и (4.10) выведены из требования совпадения угла наклона касательной и кривизны звена и опоры в точке их соприкосновения. Необходимость введения трех граничных условий на одном конце элемента связана с тем, что закон движения точки контакта $x = x_0(t)$ заранее неизвестен, и для его определения требуется дополнительное граничное условие.

Отметим, что условия (4.8), (4.9), (4.10) для подобной задачи использовались ранее в работе [50].

Отделяем в поставленной задаче статическую часть:

$$U(x,t) = V(x,t) + \mu(x). \quad (4.11)$$

В результате получаем задачу для $\mu(x)$:

$$L[\mu(x)] = 0; \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \mu(l_0 + x_0) &= f(x_0); \quad \mu'(l_0 + x_0) = f'(x_0); \\ \mu''(l_0 + x_0) &= f''(x_0), \end{aligned} \quad (4.13)$$

где $l_0 + x_0$ – координата точки касания звена с опорой в статическом состоянии.

Решение задачи (4.12) при граничных условиях (4.13), как правило, трудностей не представляет.

Перейдем к задаче по определению $V(x,t)$. Обозначим:

$$\delta(t) = x_0(t) - x_0; \quad l = l_0 + x_0.$$

Тогда для определения $V(x,t)$ получим следующую задачу:

$$L[V(x,t)] = \varphi(x,t); \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} V(l + \delta(t), t) &= f(x_0 + \delta(t)) - \mu(l + \delta(t)); \\ V_x(l + \delta(t), t) &= f'(x_0 + \delta(t)) - \mu'(l + \delta(t)); \\ V_{xx}(l + \delta(t), t) &= f''(x_0 + \delta(t)) - \mu''(l + \delta(t)). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Разложив правые части граничных условий в ряд Тейлора по степеням $\delta(t)$ с удержанием членов до производной третьего порядка включительно и учитывая равенства (4.13), граничные условия преобразуем к виду:

$$V(l + \delta(t), t) = R\delta^3(t)/6; \quad (4.16)$$

$$V_x(l + \delta(t), t) = R\delta^2(t)/2; \quad (4.17)$$

$$V_{xx}(l + \delta(t), t) = R\delta(t), \quad (4.18)$$

где $R = f'''(x_0) - \mu'''(l)$.

Разложим левые части равенств (4.16), (4.17), (4.18) в ряд Тейлора с удержанием членов до третьей степени производной включительно. В результате получим:

$$V(l,t) + \delta(t)V_x(l,t) + \frac{\delta^2(t)}{2}V_{xx}(l,t) + \frac{\delta^3(t)}{6}V_{xxx}(l,t) = R \frac{\delta^3(t)}{6}; \quad (4.19)$$

$$V_x(l,t) + \delta(t)V_{xx}(l,t) + \frac{\delta^2(t)}{2}V_{xxx}(l,t) = R \frac{\delta^2(t)}{2}; \quad (4.20)$$

$$V_{xx}(l,t) + \delta(t)V_{xxx}(l,t) = R\delta(t).$$

Исключая из равенства (4.20) $V_{xxx}(l,t)$, а из равенства (4.19) – $V_x(l,t)$ и $V_{xxx}(l,t)$, получим:

$$V(l,t) = \frac{1}{6}\delta^2(t)V_{xx}(l,t); \quad (4.21)$$

$$V_x(l,t) = -\frac{1}{2}\delta(t)V_{xx}(l,t); \quad (4.22)$$

$$V_{xx}(l,t) = R\delta(t) - \delta(t)V_{xxx}(l,t). \quad (4.23)$$

Найдём $\delta(t)$ из равенства (4.23). Подставим полученное выражение в (4.21) и (4.22). После преобразований вместо (4.21), (4.22), (4.23) будем иметь:

$$V(l,t) = V_{xx}^3(l,t) / \{6[R - V_{xxx}(l,t)]^2\}; \quad (4.24)$$

$$V_x(l,t) = -V_{xx}^2(l,t) / \{2[R - V_{xxx}(l,t)]\}. \quad (4.25)$$

Введём в задачу (4.14), (4.24), (4.25) безразмерные переменные:

$$\xi = x/l; \quad \tau = at/l; \quad V(x,t) = AZ(\xi, \tau), \quad (4.26)$$

где A – условная амплитуда колебаний; $a^2 = T/\rho$ (T – сила натяжения струны, ρ – линейная плотность массы струны). Тогда окончательно задача примет следующий вид:

$$L_1[Z(\xi, \tau)] = \varphi_1(\xi, \tau);$$

$$Z(1, \tau) = b^2 Z_{\xi\xi}^3(1, \tau) / \{6[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1, \tau)]^2\};$$

$$Z_{\xi}(1, \tau) = -bZ_{\xi\xi}^2(1, \tau) / \{2[1 - bZ_{\xi\xi\xi}(1, \tau)]\},$$

где $b = A/(Rl^3)$.

4.1.3. Рассмотрим конкретный пример (см. рисунок 4.2).

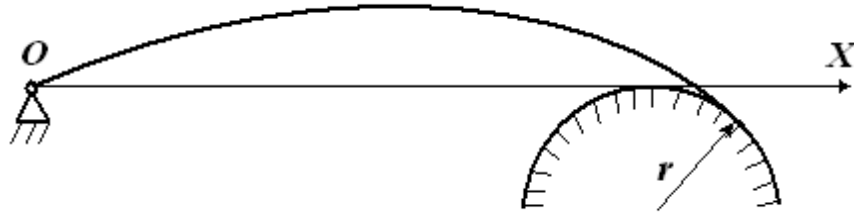


Рис. 4.2. Взаимодействие струны с роликовой опорой

Дифференциальное уравнение, учитывающее натяжение и изгибную жёсткость струны, имеет вид

$$U_{tt}(x,t) + \alpha^4 U_{xxxx}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0, \quad (4.27)$$

где $\alpha^4 = EI / \rho$; E – модуль упругости материала струны; I – момент инерции сечения струны; a^2 и ρ – определены ранее.

Уравнение (4.27) необходимо решить при граничных условиях на правом конце вида (4.8), (4.9), (4.10) и на левом конце вида

$$U(0,t) = 0; \quad U_{xx}(0,t) = 0. \quad (4.28)$$

Отделяя по формуле (4.11) статическую часть решения, получим следующую задачу для определения $\mu(x)$:

$$\alpha^4 \mu^{(IV)}(x) - a^2 \mu''(x) = 0; \quad (4.29)$$

$$\mu(l_0 + x_0) = f(x_0); \quad \mu'(l_0 + x_0) = f'(x_0);$$

$$\mu''(l_0 + x_0) = f''(x_0); \quad (4.30)$$

$$\mu(0) = 0; \quad \mu''(0) = 0. \quad (4.31)$$

В большинстве практических задач влияние на колебательный процесс силы натяжения преобладает над влиянием изгиба, поэтому безразмерная величина $\alpha^2 / (a l_0)$ мала. Учитывая данный факт и решая задачу (4.29), (4.30), (4.31), нетрудно прийти к следующим оценкам:

$$x_0 \approx \alpha^2 / a^2; \quad R \approx 1 / (x_0 r); \quad \beta \approx x_0^2 / l^2; \quad b = A x_0 r / l^3,$$

где $l = l_0 + x_0$.

Для систем, встречающихся на практике, параметры β и b , как правило, лежат в пределах

$$0 \leq \beta \leq 0,014; \quad 0 \leq b \leq 0,004.$$

Максимальные значения β и b встречаются крайне редко. Кроме того, при малых β изгибная жёсткость мала, и ею можно пренебречь. Поэтому диапазон указанных выше величин можно несколько сузить:

$$0,007 \leq \beta \leq 0,014; \quad 0 \leq b \leq 0,003.$$

После введения безразмерных переменных вида (4.26) задача по определению $Z(\xi, \tau)$ примет вид

$$Z_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0;$$

$$Z(1, \tau) = b^2 Z_{\xi\xi}^2(1, \tau) / \left\{ 6 \left[1 - b Z_{\xi\xi\xi\xi}(1, \tau) \right]^2 \right\}; \quad (4.32)$$

$$Z_{\xi}(\xi, \tau) = -b Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) / \left\{ 2 \left[1 - b Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) \right] \right\}; \quad (4.33)$$

$$Z(0, \tau) = 0; \quad Z_{\xi\xi}(0, \tau) = 0.$$

Будем искать периодическое решение в виде

$$Z(\xi, \tau) = \psi(\xi) \cos \omega \tau, \quad (4.34)$$

где $\psi(\xi)$ с учётом дифференциального уравнения и условий при $\xi = 0$ имеет вид

$$\psi(\xi) = C \operatorname{sh} k_1 \xi + \sin k_2 \xi. \quad (4.35)$$

Здесь

$$k_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + 4\omega^2 \beta}}{2\beta}}; \quad k_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + 4\omega^2 \beta}}{2\beta}}.$$

Теперь необходимо найти такие C и ω , чтобы решение (4.34) как можно лучше в среднем квадратическом удовлетворяло условиям (4.32), (4.33). Подставим (4.34) в эти условия. После преобразований будем иметь:

$$F_1(C, \omega, \xi) \Big|_{\xi=1} = 0;$$

$$F_2(C, \omega, \xi, \tau) \Big|_{\xi=1} = 0,$$

где

$$F_1(C, \omega, \xi) = \psi'^2(\xi) - 3\psi(\xi)\psi''(\xi)/2;$$

$$F_2(C, \omega, \xi, \tau) = \psi'(\xi) - b \cos(\omega\tau) [\psi'(\xi)\psi''(\xi) - 0,5\psi''^2(\xi)].$$

Составим выражение

$$F(C, \omega, \xi) = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [F_1^2(C, \omega, \xi) + F_2^2(C, \omega, \xi, \tau)] d\tau. \quad (4.36)$$

После преобразований получим:

$$F(C, \omega, \xi) = \psi'^2(\xi) + [\psi'^2(\xi) - 1,5\psi(\xi)\psi''(\xi)]^2 + \\ + 0,5b^2 [\psi'(\xi)\psi''(\xi) - 0,5\psi''^2(\xi)]^2.$$

Так как функция $F_1^2 + F_2^2$ является периодической по времени, то здесь произведено усреднение ее величины по периоду $2\pi / \omega$.

Теперь C и ω необходимо определить из условия минимума выражения (4.36) при $\xi = 1$.

Уравнение $F(C, \omega, \xi)|_{\xi=1} = \min$ было решено с применением разработанного программного комплекса относительно первой собственной частоты. Полученные результаты сведены в таблицу 4.1.

Таблица 4.1. Результаты численного решения уравнения $F(C, \omega, \xi)|_{\xi=1} = \min$ относительно первой собственной частоты

$b \backslash \beta$	0,007	0,008	0,009	0,010	0,011	0,012	0,013	0,014
0,0000	3,545	3,585	3,623	3,659	3,696	3,732	3,765	3,799
0,0005	3,543	3,584	3,622	3,658	3,695	3,731	3,764	3,798
0,0010	3,539	3,581	3,620	3,656	3,692	3,728	3,763	3,797
0,0015	3,533	3,579	3,617	3,653	3,689	3,725	3,761	3,794
0,0020	3,525	3,572	3,611	3,650	3,686	3,722	3,755	3,791
0,0025	3,515	3,563	3,602	3,641	3,677	3,713	3,749	3,785
0,0030	3,493	3,533	3,583	3,626	3,665	3,704	3,740	3,776

Максимальная относительная погрешность (отношение величины $F(C, \omega, \xi)|_{\xi=1}$ к $F(C, \omega, \xi)|_{\xi=0,5}$) наблюдается при $b=0,003$; $\beta=0,007$ и составляет 0,015. Поскольку эта погрешность оказалась небольшой,

выражение (4.34) при вычисленных ω и C можно с достаточной степенью точности считать приближённым решением рассматриваемой задачи.

Анализируя данные, представленные в таблице 4.1., можно сделать следующие выводы:

1) при $b = 0$ собственные частоты совпадают с частотами, полученными для граничных условий:

$$Z(1, \tau) = 0; \quad Z_{\xi}(1, \tau) = 0; \quad (4.37)$$

2) с увеличением параметра β (что эквивалентно увеличению жесткости на изгиб) собственные частоты увеличиваются;

3) при увеличении параметра b (что соответствует увеличению амплитуды колебаний) собственные частоты незначительно снижаются, причем это изменение не превышает 2% от максимального значения;

4) граничные условия, возникающие при взаимодействии струны с цилиндрической опорой, такой как ролик или шкив, можно записать в виде (4.37), погрешность решения при этом будет увеличиваться с увеличением b и с уменьшением β .

4.2. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением

В работе исследованы закономерности отражения волн от движущихся границ в системах, колебания которых описываются волновым уравнением.

Пусть колебательные процессы системы описываются волновым уравнением:

$$U_{tt}(x, t) - a^2 U_{xx}(x, t) = 0, \quad (4.38)$$

где t – время, x – пространственная координата.

Колеблющийся объект (струна, стержень) с одной стороны не ограничен, а вторая граница движется по закону $x = l(t)$.

На движущуюся границу падает синусоидальная волна $g(x + at)$, где

$$g(z) = A \sin(wz + \gamma), \quad (4.39)$$

а от границы отражается волна $q(x - at)$.

Ставится задача о нахождении изменения энергии отраженной волны по сравнению с падающей при равномерном и периодическом движении границы.

Решение уравнения (4.38) записывается в виде:

$$U(x, t) = g(x + at) + q(x - at). \quad (4.40)$$

Энергия участка объекта ($x \in [a; b]$) находится по формуле:

$$W = \frac{1}{2} \rho \int_a^b (a^2 U_x^2(x, t) + U_t^2(x, t)) dx, \quad (4.41)$$

где ρ – линейная плотность массы объекта.

После подстановки в (4.41) выражения (4.40) получим:

$$W = \frac{1}{2} \rho a^2 \int_a^b ((g'(x + at))^2 + (q'(x - at))^2) dx.$$

Таким образом энергия системы состоит из двух частей, т.е. из энергии падающей волны и энергии отраженной волны:

$$W_{nad.} = \frac{1}{2} \rho a^2 \int_a^b (g'(x + at))^2 dx; \quad (4.42)$$

$$W_{omp.} = \frac{1}{2} \rho a^2 \int_a^b (q'(x - at))^2 dx. \quad (4.43)$$

Будем использовать также безразмерную характеристику

$$W_0 = \frac{W_{omp.}}{W_{nad.}} \quad (4.44)$$

и безразмерные переменные:

$$U(x, t) = AY(\xi, \tau); \quad \tau = wat; \quad \xi = wx; \quad p = wz; \quad q(z) = AQ(p); \quad g(z) = AG(p).$$

При этом выражения (4.38), (4.39), (4.40), (4.44) примут следующий вид:

$$Y_{\tau\tau}(\xi, \tau) - Y_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (4.45)$$

$$G(p) = \sin(p + \gamma); \quad (4.46)$$

$$Y(\xi, \tau) = G(\xi + \tau) + Q(\xi - \tau); \quad (4.47)$$

$$W_{\text{над.}} = C \int_{a_0}^{b_0} (G'(\xi + \tau))^2 d\xi; \quad W_{\text{отр.}} = C \int_{a_0}^{b_0} (Q'(\xi - \tau))^2 d\xi;$$

где $C = \frac{1}{2} \rho a^2 A^2 w$; $a_0 = wa$; $b_0 = wb$.

Рассмотрим граничное условие на движущейся границе вида

$$U(l(t), t) = 0 \quad (4.48)$$

при равномерном движении границы $l(t) = Vt$.

В безразмерных переменных граничное условие будет иметь вид:

$$Y(L(\tau), \tau) = 0, \quad (4.49)$$

где

$$L(\tau) = \alpha\tau, \quad \alpha = V/a \quad (\alpha < 1). \quad (4.50)$$

Подставим решение (4.47) в граничное условие (4.49). В результате получим:

$$G(L(\tau) + \tau) + Q(L(\tau) - \tau) = 0. \quad (4.51)$$

Обозначим $P = (L(\tau) - \tau)$ и найдем отсюда τ : $\tau = \varphi(P)$.

Выразим: $L(\tau) + \tau = P + 2\varphi(P)$. При законе движения границы

$$\varphi(P) = \frac{z}{\alpha - 1} \quad \text{уравнение (4.51) примет вид: } Q(P) = -G\left(\frac{\alpha + 1}{\alpha - 1}P\right).$$

С учетом того, что падающая волна определяется выражением (4.46), для отраженной волны получим:

$$Q(P) = -\sin\left(-\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}P + \gamma\right). \quad (4.52)$$

Анализ решения (4.52) показывает, что амплитуда при отражении от движущейся границы не изменяется, а частота изменяется согласно эффекту

Доплера в $\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha}$ раз. При движении границы навстречу волне ($\alpha > 0$) частота

увеличивается, а при движении со направлено волне ($\alpha < 0$) уменьшается.

Найдем изменение энергии одной падающей волны при отражении.

Длина падающей волны (4.46) равна 2π , а длина отраженной $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}2\pi$,

поэтому

$$W_{nad.} = C \int_0^{2\pi} \cos^2(P + \gamma) dP = C\pi; \quad (4.53)$$

$$W_{omp.} = C \int_0^{2\pi \frac{1-\alpha}{1+\alpha}} \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} P + \gamma \right) dP = C\pi \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \right);$$

$$W_0 = \frac{W_{omp.}}{W_{nad.}} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}.$$

Энергия системы увеличивается при движении границы навстречу волнам и убывает при со направленном движении.

Рассмотрим периодическое движение границы

$$l(t) = B \sin(\omega t). \quad (4.54)$$

Согласуем движение границы с набегающими волнами таким образом, чтобы за время набега одной волны ($T = 2\pi / \omega a$) граница совершала целое число колебаний n . При этом

$$\omega = \omega a n. \quad (4.55)$$

Выражение (4.54) в безразмерных переменных ($L(\tau) = \omega l(t)$; $\tau = \omega a t$; $\xi = \omega x$) с учетом (4.55) будет иметь вид:

$$L(\tau) = \beta \sin(n\tau), \quad (4.56)$$

где $\beta = B\omega$.

При дозвуковом движении границы ($|L'(\tau)| < 1$) должно выполняться условие $\beta n < 1$.

Подставив (4.56) в граничное условие (4.52) для отраженной волны, получим:

$$Q(P) = -\sin(P + 2\varphi(P) + \gamma). \quad (4.57)$$

Функция $\varphi(P)$ задается неявно и определяется из уравнения:

$$\beta \sin(n\varphi(P)) - \varphi(P) = P. \quad (4.58)$$

Для нахождения энергии отраженной волны найдем из (4.58) $\varphi'(P)$ и из (4.57) $Q'(P)$:

$$\varphi'(P) = 1 / (\beta n \cos(\varphi(P)) - 1); \quad (4.59)$$

$$Q'(P) = -(1 + 2\varphi'(P)) \cos(P + 2\varphi(P) + \gamma). \quad (4.60)$$

Энергия падающей волны определяется выражением (4.53).

С учетом (4.59), (4.60) для энергии отраженной волны получим:

$$W_{\text{отп.}} = C \int_0^{2\pi} \left(\frac{\beta n \cos \varphi + 1}{\beta n \cos \varphi - 1} \cos(P + 2\varphi(P) + \gamma) \right)^2 dP. \quad (4.61)$$

Проанализируем выражение (4.61) на максимум в зависимости от β и γ при различных значениях n .

В результате численного решения установлено, что при любых значениях β максимум энергии отраженной волны достигается при $n=2$ при $\gamma = \pi/2$. Для других значений n максимум достигается при $\gamma = 0$. Причем также установлено, что функция $W_0(\gamma)$ периодическая с периодом π при любых значениях n .

Таблица 4.2, отображающая зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$, приведена ниже.

Таблица 4.2. Зависимость W_0 от β и γ при $n = 2$

$\beta \backslash \gamma$	0,000	0,045	0,090	0,135	0,180	0,225	0,270	0,315	0,360	0,405
0,00	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661
0,31	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,615	2,043	2,695	3,764	5,773
0,63	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,226	2,924	4,047	6,089
0,94	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,943	2,453	3,208	4,398	6,488
1,26	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,636	3,438	4,683	6,818
1,57	1,000	1,108	1,258	1,465	1,750	2,146	2,706	3,526	4,794	6,952

1,88	1,000	1,093	1,232	1,430	1,706	2,090	2,637	3,439	4,688	6,840
2,20	1,000	1,055	1,165	1,338	1,588	1,944	2,453	3,210	4,405	6,524
2,51	1,000	1,008	1,082	1,224	1,443	1,762	2,227	2,926	4,054	6,125
2,83	1,000	0,969	1,015	1,132	1,325	1,616	2,044	2,696	3,769	5,795
3,13	1,000	0,955	0,989	1,096	1,280	1,559	1,973	2,608	3,658	5,661

4.3. Выводы по четвертой главе

1. Разработанный в общем виде метод преобразования переменных для систем с равномерно движущимися границами и равными скоростями, позволяет свести задачу для дифференциального уравнения в частных производных к решению двухточечной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения и находить собственные частоты объекта, что существенно расширяет аналитические возможности исследования.

2. Теоретически обоснованные граничные условия, возникающие при взаимодействии колеблющейся струны, обладающей изгибной жесткостью, с роликовой опорой, позволяют более точно описывать реальные физические процессы в передачах с гибкой связью, системах перемотки и других технических устройствах, что значительно повышает адекватность математических моделей.

3. Исследование волновых процессов в системах, колебания которых описываются волновым уравнением, выявило фундаментальные закономерности изменения энергии при отражении волн от движущихся границ. Установленные зависимости энергетических характеристик от направления и характера движения границ позволяют создать основу для оптимизации рабочих параметров различных механических устройств.

Глава 5

Нелинейные математические модели продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами

В работе с помощью вариационного принципа Остроградского–Гамильтона [212, 244] произведена постановка задачи, описывающей продольные колебания конического стержня переменной длины, учтена геометрическая нелинейность в задаче о колебаниях нагруженной балки с движущейся границей, получена постановка задачи о колебаниях вязкоупругой балки с движущейся подпружиненной опорой, несущей присоединенную массу, а также сделан подробный анализ известного точного решения задачи о продольно–поперечных колебаниях струны с движущейся границей, с учётом геометрической нелинейности.

Разработанные математические модели позволяют описывать колебания высокой интенсивности, а также учитывать взаимодействие между продольными и поперечными колебаниями, геометрическую нелинейность и энергетический обмен между частями колеблющегося объекта, расположенными слева и справа от подвижной границы.

Разработан численный метод решения указанных задач, позволяющий решать задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейными граничными условиями. Численное решение производилось в разработанном в среде MATLAB программном комплексе TB–ANALYSIS–7.

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [10, 15, 19, 20, 121, 127, 135, 147–153, 163, 165, 169–175].

5.1. Исследование корректности описания колебаний объектов с движущимися границами волновым уравнением

Принцип стационарного действия (вариационный принцип Остроградского–Гамильтона) для сосредоточенных систем формулируется следующим образом [38, 99]: среди всех возможных движений системы истинным является то, при котором

$$\int_{t_0}^{t_1} \delta L dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i dt.$$

Здесь q_i – обобщенные координаты системы, число которых равно числу степеней свободы; Q_i – обобщенные силы; $Q_i \delta q_i$ – работа силы при виртуальном перемещении δq_i ; L – функция Лагранжа системы, равная разности ее кинетической и потенциальной энергий.

В главе 7 и в работах [20, 121, 123] показано, что при описании колебаний объектов волновым уравнением в случаях, когда скорость движения границы стремится к скорости распространения волн или при стремлении длины объекта к нулю, энергия колебаний стремится к бесконечности. Однако в реальных условиях такое явление невозможно. Для корректного описания подобных случаев требуется учитывать множество факторов, влияющих на колебания. В данной работе произведена постановка задачи, описывающей продольно–поперечные колебания струны с учётом геометрической нелинейности. Разработанная математическая модель позволяет исследовать колебания большой интенсивности систем движущимися границами. Решение задачи выполнено с использованием численного метода, рассмотренного в разделе 5.5, который интегрирован в программный комплекс TB–ANALYSIS–7. Путем сравнения точного решения волнового уравнения с численным

решением нелинейной задачи проведено исследование корректности описания интенсивных колебаний с помощью волнового уравнения.

Рассмотрим колебания струны, изображенной на рисунке 5.1. Характер взаимодействия струны с движущейся границей такой, что продольные волны свободно проходят через границу, а поперечные волны нет.

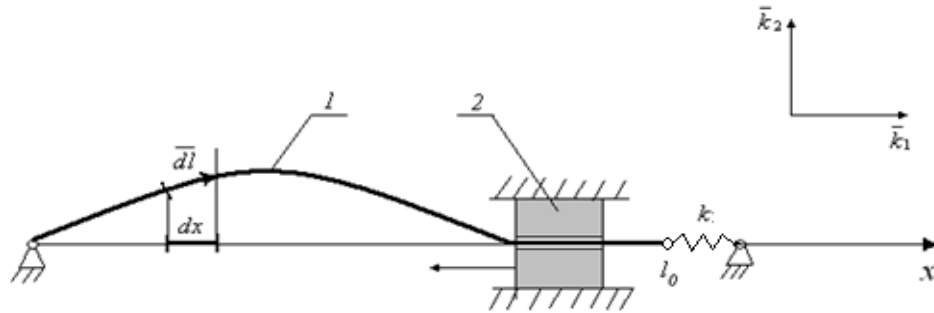


Рис.5.1. Модель для описания продольно–поперечных колебаний струны

На рисунке 5.1 обозначено: 1 – струна; 2 – граница, движущаяся по закону $x = l(t)$; l_0 – длина струны; \bar{k}_1, \bar{k}_2 – базисные векторы; x – расстояние от левой границы до точки струны, находящейся в положении равновесия; t – время; dx – дифференциальный элемент струны, находящейся в положении равновесия; \bar{dl} – элементарный вектор, в который перейдет элемент dx в момент времени t ; k – жёсткость упругого присоединения струны к правой неподвижной границе.

Используя представленную модель, можно проводить расчёты колебаний для различных систем, таких как тесёмочные передачи, нити в швейных машинах, струны музыкальных инструментов и других аналогичных объектов.

Обозначим через $u_1(x, t)$; $u_2(x, t)$ – смещения точек струны в направлении базисных векторов \bar{k}_1, \bar{k}_2 . Тогда элементарный вектор \bar{dl} будет равен:

$$\bar{dl} = (1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}) dx \bar{k}_1 + u_{2,x} dx \bar{k}_2,$$

где ε_0 – первоначальная продольная деформация струны, создающая натяжение $T_0 = ES\varepsilon_0$; E – модуль упругости материала струны; S – площадь поперечного сечения; $u_{1,x}, u_{2,x}$ – частные производные функций по x .

Деформация элемента dx в момент времени t будет равна:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{|\overline{dl}| - dx}{dx} = \sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} - 1. \quad (5.1)$$

Для получения системы дифференциальных уравнений, описывающих колебания струны, применим вариационный принцип Остроградского–Гамильтона. Функция Лагранжа, которая определяется как разность между кинетической и потенциальной энергиями струны, записывается в следующем виде:

$$L = \int_0^{l_0} \left(\frac{1}{2} \rho S (u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2) - \frac{1}{2} ES \varepsilon^2(x, t) \right) dx,$$

где ρ – плотность массы материала струны.

Интеграл действия, с учетом выражения (5.1), выразится двухкратным интегралом:

$$I\{u_1, u_2\} = \int_0^{t_1} dt \int_0^{l_0} \left(\frac{1}{2} \rho S (u_{1,t}^2 + u_{2,t}^2) - \frac{1}{2} ES \left(\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2} - 1 \right)^2 \right) dx.$$

Найдем вариации интеграла действия по u_1 и u_2 . Выполним стандартную процедуру интегрирования по частям. Приравняв вариации к нулю, получим следующую систему дифференциальных уравнений, которая описывает продольно–поперечные колебания струны:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho S u_{1,tt} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2}} \right) (1 + \varepsilon_0 + u_{1,x}) \right) = 0; \\ \rho S u_{2,tt} - ES \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + u_{1,x})^2 + u_{2,x}^2}} \right) u_{2,x} \right) = 0; \\ u_2 = 0 \text{ если } x > l(t). \end{array} \right. \quad (5.2)$$

При выводе системы (5.2) пренебрежение малыми величинами сделано не было, что позволяет использовать её для описания колебаний струны высокой интенсивности.

Граничные условия для u_1 , с учетом свободного прохождения продольных волн через движущуюся границу, будут иметь вид:

$$u_1(0, t) = 0; \quad ES(\varepsilon_0 + u_{1,x}(l_0, t)) + k(u_1(l_0, t) + u_0) = 0, \quad (5.3)$$

где $u_0 = -ES\varepsilon_0 / k$. Введение u_0 сделано для того, чтобы компенсировать первоначальную силу натяжения $T_0 = ES\varepsilon_0$.

Для функции u_2 граничные условия первого рода задаются на левой и движущейся границе:

$$u_2(0, t) = 0; \quad u_2(l(t), t) = 0. \quad (5.4)$$

Начальные условия зададим в виде:

$$u_1(x, 0) = 0; \quad u_{1,t}(x, 0) = 0; \quad u_2(x, 0) = \varphi(x); \quad u_{2,t}(x, 0) = 0. \quad (5.5)$$

Введем в задачу (5.2–5.5) безразмерные переменные:

$$\xi = \frac{x}{l(0)}; \quad \tau = \frac{a}{l(0)}t; \quad U_n(\xi, \tau) = \frac{1}{l(0)}u_n(x, t);$$

$$\psi(\xi) = \frac{\varphi(x)}{l(0)}; \quad L(\tau) = \frac{1}{l(0)}l(t); \quad L_0 = \frac{l_0}{l(0)}; \quad U_0 = \frac{u_0}{l(0)}; \quad K = \frac{kl(0)}{ES},$$

где $n = \overline{1, 2}$; $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость продольных волн.

В результате получим следующую задачу:

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{1,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) (1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi}) \right) = 0; \\ U_{2,\tau\tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}} \right) U_{2,\xi} \right) = 0; \\ U_2 = 0, \text{ если } \xi > L(\tau), \end{array} \right. \quad (5.6)$$

$$U_1(0, \tau) = 0; U_{1,\xi}(L_0, \tau) + KU_1(L_0, \tau) = 0; U_2(0, \tau) = 0; U_2(L(\tau), \tau) = 0, \quad (5.7)$$

$$U_1(\xi, 0) = 0; U_{1,\tau}(\xi, 0) = 0; U_2(\xi, 0) = \psi(\xi); U_{2,\tau}(\xi, 0) = 0. \quad (5.8)$$

В случае малых смещений из системы (5.6) нетрудно получить наиболее часто используемые для описания колебаний волновые уравнения.

Принимая $1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi} = 1 + \varepsilon_0; U_{2,\xi}^2 = 0$, получим уравнения малых продольных и поперечных колебаний струны:

$$\begin{aligned} U_{1,\tau\tau} - U_{1,\xi\xi} &= 0; \\ U_{2,\tau\tau} - c^2 U_{2,\xi\xi} &= 0, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где $c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}}$ – безразмерная скорость поперечных волн.

Точное решение задачи о колебаниях струны с равномерно движущейся границей для волнового уравнения известно [11,13], разделы 3.6., 3.7. Так для задачи (5.9), (5.7), (5.8) при $L(\tau) = 1 + v\tau$ решение имеет вид:

$$U_2(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau),$$

где

$$\begin{aligned} V_n(\xi, \tau) = \sin(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) - \varphi(c\tau - \xi))) & \left(A_n \cos(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) + \varphi(c\tau - \xi))) \right) + \\ & + B_n \sin(\pi n(\varphi(c\tau + \xi) + \varphi(c\tau - \xi))) \end{aligned}$$

$$\varphi(z) = \frac{\ln((\alpha z + 1)/(1 - \alpha))}{\ln((1 + \alpha)/(1 - \alpha))} + 1; \alpha = \frac{v}{c}; c = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}}.$$

Заметим, что функция $\varphi(z)$ удовлетворяет функциональному уравнению

$$\varphi(c\tau + L(\tau)) = \varphi(c\tau - L(\tau)) + 1.$$

Коэффициенты A_n, B_n находятся из начальных условий. Скорость распространения малых поперечных волн равна c . Анализ решения показывает, что с изменением длины струны максимальное значение $U_2(\xi, \tau)$ (размах колебаний) не изменяется.

Представим динамические моды в виде:

$$V_n(\xi, \tau) = 0,5\sqrt{A_n^2 + B_n^2} \left(\sin(2\pi n(\varphi(c\tau + \xi) - \varphi_0)) - \sin(2\pi n(\varphi(c\tau - \xi) - \varphi_0)) \right), \quad (5.10)$$

где

$$\varphi_0 = 2\pi n\varphi(\xi_n) - \frac{\pi}{2}; \xi_n = \frac{B-1}{\alpha(B+1)}; B = \left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Значение φ_0 подобрано таким образом, чтобы при $\tau = 0$ струна находилась в положении максимального отклонения. Максимальное отклонение $A_{0n} = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$ имеет место в точке ξ_n . Решение проводилось с помощью разработанного программного комплекса TB-ANALYSIS-7.

Динамические моды в момент максимального отклонения совпадают при положительных и отрицательных α . На рисунке 5.2 изображены первые динамические моды в момент первого максимального отклонения ($\tau = 0$). Обозначенные номерами линии (рисунок 5.2):

1. $n = 1, \alpha = \pm 0.1$;
2. $n = 1, \alpha = \pm 0.9$;
3. $n = 1, \alpha = \pm 0.99$;
4. $n = 2, \alpha = \pm 0.1$;
5. $n = 2, \alpha = \pm 0.9$

Точка максимального отклонения при увеличении α смещается в сторону движущейся границы. С течением времени происходит или растяжение, при $\alpha > 0$, или сжатие, при $\alpha < 0$ динамических мод по оси ξ . В момент максимального отклонения $V_{n,\tau}(\xi, \tau)$ равны нулю только в точках $\xi = 0$ и $\xi = \xi_n$.

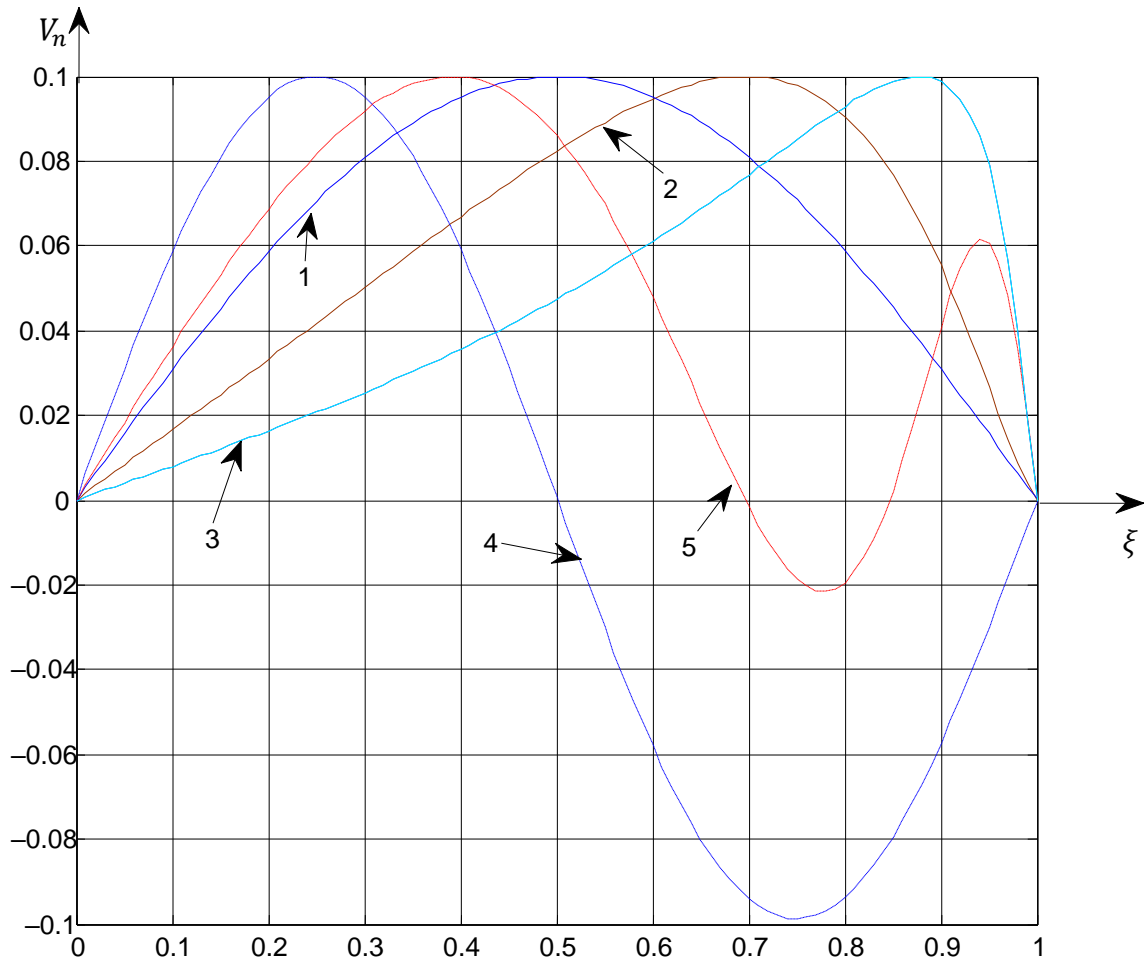


Рис.5.2. Динамические моды в момент первого максимального отклонения

В таблице 5.1 приведены скорости струны в момент максимального отклонения (строка А) и в момент прохождения положения равновесия (строки В).

Таблица 5.1. Скорости струны в момент максимального отклонения (строка А) и в момент прохождения положения равновесия (строки В).

$\xi = L(\tau)/l(0)$		0.0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
$\alpha = \pm 0.1$	А	0	∓ 0.0032	∓ 0.0024	∓ 0.00004	± 0.0031	± 0.0091	± 0.0090
$\alpha = 0.1$	В	0	-0.050	-0.081	-0.086	-0.082	-0.050	+0.0010
$\alpha = -0.1$		0	-0.055	-0.090	-0.094	-0.090	-0.056	+0.0012

На рисунке 5.3 изображён процесс колебаний на первой динамической моде ($n=1$), при $A_{0n} = 0.1$, $\alpha = 0.9$, $c = 0.01$. Кривые на рисунке 5.3 отображают положение точек струны в моменты времени от 0 до 2000 с интервалом 100.

Особенностью объектов с движущимися границами является то, что точки объекта не проходят положение равновесия одновременно. Это связано с увеличением длины струны, что приводит к уменьшению интенсивности колебаний.

Энергия колебаний определяется следующим выражением (раздел 4.2.):

$$W(\tau) = \left(\frac{A_{0n} c \pi n \alpha}{1 + \alpha} \right)^2 \frac{2}{bL(\tau)} \left(\frac{1}{b} + \cos(4\pi n \varphi(c\tau - L(\tau)) - 2\varphi_0 - \theta) \right), \quad (5.11)$$

где $b = \ln((1 - \alpha)/(1 + \alpha))$, $\theta = \arcsin \frac{4\pi n}{b^2 + 8\pi^2 n^2}$.

Анализ выражения (5.11) показывает, что при $\alpha \rightarrow -1$ и при $L(\tau) \rightarrow 0$ энергия колебаний стремится к бесконечности, чего в реальных системах быть не может. Происходит нарушение корректности описания колебаний линейной моделью. При переходе от нелинейной модели (5.6) к линейной (5.9)

произведена замена выражения $1 - \frac{1}{\sqrt{(1 + \varepsilon_0 + U_{1,\xi})^2 + U_{2,\xi}^2}}$ выражением

$\frac{\varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}$. В линейной модели $U_{1,\xi} = 0$.

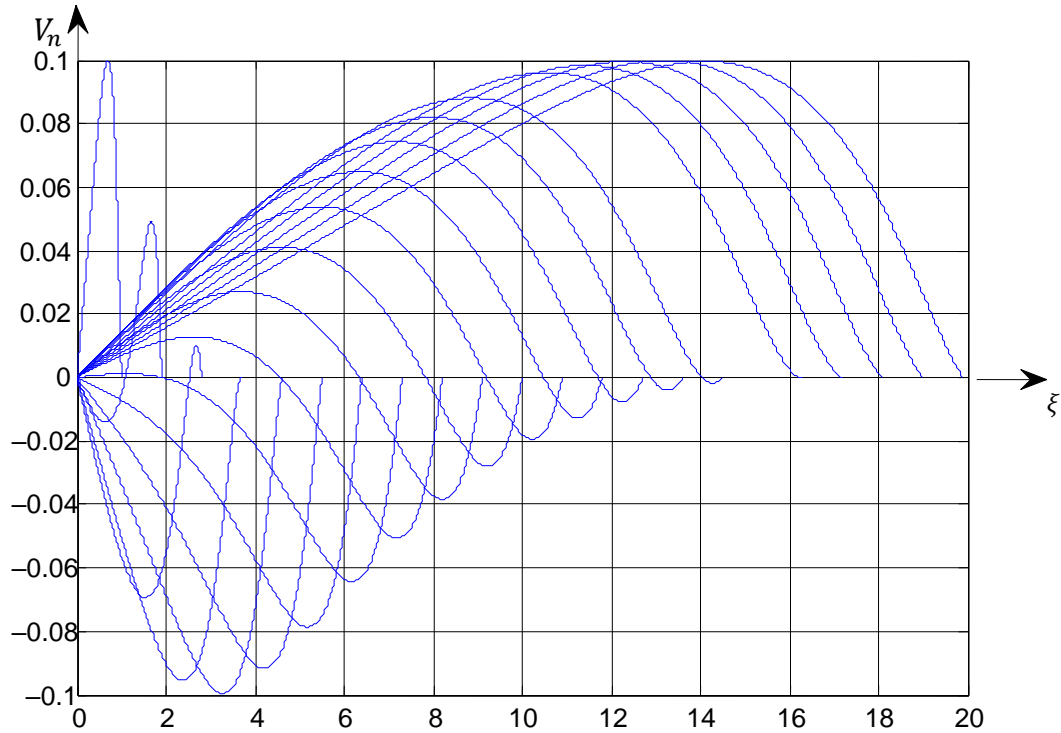


Рис.5.3. Процесс колебаний на первой динамической моде ($n=1$), при
 $A_{0n} = 0.1, \alpha = 0.9, c = 0.01$

Относительная погрешность замены находится по формуле:

$$\delta(\varepsilon_0, U_{2,\xi}) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 + U_{2,\xi}^2}} - \frac{\varepsilon_0}{1+\varepsilon_0} \right) / \left(1 - \frac{1}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2 + U_{2,\xi}^2}} \right). \quad (5.12)$$

Дифференцируя выражение (5.10) по ξ в точке $\xi = L(\tau)$ (в данной точке $V_{n,\xi}(L(\tau), \tau)$ максимально) получим:

$$V_{n,\xi}(L(\tau), \tau) = -A_{0n} \pi n \frac{2\alpha}{\ln((1+\alpha)/(1-\alpha)) L(\tau) (1-\alpha^2)} \cos(2\pi n \varphi(c\tau + L(\tau)) - \varphi_0).$$

При увеличении длины струны ($\alpha > 0$) интенсивность колебаний снижается. Если $\alpha < 0$, то, несмотря на общую тенденцию роста $W(\tau)$ и $V_{n,\xi}$, увеличение интенсивности происходит обратно пропорционально $L(\tau)$, но не является непрерывным. В момент наибольшего отклонения от положения равновесия наблюдается максимальное увеличение интенсивности колебаний. Однако при прохождении положения равновесия за счёт поглощения

кинетической энергии границей интенсивность колебаний уменьшается. При стремлении $L(\tau)$ к нулю, $V_{n,\xi}$ стремится к бесконечности. Погрешность линеаризации $\delta(\varepsilon_0, U_{2,\xi})$ возрастает, и в определённый момент линейная модель становится неприменимой.

Для изучения корректности линейной модели нелинейная задача (5.6)–(5.8) решалась численно. Для того, чтобы решения линейной и нелинейной задачи в начальный момент времени совпадали, функция $\psi(\xi)$, определяющая начальные условия (5.8), задавалась в виде $\psi(\xi) = V_n(\xi, 0)$. Здесь $V_n(\xi, \tau)$ определяется выражением (5.10). Сравнением решений линейной и нелинейной задач изучалась корректность линейной модели.

Периоды колебаний в случае неподвижности границы ($L(\tau)=1$) для линейной модели равны

$$T_n = 2n \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_0}{\varepsilon_0}}, \quad (5.13)$$

где n – номер собственного колебания.

В таблице 5.2 приведены периоды собственных колебаний при $n=1$, вычисленные по формуле (5.13) и с помощью численного решения нелинейной задачи при $K \rightarrow \infty$ и $L_0 = 2.5$.

Таблица 5.2. Периоды собственных колебаний

$\varepsilon_0 \backslash A$	Знач. (5.13) $n=1$	0.0001	0.004	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
0.0001	200.0	200.0	167.8	145.8	94.3	67.3	51.9	41.8
0.0004	100.0	100.1	98.6	90.7	72.9	58.1	47.4	39.7
0.0009	66.7	66.8	66.4	63.8	56.6	48.7	41.9	35.5
0.0016	50.0	50.1	50.0	48.9	45.4	41.0	36.5	32.6
0.01	20.1	20.2	20.2	20.1	19.8	19.4	18.9	18.3

Анализ табличных данных демонстрирует, что при малой амплитуде колебаний ($A=0.0001$) периоды, рассчитанные численно и по формуле (5.13), практически совпадают. Это свидетельствует о высокой точности численного решения. С увеличением амплитуды поперечных колебаний происходит удлинение струны, что приводит к росту натяжения и, как следствие, уменьшению периода колебаний. Точность линейной модели повышается с увеличением ε_0 и уменьшением амплитуды A .

В таблице 5.3 приведены моменты времени τ_n прохождения серединой струны положения равновесия. В таблице обозначено: Л–решение линейной задачи, полученное по формуле (5.10), Н– численное решение нелинейной задачи.

Сравнение решения, полученного по формуле (5.10) (строка Л1) и численного решения (строка Н1) показывает, что при малых A решения практически совпадают, что говорит о достаточной точности численного решения. Прохождение через положение равновесия продольно–поперечных колебаний происходит с опережением, которое обеспечивается увеличением натяжения струны при уменьшении её длины.

Таблица 5.3. Моменты времени прохождения струной положения равновесия в зависимости от ε_0, A и $\alpha = v/a$

	α	ε_0	n A	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Л1	-0.1	0.0009	0.001	17.9	48.0	75.3	99.9	122.2	142.4	160.6	177.1	192.1	205.6
Н1	-0.1	0.0009	0.001	17.9	48.0	75.3	99.9	122.1	142.3	160.4	176.9	191.7	205.1
Л2	-0.1	0.0036	0.005	9.0	24.1	37.7	50.4	61.2	71.3	80.4	88.7	$\delta_{max} = 0.15$ $L(\tau_n) = 0.43$	
Н2	-0.1	0.0036	0.005	8.9	23.9	37.4	49.6	60.6	70.7	79.6	87.8		
Л3	-0.1	0.0025	0.005	10.8	28.9	60.0	73.4	85.5	96.5	$\delta_{max} = 0.14$ $L(\tau_n) = 0.55$			
Н3	-0.1	0.0025	0.005	10.7	28.5	59.2	72.3	84.2	95.0				
Л4	-0.1	0.0025	0.01	10.8	28.9	45.2	60.0	$\delta_{max} = 0.27$ $L(\tau_n) = 0.75$					
Н4	-0.1	0.0025	0.01	10.3	27.6	43.3	57.2						

На рисунке 5.4 показано изменение энергии колебаний нелинейной модели (линия 1) и линейной модели (линия 2) с течением времени. Графики получены при следующих значениях параметров:

$$n = 1, A_{01} = 0.005, \varepsilon_0 = 0.01, c = 0.1, \alpha = -0.1.$$

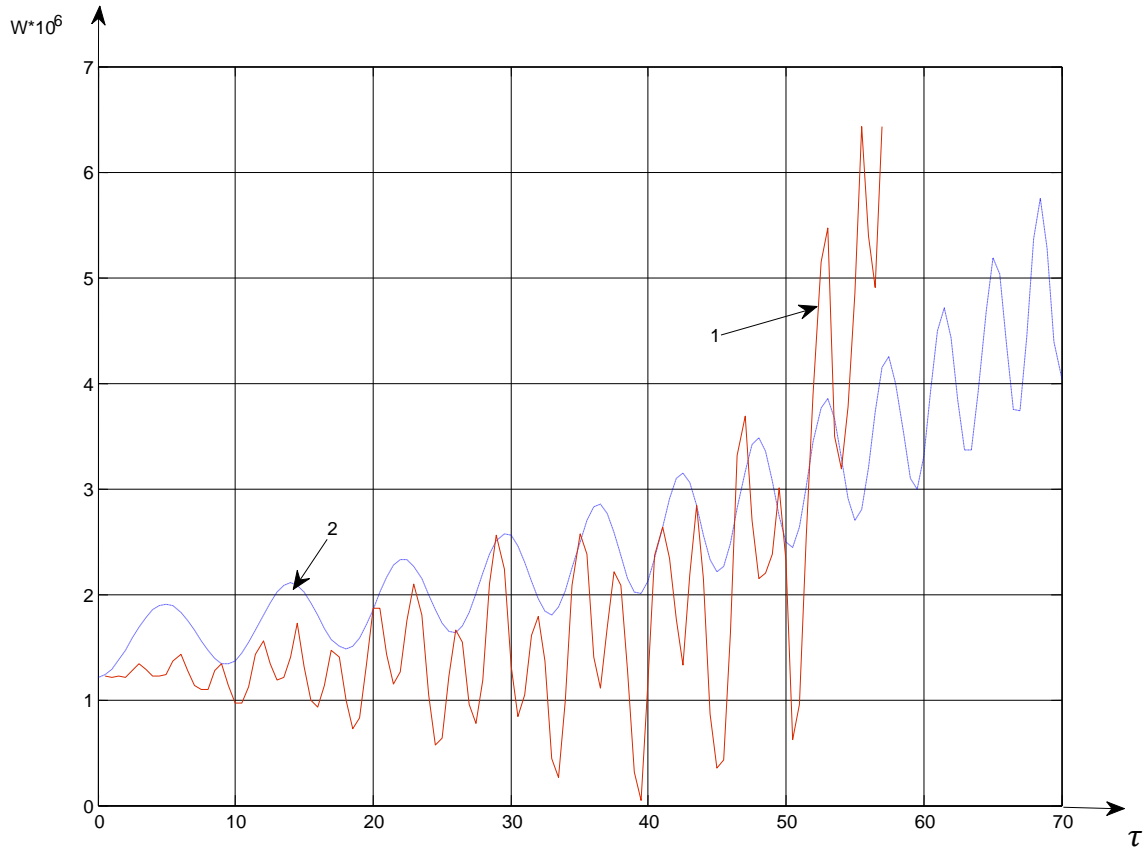


Рис.5.4. Изменение энергии колебаний нелинейной модели (линия 1) и линейной модели (линия 2) с течением времени

Энергетический анализ показывает, что для линейной и нелинейной моделей общая динамика изменения энергии обратно пропорциональна длине струны $L(\tau)$. Периодичность изменения энергии обусловлена тем, что при максимальном отклонении энергия передаётся от движущейся границы к струне, а при прохождении положения равновесия кинетическая энергия струны поглощается границей. В нелинейной модели амплитуда колебаний энергии выше, что вызвано взаимодействием продольных и поперечных

колебаний. Это взаимодействие создаёт более сложную динамику системы, увеличивая размах изменений энергии по сравнению с линейной моделью.

При описании колебаний волновым уравнением (5.9) продольная деформация неизменна и равна ε_0 . При рассмотрении продольно–поперечных колебаний относительное удлинение, описываемое выражением (5.1), зависит как от ξ так и от τ . В каждый момент времени относительное удлинение в зависимости от ξ имеет минимальное значение $\varepsilon_{min}(\tau)$ и максимальное $\varepsilon_{max}(\tau)$. При уменьшении длины струны размах продольных колебаний увеличивается. В какой–то момент времени в струне возникают отрицательные (сжимающие) напряжения. При этом колебания теряют устойчивость, и в процессе численных расчетов происходит сбой. Пустые клетки в таблице 5.3 соответствуют зоне потери устойчивости. В правых клетках таблицы 5.3 указаны длина струны $L(\tau_n)$ и максимальная погрешность δ_{max} , определяемая выражением (5.12), в момент потери устойчивости. В реальных системах потеря устойчивости приводит к резкому увеличению продольной деформации и разрыву колеблющегося элемента. При увеличении длины струны устойчивость не нарушается.

На рисунке 5.5 изображены зоны устойчивости и неустойчивости колебаний в координатах $L(\tau)$, ε_0 при безразмерной скорости движения границы $\alpha = -0.3$ и $K \rightarrow \infty$. Кривые, разделяющие области, получены при амплитудах A равных 0.005; 0.01 и 0.02. Зоны, лежащие выше кривых, соответствуют устойчивым колебаниям, а ниже неустойчивым. При нарушении устойчивости максимальная относительная погрешность линейной модели лежит в пределах от 0.4 до 0.6, что говорит о нарушении корректности линейной модели. Численное исследование колебаний в зависимости от K показывает, что при уменьшении K устойчивость уменьшается.

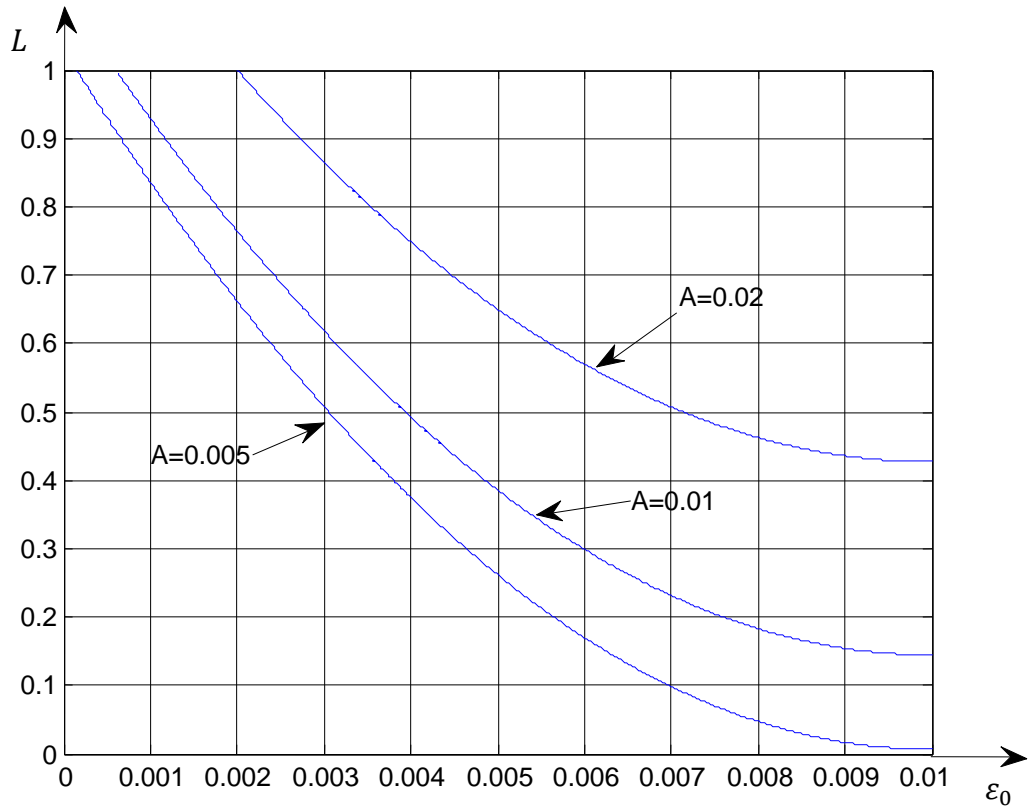


Рис.5.5. Зоны устойчивости и неустойчивости колебаний

Таким образом, сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей показал, что некорректности линейной модели обусловлены ростом натяжения струны при увеличении интенсивности колебаний, что не учитывается в линейном подходе. Корректность нелинейной модели нарушается при возникновении отрицательных продольных деформаций, что приводит к неустойчивости и хаотичности колебаний. Однако до момента появления неустойчивости нелинейная модель демонстрирует более высокую точность. Достоверность численного решения подтверждается совпадением результатов линейной и нелинейной моделей при малых амплитудах колебаний.

5.2. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях нагруженной балки с движущейся границей

Применим принцип Гамильтона к выводу уравнения колебаний упругой балки, изображенной на рисунке 5.6.

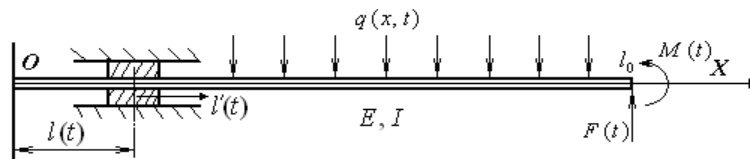


Рис. 5.6. Схема балки с движущейся границей

На рисунке 5.6 обозначено: E – модуль упругости материала балки; I – осевой момент инерции сечения балки; $q(x, t)$ – распределенная нагрузка; $F(t), M(t)$ – сила и момент, приложенные на правом конце балки; $l(t)$ – закон движения левой границы, l_0 – длина балки.

Выражение для интеграла действия от кинетической энергии балки имеет вид:

$$J_T = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} \rho u_t^2(x, t) dx,$$

где ρ – линейная плотность массы балки, $u(x, t)$ – поперечное смещение точек оси балки.

Для удобства далее, где это возможно, вместо $u(x, t)$ будем использовать u .

Найдем вариацию:

$$\delta J_T = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} \rho u_t \delta u_t dx.$$

Представим подинтегральное выражение в виде:

$$u_t \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} (u_t \delta u) - u_{tt} \delta u.$$

В итоге получим:

$$\delta J_T = \int_{l(t)}^{l_0} \rho u_t \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} \rho u_{tt} \delta u dx. \quad (5.14)$$

Согласно [85] кривизна изогнутой оси балки имеет вид:

$$k = \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}}.$$

Потенциальная энергия упругой балки пропорциональна квадрату кривизны. Следовательно, дифференциал dU_1 потенциальной энергии балки равен:

$$dU_1 = \frac{1}{2} EI \left[\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right]^2.$$

Интеграл действия для потенциальной энергии балки длиной $(l_0 - l(t))$ определяется выражением:

$$J_{U_1} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} EI \left[\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^{3/2}} \right]^2 dx.$$

Найдем вариацию:

$$\delta J_{U_1} = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} \left(EI \frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^3} \delta u_{xx} - 3EI \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1 + u_x^2)^4} \delta u_x \right) dx. \quad (5.15)$$

Преобразуем члены выражения (5.15):

$$\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^3} \delta u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^3} \delta u_x \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^3} \right) \delta u \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_{xx}}{(1 + u_x^2)^3} \right) \delta u; \quad (5.16)$$

$$\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1 + u_x^2)^4} \delta u_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1 + u_x^2)^4} \delta u \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1 + u_x^2)^4} \right) \delta u; \quad (5.17)$$

После подстановки равенств (5.16), (5.17) в выражение (5.15) и интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \delta J_{U_1} = & \int_{t_0}^{t_1} \left(EI \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \delta u_x \Big|_{l(t)}^{l_0} - EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) \delta u \Big|_{l(t)}^{l_0} - 3EI \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \delta u \Big|_{l(t)}^{l_0} \right) dt + \\ & + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} \left\{ EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) + 3EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \right) \right\} \delta u dx. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Силовые функции от действия $q(x,t), M(t), F(t)$ имеют вид:

$$q(x,t)u dx; M(t)u_x \Big|_{x=l_0}; -F(t)u \Big|_{x=l_0}.$$

Запишем интеграл действия для силовых функций:

$$J_{U_2} = \int_{t_0}^{t_1} \left(M(t)u_x \Big|_{x=l_0} - F(t)u \Big|_{x=l_0} \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} q(x,t)u dx.$$

При этом вариация равна

$$\delta J_{U_2} = \int_{t_0}^{t_1} \left(M(t)\delta u_x \Big|_{x=l_0} - F(t)\delta u \Big|_{x=l_0} \right) dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_{l(t)}^{l_0} q(x,t)\delta u dx.$$

Согласно принципу Гамильтона $\delta J_T - \delta J_{U_1} - \delta J_{U_2} = 0$.

Приравняв к нулю коэффициенты перед δu получим дифференциальное уравнение колебаний балки:

$$\rho u_{tt} + EI \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) + 3EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \right) - q(x,t) = 0. \quad (5.19)$$

Найдем начальные условия.

Приравняв к нулю первый интеграл равенства (5.14) и учитывая, что теоретически временной интервал не ограничен ($t_1 \rightarrow \infty$), имеем:

$$u_t(l(t_0), t_0) \delta u(l(t_0), t_0) = 0. \quad (5.20)$$

В данном равенстве функции должны быть заданы как начальные условия:

$$u(l(t_0), t_0) = \varphi_1(x); u_t(l(t_0), t_0) = \varphi_2(x), \quad (5.21)$$

поэтому $\delta u(l(t_0), t_0) = 0$. При этом уравнение (5.20) выполняется.

Найдем граничные условия.

Приравняв к нулю члены с $\delta u(l(t))$ и $\delta u'(l(t))$ получим:

$$\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \Big|_{x=l(t)} = 0; \quad (5.22)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) \Big|_{x=l(t)} + 3 \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \Big|_{x=l(t)} = 0. \quad (5.23)$$

Из выражений (5.22), (5.23) можем получить разнообразные естественные граничные условия при $x = l(t)$. Для балки на рисунке 5.6 они имеют вид:

$$u \Big|_{x=l(t)} = u_x \Big|_{x=l(t)} = 0. \quad (5.24)$$

Данные условия удовлетворяют уравнениям (5.22), (5.23).

Приравняв к нулю коэффициенты перед $\delta u \Big|_{x=l_0}$ и $\delta u_x \Big|_{x=l_0}$ получим граничные условия при $x = l_0$:

$$EI \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \Big|_{x=l_0} + M(t) = 0; \quad (5.25)$$

$$EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) \Big|_{x=l_0} + 3EI \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4} \Big|_{x=l_0} + F(t) = 0. \quad (5.26)$$

Если из (5.25), (5.26) выразить $M(t)$ и $F(t)$, то можно получить выражения для момента и перерезывающей силы, действующих в сечении сильно изогнутой балки

$$M(t) = -EI \frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3};$$

$$F(t) = -EI \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u_{xx}}{(1+u_x^2)^3} \right) - 3EI \frac{u_{xx}^2 u_x}{(1+u_x^2)^4}.$$

Если пренебречь нелинейными членами, то краевая задача примет вид:

$$\rho u_{tt} + EI u_{xxxx} - q(x,t) = 0;$$

$$u(l(t_0), t_0) = \varphi_1(x); u_t(l(t_0), t_0) = \varphi_2(x);$$

$$u \Big|_{x=l(t)} = u_x \Big|_{x=l(t)} = 0;$$

$$EI u_{xx} \Big|_{x=l_0} + M(t) = 0;$$

$$EI u_{xxx} \Big|_{x=l_0} + F(t) = 0,$$

что соответствует стандартной линейной постановке задачи о колебаниях балки.

Таким образом, для упругой балки, изображенной на рисунке 5.6, получено уравнение колебаний (5.19) при начальных условиях (5.21) и граничных условиях (5.24)–(5.26).

5.3. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о продольных колебаниях стержня конического сечения с движущейся границей

С помощью вариационного принципа Гамильтона произведена постановка задачи о продольных колебаниях стержня конического сечения с движущейся границей.

Для применения принципа Гамильтона потребуются вариации интеграла действия от кинетической и потенциальной энергии стержня.

Кинетическая энергия стержня

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \rho S(x) u_t^2(x, t) dx,$$

где ρ – линейная плотность массы стержня, $u(x, t)$ – продольное смещение точек оси стержня, $S(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2$ – переменная площадь поперечного сечения стержня в точке с координатой x , $l(t) = L - v_0 t$ – закон движения правой границы, L – первоначальная длина стержня, v_0 – скорость движения границы.

Выражение для интеграла действия от кинетической энергии стержня имеет вид:

$$J_T = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} \rho S(x) u_t^2(x, t) dx.$$

Для удобства далее, где это возможно, вместо $u(x, t)$ будем использовать u .

Найдем вариацию:

$$\delta J_T = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} \rho S(x) u_t \delta u_t dx.$$

Представим подинтегральное выражение в виде:

$$u_t \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} (u_t \delta u) - u_{tt} \delta u.$$

В итоге получим:

$$\delta J_T = \int_0^{l(t)} \rho S(x) u_t \delta u \Big|_{t_0}^{t_1} dx - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} \rho S(x) u_{tt} \delta u dx. \quad (5.27)$$

Дифференциал dU упругой потенциальной энергии при продольной деформации стержня задается соотношением

$$dU = \frac{1}{2} ES(x) u_x^2,$$

где E – модуль упругости материала стержня;

Интеграл действия для потенциальной энергии стержня длиной $l(t)$ определяется выражением:

$$J_U = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} ES(x) u_x^2 dx.$$

Вариация интеграла действия упругой деформации имеет вид:

$$\delta J_U = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} ES(x) u_x \delta u_x dx. \quad (5.28)$$

Преобразуем члены выражения (5.28):

$$S(x) u_x \delta u_x = \frac{\partial}{\partial x} (S(x) u_x \delta u) - \frac{\partial}{\partial x} (S(x) u_x) \delta u. \quad (5.29)$$

После подстановки равенства (5.29) в выражение (5.28) и интегрирования, получим:

$$\delta J_U = \int_{t_0}^{t_1} ES(x) u_x \delta u \Big|_0^{l(t)} dt - \int_{t_0}^{t_1} dt \int_0^{l(t)} E \frac{\partial}{\partial x} (S(x) u_x) \delta u dx. \quad (5.30)$$

Согласно принципу Гамильтона

$$\delta J_T - \delta J_U = 0.$$

Приравняв к нулю коэффициенты перед δu получим дифференциальное уравнение колебаний стержня:

$$\rho S(x)u_{tt} - E \frac{\partial}{\partial x}(S(x)u_x) = 0. \quad (5.31)$$

Найдем начальные условия.

Приравняв к нулю первый интеграл равенства (5.27) и учитывая, что теоретически временной интервал не ограничен ($t_1 \rightarrow \infty$), имеем:

$$u_t(l(t_0), t_0) \delta u(l(t_0), t_0) = 0. \quad (5.32)$$

В данном равенстве функции должны быть заданы как начальные условия:

$$u(l(t_0), t_0) = \varphi_1(x); u_t(l(t_0), t_0) = \varphi_2(x), \quad (5.33)$$

поэтому $\delta u(l(t_0), t_0) = 0$. При этом уравнение (5.32) выполняется.

Найдем граничные условия.

Приравняв к нулю коэффициенты перед $\delta u|_{x=0}$ и $\delta u|_{x=l(t)}$ получим граничные условия при $x=0$ и $x=l(t)$:

$$u_x|_{x=0} = 0; u_x|_{x=l(t)} = 0; \quad (5.34)$$

Таким образом краевая задача примет вид:

$$\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 u_{tt} - a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 u_x \right] = 0, \quad (5.35)$$

$$a^2 = \frac{E}{\rho};$$

$$u(l(t_0), t_0) = \varphi_1(x); u_t(l(t_0), t_0) = \varphi_2(x); \quad (5.36)$$

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l(t)} = 0. \quad (5.37)$$

Заметим, что для стержня постоянного, например, цилиндрического сечения, дифференциальное уравнение (5.35) примет классический вид:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

Начальные условия (5.36) и граничные условия (5.37) являются обобщенными. Например, при $\varphi_1(x) = 0$ и $\varphi_2(x) = 0$ начальные условия будут равны нулю.

Из выражений (5.37) можем получить разнообразные естественные граничные условия при $x = 0$ и $x = l(t)$. Граничные условия могут быть следующими [8, 89, 123, 125, 139]:

– стержень с закрепленными концами, т.е. при всяком t

$$u|_{x=0} = u|_{x=l(t)} = 0;$$

– стержень со свободными концами

$$u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l(t)} = 0;$$

– стержень, один конец которого свободен, а другой закреплен

$$u|_{x=0} = u_x|_{x=l(t)} = 0.$$

Таким образом, для конического стержня переменной длины получено нелинейное уравнение колебаний (5.35) при обобщенных начальных (5.36) и граничных (5.37) условиях. При этом соблюдается принцип однородности: в случае однородного стержня постоянного сечения полученная линейная модель совпала с классической, что свидетельствует о корректности полученных результатов.

5.4. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой

Задачи, связанные с колебаниями балки с подвижной опорой, относятся к обширному классу задач, рассматривающих колебания объектов с движущимися границами. Во всех рассмотренных ранее случаях жёсткое закрепление подвижной опоры исключало возможность обмена энергией через неё. При наличии такого обмена формулировка условий на подвижной

границе становится значительно сложнее. В данной работе для постановки задачи предлагается использовать вариационный принцип Гамильтона. Благодаря активному развитию численных методов появилась возможность более точно моделировать подобные системы, учитывая множество влияющих факторов.

Рассмотрим балку, изображенную на рисунке 5.7, где введены обозначения:

l_0 – длина балки; $u(x, t)$ – поперечное смещение точки с координатой x балки в момент времени t ; E – модуль упругости материала балки; I – осевой момент инерции сечения балки; ρ – линейная плотность массы балки; $l(t)$ – закон движения границы; m – масса, присоединенная к движущейся опоре; k_1 – жесткость опоры по отношению к поперечному смещению; k_2 – жесткость опоры по отношению к угловому смещению; λ – коэффициент, учитывающий вязкоупругость.

При учете вязкоупругости с помощью модели Фойгта имеет место следующее соотношение:

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \lambda\dot{\varepsilon}(t) \quad (5.38)$$

где $\sigma(t)$ – напряжения; $\varepsilon(t)$ – деформации.

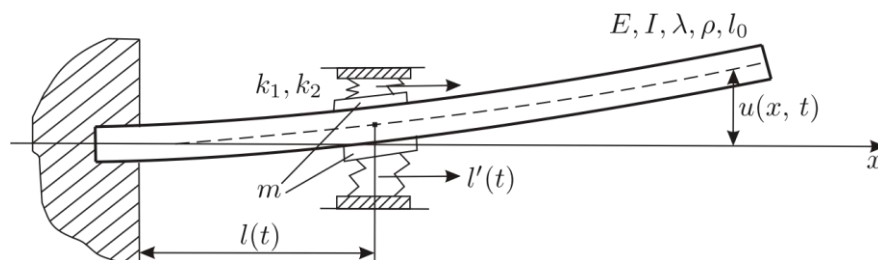


Рис.5.7. Кинематическая схема балки

Для учета энергетического обмена через движущуюся границу разобьем область колебаний в координатах x, t на две части W_1, W_2 (см. рисунок 5.8).

Область W_1 соответствует части балки справа от движущейся границы, область W_2 – левой части. Через γ_1 и γ_2 обозначены замкнутые контуры, окружающие области W_1, W_2 . Через W обозначена объединенная область W_1, W_2 .

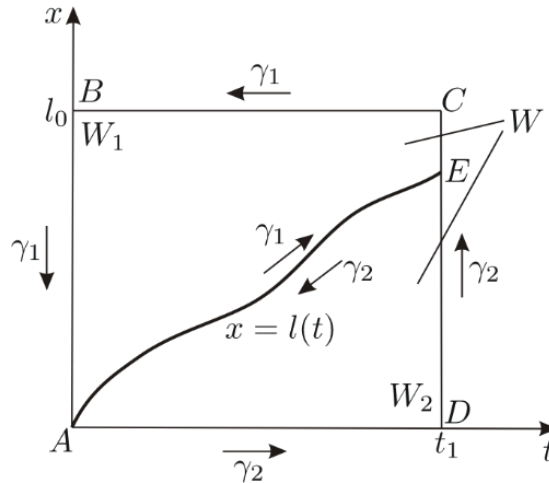


Рис.5.8. Области энергетического обмена

Для применения принципа Гамильтона необходимо найти интеграл действия от кинетической и потенциальной энергий объекта. Найдем составляющие интеграла действия, а также их вариации. Выражение для интеграла действия от кинетической энергии балки имеет вид:

$$J_{T_1} = \frac{1}{2} \rho \iint_W u_t^2 dW.$$

Здесь и далее, где это возможно, вместо $u(x, t)$ будем использовать u .

Найдем вариацию J_{T_1} :

$$\delta J_{T_1} = \rho \iint_W u_t \delta u_t dW. \quad (5.39)$$

Представим подынтегральное выражение в виде

$$u_t \delta u_t = \frac{\partial}{\partial t} (u_t \delta u) - u_{tt} \delta u. \quad (5.40)$$

С помощью формулы Грина

$$\iint_W \left(\frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dW = \oint_\gamma (P dx + Q dt)$$

и с учетом (5.40) выражение (5.39) можно записать следующим образом:

$$\delta J_{T_1} = \rho \left(- \iint_W u_{tt} \delta u \, dW + \oint_{\gamma_1} u_t \delta u \, dx + \oint_{\gamma_2} u_t \delta u \, dx \right). \quad (5.41)$$

Интеграл действия для кинетической энергии присоединенной массы m равен:

$$J_{T_2} = \frac{1}{2} m \int_0^{t_1} u_t^2(l(t), t) \, dt. \quad (5.42)$$

Вариация выражения (5.42) после интегрирования по частям примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta J_{T_2} = m \left(u_t(l(t_1), t_1) \delta u \Big|_{t=t_1}^{x=l(t_1)} - u_t(l(0), 0) \delta u \Big|_{t=0}^{x=l(0)} - \right. \\ \left. - \int_0^{t_1} \frac{d}{dt} (u_t(l(t), t)) \delta u \Big|_{x=l(t)} dt \right). \end{aligned} \quad (5.43)$$

Полную производную выражения (5.43) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dt} (u_t(l(t), t)) = u_{tx}(l(t), t) l'(t) + u_{tt}(l(t), t).$$

С учетом выражения (5.38) изгибающий момент в сечении балки записывается следующим образом:

$$M = I(Eu_{xx} + \lambda u_{xxt}).$$

Интеграл действия потенциальной энергии балки определяется выражением

$$J_{U_1} = \frac{1}{2} EI \iint_W u_{xx}^2 \, dW.$$

Найдем вариацию

$$\delta J_{U_1} = EI \iint_W u_{xx} \delta u_{xx} \, dW. \quad (5.44)$$

Подынтегральное выражение в (5.44) можно привести к следующему виду:

$$u_{xx} \delta u_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} (u_{xx} \delta u_x) - \frac{\partial}{\partial x} (u_{xxx} \delta u) + u_{xxxx} \delta u. \quad (5.45)$$

С помощью формулы Грина и с учетом (5.45) для вариации (5.44) получим:

$$\delta J_{U_1} = EI \left(\iint_W u_{xxxx} \delta u dW - \oint_{\gamma_1} u_{xx} \delta u_x dt - \oint_{\gamma_2} u_{xx} \delta u_x dt + \oint_{\gamma_1} u_{xxx} \delta u dt + \oint_{\gamma_2} u_{xxx} \delta u dt \right). \quad (5.46)$$

Вариация интеграла действия внутренних вязкоупругих сил имеет вид:

$$\delta J_{U_2} = \lambda I \iint_W u_{xxt} \delta u_{xt} dW.$$

Делая аналогичные преобразования, получим:

$$\delta J_{U_2} = \lambda I \left(\iint_W u_{xxtt} \delta u dW - \oint_{\gamma_1} u_{xxt} \delta u_x dt - \oint_{\gamma_2} u_{xxt} \delta u_x dt + \oint_{\gamma_1} u_{xxx} \delta u dt + \oint_{\gamma_2} u_{xxx} \delta u dt \right). \quad (5.47)$$

Потенциальная энергия от деформации опоры имеет вид:

$$U_3 = \frac{1}{2} k_1 u^2(l(t), t) + \frac{1}{2} k_2 u_x^2(l(t), t).$$

Интеграл действия потенциальной энергии от деформации опоры определяется выражением:

$$J_{U_3} = \frac{1}{2} \int_0^{t_1} \left(k_1 u^2(l(t), t) + k_2 u_x^2(l(t), t) \right) dt.$$

Вариация интеграла действия потенциальной энергии опоры имеет следующий вид:

$$\delta J_{U_3} = \int_0^{t_1} \left(k_1 u(l(t), t) \delta u \Big|_{x=l(t)} + k_2 u_x(l(t), t) \delta u_x \Big|_{x=l(t)} \right) dt. \quad (5.48)$$

Применяя вариационный принцип Гамильтона получим следующее уравнение:

$$\delta J_{T_1} + \delta J_{T_2} - \delta J_{U_1} - \delta J_{U_2} - \delta J_{U_3} = 0. \quad (5.49)$$

Перед получением начальных и граничных условий запишем естественные соотношения между значениями функции u и ее производными слева и справа от движущейся границы:

$$u(l(t) - 0, t) = u(l(t) + 0, t); \quad (5.50)$$

$$u_t(l(t) - 0, t) = u_t(l(t) + 0, t); \quad (5.51)$$

$$u_x(l(t) - 0, t) = u_x(l(t) + 0, t). \quad (5.52)$$

Распишем уравнение (5.49) с учетом соотношений (5.50), (5.51), (5.52):

$$\begin{aligned} & - \iint_W (\rho u_{tt} + E I u_{xxxx} + \lambda I u_{xxxxt}) \delta u \, dW + \rho \int_0^{l_0} u_t(x, t_1) \delta u \Big|_{t=t_1} dx - \rho \int_0^{l_0} u_t(x, 0) \delta u \Big|_{t=0} dx + \\ & + m u_t(l(t_1), t_1) \delta u \Big|_{x=l(t_1)} - m u_t(l(0), 0) \delta u \Big|_{x=l(0)} + \int_0^{t_1} (E I u_{xx}(0, t) + \lambda I u_{xxxt}(0, t)) \delta u_x \Big|_{x=0} dt - \\ & - \int_0^{t_1} (E I u_{xxx}(0, t) + \lambda I u_{xxxxt}(0, t)) \delta u \Big|_{x=0} dt - \int_0^{t_1} (E I u_{xx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0, t)) \delta u_x \Big|_{x=l_0} dt + \\ & + \int_0^{t_1} (E I u_{xxx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxxxt}(l_0, t)) \delta u \Big|_{x=l_0} dt - \int_0^{t_1} (E I (u_{xxx}(l(t) - 0, t) - u_{xxx}(l(t) + 0, t)) + \\ & + \lambda I (u_{xxxxt}(l(t) - 0, t) - u_{xxxxt}(l(t) + 0, t))) + m \frac{d}{dt} (u_t(l(t), t) + k_1 u(l(t), t)) \delta u \Big|_{x=l(t)} dt + \\ & + \int_0^{t_1} (E I (u_{xx}(l(t) - 0, t) - u_{xx}(l(t) + 0, t)) + \lambda I (u_{xxxt}(l(t) - 0, t) - u_{xxxt}(l(t) + 0, t)) + \\ & + k_2 u_x(l(t), t)) \delta u_x \Big|_{x=l(t)} dt = 0. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Выражение (5.53) должно быть тождественно равно нулю. Это возможно, если коэффициенты перед вариациями

$$\begin{aligned} & \delta u, \delta u \Big|_{t=t_1}, \delta u \Big|_{t=0}, \delta u \Big|_{x=l(t_1)}, \delta u \Big|_{x=l(0)}, \delta u_x \Big|_{x=0}, \\ & \delta u \Big|_{x=0}, \delta u_x \Big|_{x=l_0}, \delta u \Big|_{x=l_0}, \delta u \Big|_{x=l(t)}, \delta u_x \Big|_{x=l(t)} \end{aligned}$$

равны нулю.

Выполнение равенства (5.53) так же возможно, если функции

$$\begin{aligned} & u(x, t_1), u(x, 0), u(l(t_1), t_1), u_x(0, t), u(0, t), u_x(l_0, t), \\ & u(l_0, t), u(l(t), t), u_x(l(t), t) \end{aligned}$$

заданы. В этом случае их вариации равны нулю.

Приравняв нулю коэффициенты перед δu , получим дифференциальное уравнение колебаний для областей W_1 и W_2 :

$$\rho u_{tt} + E I u_{xxxx} + \lambda I u_{xxxxt} = 0. \quad (5.54)$$

Выражения $u_t(x, t_1)\delta u|_{t=t_1}$ и $u_t(x, 0)\delta u|_{t=0}$ могут быть равны нулю, если $\delta u|_{t=t_1} = \delta u|_{t=0} = 0$. При этом функции $u(x, 0), u(x, t_1)$ должны быть заданы.

Начальные условия краевых задач гиперболического типа обычно записываются в следующем виде:

$$u(x, 0) = \varphi_1(x); u_t(x, 0) = \varphi_2(x), \quad (5.55)$$

где $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ заданные функции. При этом вариация $\delta u|_{t=0} = 0$. Если решение краевой задачи существует и единственно, то значение $u(x, t_1)$ при любых t_1 однозначно определяется дифференциальным уравнением, начальными и граничными условиями. При этом вариация $\delta u|_{t=t_1} = 0$.

Равенство нулю безинтегральных членов (5.53) обеспечивается заданием начальных условий для сосредоточенной массы:

$$u(l(0), 0) = a_1; u_t(l(0), 0) = a_2, \quad (5.56)$$

где a_1, a_2 – начальное смещение и начальная скорость сосредоточенной массы m .

Равенство нулю выражений с $\delta u|_{x=l_0}, \delta u_x|_{x=l_0}$ может быть обеспечено следующими видами условий на границе ВС:

$$\begin{cases} u(l_0, t) = \varphi_3(t), \\ u_x(l_0, t) = \varphi_4(t); \\ \\ u(l_0, t) = \varphi_3(t), \\ E I u_{xx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxt}(l_0, t) = 0; \\ \\ u_x(l_0, t) = \varphi_4(t), \\ E I u_{xxx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0, t) = 0; \\ \\ E I u_{xx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxt}(l_0, t) = 0, \\ E I u_{xxx}(l_0, t) + \lambda I u_{xxxt}(l_0, t) = 0, \end{cases} \quad (5.57)$$

где $\varphi_3(t), \varphi_4(t)$ – заданные функции.

Для балки, изображенной на рисунке 5.7, $u(l_0, t), u_x(l_0, t)$ не заданы.

Граничные условия при $x=l_0$ задаются и имеют вид (5.57). При постановке краевых задач с использованием вариационных принципов данные условия называются естественными [123, 125, 139]. На левом конце балки ($x=0$) $u(0,t) = u_x(0,t) = 0$. При этом интегралы тождества (5.53), содержащие $\delta u|_{x=l_0}$, $\delta u_x|_{x=l_0}$, равны нулю.

На движущейся границе функции $u(l(t),t), u_x(l(t),t)$ не заданы. Естественные условия на движущейся границе имеют следующий вид:

$$EI(u_{xx}(l(t)+0,t) - u_{xx}(l(t)-0,t)) + \lambda I(u_{xxt}(l(t)+0,t) - u_{xxt}(l(t)-0,t)) - k_2 u_x(l(t),t) = 0; \quad (5.58)$$

$$EI(u_{xxx}(l(t)+0,t) - u_{xxx}(l(t)-0,t)) - m(u_{xt}(l(t),t)l'(t) + u_{tt}(l(t),t)) + \lambda I(u_{xxxt}(l(t)+0,t) - u_{xxxt}(l(t)-0,t)) - k_1 u(l(t),t) = 0. \quad (5.59)$$

Таким образом, для балки, показанной на рисунке 5.7, было получено дифференциальное уравнение (5.54), начальные условия (5.55), (5.56) и граничные условия (5.57)–(5.59). Следует отметить, что на сегодняшний день не существует методов аналитического решения данной задачи, поэтому её можно решать только численными методами.

5.5. Численный метод решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами

Разработан численный метод на основе разностных схем для решения нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с подвижными границами. Разработанная разностная схема позволяет решать задачу Коши для системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных с нелинейными граничными условиями, а также учитывать обмен энергией между частями колеблющегося объекта,

расположенными слева и справа от движущейся границы. По временной координате сетка разбивается на равноотстоящие временные слои. По пространственной координате в каждом временном слое сетка разделяется на фиксированное количество участков равноотстоящими узлами слева и справа от границы. Из-за движения границы шаг разбиения в разных временных слоях может отличаться. Такое разбиение позволяет избежать перехода движущейся границы через узлы сетки. Для вычисления функций и их производных применяются разностные аппроксимации.

Постановка задачи о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами сделана в разделах 5.1.–5.4. Область колебаний изображена на рисунке 5.9.

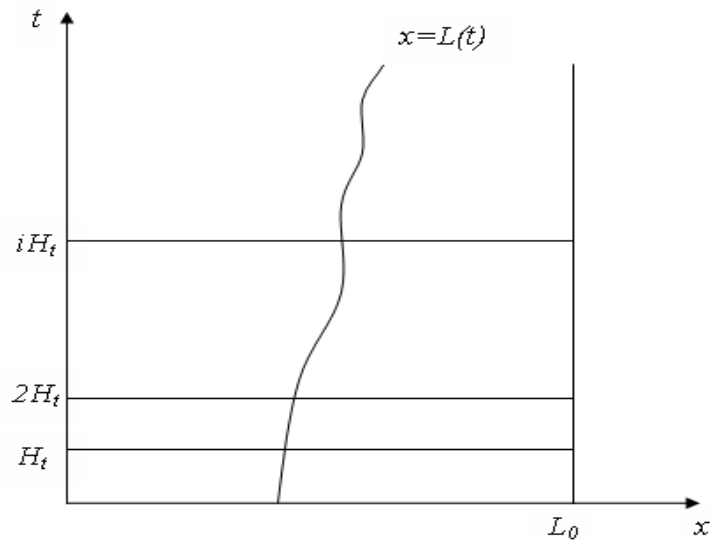


Рис.5.9. Область колебаний

На рисунке 5.9 обозначено: x – пространственная координата; t – время; $L(t)$ –закон движения границы; i, j –номера узлов сетки; H_t – шаг сетки по переменной t .

Запишем задачу в обобщённом виде.

Система двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\begin{cases} u_{1,tt} = F_2(x, t, u_k, u_{k,x}, u_{k,xx}, u_{k,t}, u_{k,xt}, u_{k,xtt}); \\ u_{2,tt} = F_2(x, t, u_k, u_{k,x}, u_{k,xx}, u_{k,xxx}, u_{k,t}, u_{k,xt}, u_{k,xtt}, u_{k,xttt}). \end{cases} \quad (5.60)$$

Здесь и далее $k = \overline{1, 2}$.

На неподвижных концах ($x=0, x=L_0$) граничные условия возьмём в виде:

$$u_1(0, t) = 0; u_1(L_0, t) = 0; u_2(0, t) = 0; u_{2,xx}(0, t) = 0; u_2(L_0, t) = 0; u_{2,x}(L_0, t) = 0. \quad (5.61)$$

Условия на движущейся границе запишем в обобщённом виде:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_1(L(t), t)}{dt^2} = \\ = f_1(x, t, u_k(L(t), t), u_{k,x}(L(t) \mp 0, t), u_{k,t}(L(t), t), u_{k,xt}(L(t) \mp 0, t)); \end{aligned} \quad (5.62)$$

$$\frac{d^2 u_2(L(t), t)}{dt^2} = f_2(x, t, u_2(L(t), t), u_{2,xxx}(L(t) \mp 0, t), u_{2,xxx}(L(t) \mp 0, t)); \quad (5.63)$$

$$\frac{d^2 u_{2,x}(L(t), t)}{dt^2} = f_3(x, t, u_{2,x}(L(t), t), u_{2,xx}(L(t) \mp 0, t), u_{2,xx}(L(t) \mp 0, t)). \quad (5.64)$$

Соотношения на движущейся границе:

$$u_k(L(t) - 0, t) = u_k(L(t) + 0, t); u_{2,x}(L(t) - 0, t) = u_{2,x}(L(t) + 0, t). \quad (5.65)$$

Начальные условия:

$$u_1(x, 0) = \varphi_1(x); u_2(x, 0) = \varphi_2(x); u_{1,t}(x, 0) = \varphi_3(x); u_{2,t}(x, 0) = \varphi_4(x). \quad (5.66)$$

В поставленной задаче (5.60)–(5.66) использованы следующие обозначения: $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ – продольное и поперечное смещения точки объекта с координатой x в момент времени t ; $u_k(L(t) - 0, t)$, $u_k(L(t) + 0, t)$ – значения функций слева и справа от движущейся границы; F_1, F_2, f_m ($m = \overline{1, 3}$), $\varphi_n(x)$ ($n = \overline{1, 4}$) – заданные функции.

По оси t область разбивается на слои с шагом H_i номером i ($i = 0, 1, 2, \dots$) и временными значениями $t_i = iH_i$. По оси x временные слои слева от движущейся границы разбиваются на Nl частей с шагом $Hl_i = L(t_i) / Nl$, а справа на Np частей с шагом $Hp_i = (L_0 - L(t_i)) / Np$. Номер узла по оси x обозначен индексом j . Индекс j слева от движущейся границы изменяется от 0 до Nl , а справа от Nl до N ($N = Nl + Np$).

Назовём разностную схему схемой с переменным шагом по пространственной переменной, т.к. во временных слоях шаги Hl_i Hr_i различны. Значения x в узлах сетки определяются следующими равенствами:

$$\begin{cases} x_{i,j} = Hl_i \cdot j, & 0 \leq j \leq Nl; \\ x_{i,j} = Hl_i \cdot Nl + Hr_i \cdot (j - Nl), & Nl \leq j \leq N. \end{cases}$$

Обозначим $u_k(x_{i,j}, t_i)$ значения функций в узлах сетки. Фрагмент сетки изображён на рисунке 5.10.

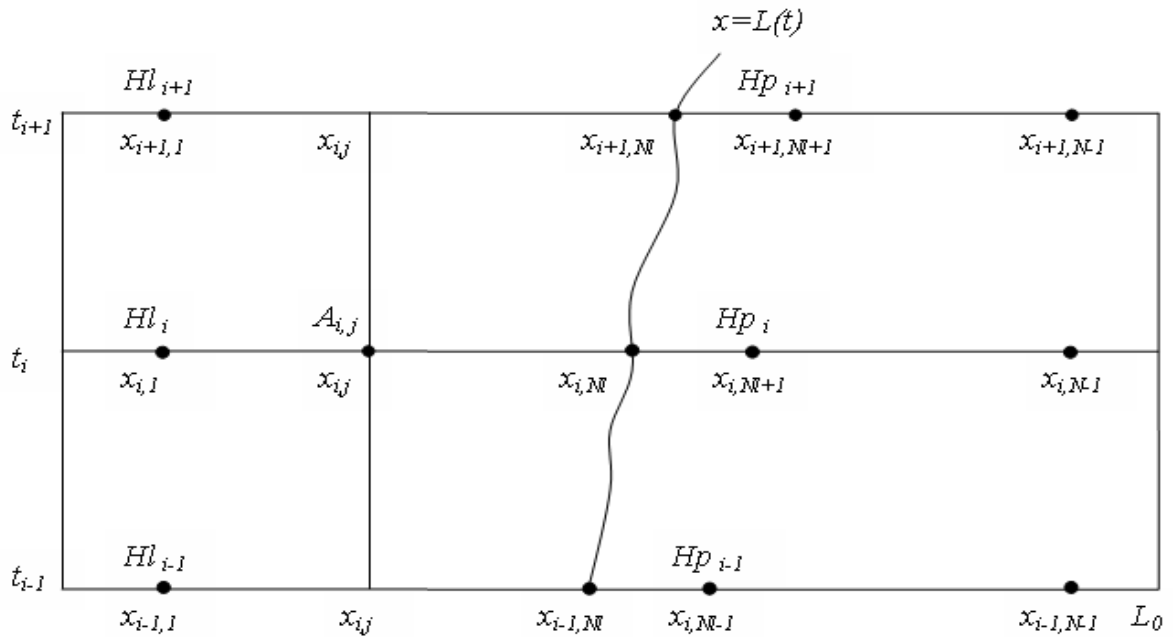


Рис. 5.10. Фрагмент сетки

Значения искомых функций в слоях t_0 и t_1 находятся из начальных условий (5.66):

$$u_1(x_{0,j}, t_0) = \varphi_1(x_{0,j}); u_2(x_{0,j}, t_0) = \varphi_2(x_{0,j});$$

$$u_1(x_{1,j}, t_1) = \varphi_1(x_{1,j}) + \varphi_3(x_{1,j})H_t; u_2(x_{1,j}, t_1) = \varphi_2(x_{1,j}) + \varphi_4(x_{1,j})H_t.$$

Значения производных по x в промежуточных точках слоя t_1 находятся по формулам:

$$u_{1,x}(x_{1,j}, t_1) = \varphi'_1(x_{1,j}) + \varphi'_3(x_{1,j})H_t; u_{1,xx}(x_{1,j}, t_1) = \varphi''_1(x_{1,j}) + \varphi''_3(x_{1,j})H_t;$$

$$u_{2,x}(x_{1,j}, t_1) = \varphi'_2(x_{1,j}) + \varphi'_4(x_{1,j})H_t; u_{2,xx}(x_{1,j}, t_1) = \varphi''_2(x_{1,j}) + \varphi''_4(x_{1,j})H_t;$$

$$u_{2,xxxx}(x_{1,j}, t_1) = \varphi_2^{(IV)}(x_{1,j}) + \varphi_4^{(IV)}(x_{1,j})H_t.$$

Здесь и далее в промежуточных точках слева от движущейся границы $j = \overline{1, Nl - 1}$, а справа $j = \overline{Np + 1, N - 1}$.

Значения производных по t в промежуточных точках слоя t_1 с точностью до величин порядка H_t примем равными значениям в слое t_0 :

$$\begin{aligned} u_{1,t}(x_{1,j}, t_1) &= \varphi_3(x_{1,j}); u_{2,t}(x_{1,j}, t_1) = \varphi_4(x_{1,j}); \\ u_{1,xt}(x_{1,j}, t_1) &= \varphi_3'(x_{1,j}); u_{2,xt}(x_{1,j}, t_1) = \varphi_4'(x_{1,j}); \\ u_{1,xtt}(x_{1,j}, t_1) &= \varphi_3''(x_{1,j}); u_{2,xtt}(x_{1,j}, t_1) = \varphi_4''(x_{1,j}); \\ u_{2,xxxxt}(x_{1,j}, t_1) &= \varphi_4^{(IV)}(x_{1,j}). \end{aligned}$$

Значения функций во временных слоях t_i находятся последовательным переходом от одного слоя к другому. При нахождении функций и их производных используются аппроксимации с точностью до членов второго порядка малости относительно Hl_i, Hp_i, H_t . В соответствии с граничными условиями (5.61) на неподвижных границах имеют место равенства:

$$u_k(x_{i,0}, t_i) = 0; u_k(x_{i,N}, t_i) = 0; u_{k,t}(x_{i,0}, t_i) = 0; u_{k,t}(x_{i,N}, t_i) = 0.$$

Значения функций во внутренних точках находятся с использованием системы дифференциальных уравнений (5.60). Во временных слоях t_{i-1} и t_i значения функций и их производных известны. Используя аппроксимацию

$$u_{k,tt}(x_{i,j}, t_i) = \frac{u_k(x_{i,j}, t_{i-1}) - 2u_k(x_{i,j}, t_i) + u_k(x_{i,j}, t_{i+1}))}{H_t^2}$$

получим значения функций в промежуточных точках слоя t_{i+1} :

$$\begin{aligned} u_1(x_{i,j}, t_{i+1}) &= \\ &= F_1(x_{i,j}, t_i, u_k(x_{i,j}, t_i), u_{k,x}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xx}(x_{i,j}, t_i), u_{k,t}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xt}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xtt}(x_{i,j}, t_i)) - \\ &- u_1(x_{i,j}, t_{i-1}) + 2u_1(x_{i,j}, t_i); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u_2(x_{i,j}, t_{i+1}) = \\
& = F_2(x_{i,j}, t_i, u_k(x_{i,j}, t_i), u_{k,x}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xx}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xxx}(x_{i,j}, t_i), u_{k,t}(x_{i,j}, t_i), \\
& u_{k,xt}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xtt}(x_{i,j}, t_i), u_{k,xtxt}(x_{i,j}, t_i)) - u_2(x_{i,j}, t_{i-1}) + 2u_2(x_{i,j}, t_i).
\end{aligned}$$

Значения функций $u_k(x_{i,j}, t_{i-1})$ неизвестны, т.к. узлы в слое t_{i-1} расположены в точках $x_{i-1,j}$.

Для нахождения функций воспользуемся аппроксимациями:

$$\begin{aligned}
u_k(x_{i,j}, t_{i-1}) &= \frac{1}{2H_{i-1}^2} (x_{i,j} - x_{i-1,j})^2 (u_k(x_{i-1,j-1}, t_{i-1}) - 2u_k(x_{i-1,j}, t_{i-1}) + u_k(x_{i-1,j+1}, t_{i-1})) + \\
&+ \frac{1}{2H_{i-1}} (x_{i,j} - x_{i-1,j}) (u_k(x_{i-1,j+1}, t_{i-1}) - u_k(x_{i-1,j-1}, t_{i-1})) + u_k(x_{i-1,j}, t_{i-1}). \quad (5.67)
\end{aligned}$$

Формула (5.67) получена с помощью аппроксимации функций в трёх близлежащих узлах по формуле Лагранжа. Здесь и далее при $j = \overline{1, Nl-1}$ вместо H_{i-1} необходимо взять Hl_{i-1} , а при $j = \overline{Np+1, N}$ Hr_{i-1} .

Полные производные по t на движущейся границе в слое t_i находятся по следующим формулам:

$$\begin{aligned}
\frac{d^2 u_k(L(t), t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} &= \frac{1}{H_t^2} (u_k(x_{i-1, Nl}, t_{i-1}) - 2u_k(x_{i, Nl}, t_i) + u_k(x_{i+1, Nl}, t_{i+1})); \\
\frac{d^2 u_{2,x}(L(t), t)}{dt^2} \Big|_{t=t_i} &= \frac{1}{H_t^2} (u_{2,x}(x_{i-1, Nl}, t_{i-1}) - 2u_{2,x}(x_{i, Nl}, t_i) + u_{2,x}(x_{i+1, Nl}, t_{i+1})).
\end{aligned}$$

Из граничных условий (5.62)–(5.64) получим:

$$\begin{aligned}
u_1(x_{i+1, Nl}, t_{i+1}) &= f_1(x_{i, Nl}, t_i, u_k(x_{i, Nl}, t_i), u_{k,x}(x_{i, Nl} \pm 0, t_i), u_{k,t}(x_{i, Nl}, t_i), \\
&u_{k,xt}(x_{i, Nl} \pm 0, t_i)) H_t^2 + 2u_1(x_{i, Nl}, t_i) - u_1(x_{i-1, Nl}, t_{i-1});
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_2(x_{i+1, Nl}, t_{i+1}) &= f_2(x_{i, Nl}, t_i, u_2(x_{i, Nl}, t_i), u_{2,t}(x_{i, Nl}, t_i), u_{2,xxx}(x_{i, Nl} \pm 0, t_i), \\
&u_{2,xxx}(x_{i, Nl} \pm 0, t_i)) H_t^2 + 2u_2(x_{i, Nl}, t_i) - u_2(x_{i-1, Nl}, t_{i-1});
\end{aligned}$$

$$u_{2,x}(x_{i+1,Nl}, t_{i+1}) = f_3(x_{i,Nl}, t_i, u_{2,x}(x_{i,Nl}, t_i), u_{2,xt}(x_{i,Nl}, t_i), u_{2,xx}(x_{i,Nl} \pm 0, t_i), u_{2,xxx}(x_{i,Nl} \pm 0, t_i)) H_t^2 + 2u_{2,x}(x_{i,Nl}, t_i) - u_{2,x}(x_{i-1,Nl}, t_{i-1}).$$

Для нахождения функций во внутренних узлах слоя t_{i+1} воспользуемся аппроксимацией аналогичной (5.67):

$$u_k(x_{i+1,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_{i+1}^2} (x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 (u_k(x_{i,j-1}, t_{i+1}) - 2u_k(x_{i,j}, t_{i+1}) + u_k(x_{i,j+1}, t_{i+1})) + \frac{1}{2H_{i+1}} (x_{i+1,j} - x_{i,j}) (u_k(x_{i,j+1}, t_{i+1}) - u_k(x_{i,j-1}, t_{i+1})) + u_k(x_{i,j}, t_{i+1}).$$

Для нахождения $u_{k,x}$ во внутренних узлах слоя t_{i+1} воспользуемся формулой:

$$u_{k,x}(x_{i+1,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_{i+1}} (u_k(x_{i+1,j+1}, t_{i+1}) - u_k(x_{i+1,j-1}, t_{i+1})).$$

Для нахождения $u_{1,x}$ на границах и $u_{2,x}(x_{i+1,0}, t_{i+1})$ в слое t_{i+1} используются аппроксимации вперёд и назад:

$$\begin{aligned} u_{1,x}(x_{i+1,0}, t_{i+1}) &= \frac{1}{2Hl_{i+1}} (-3u_1(x_{i+1,0}, t_{i+1}) + 4u_1(x_{i+1,1}, t_{i+1}) - u_1(x_{i+1,2}, t_{i+1})); \\ u_{1,x}(x_{i+1,N}, t_{i+1}) &= \frac{1}{2Hp_{i+1}} (u_1(x_{i+1,N-2}, t_{i+1}) - 4u_1(x_{i+1,N-1}, t_{i+1}) + 3u_1(x_{i+1,N}, t_{i+1})); \\ u_{1,x}(x_{i+1,Nl} - 0, t_{i+1}) &= \frac{1}{2Hl_{i+1}} (u_1(x_{i+1,Nl-2}, t_{i+1}) - 4u_1(x_{i+1,Nl-1}, t_{i+1}) + 3u_1(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})); \\ u_{1,x}(x_{i+1,Nl} + 0, t_{i+1}) &= \frac{1}{2Hp_{i+1}} (-u_1(x_{i+1,Nl-2}, t_{i+1}) + 4u_1(x_{i+1,Nl-1}, t_{i+1}) - 3u_1(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})); \\ u_{2,x}(x_{i+1,0}, t_{i+1}) &= \frac{1}{2Hl_{i+1}} (-3u_2(x_{i+1,0}, t_{i+1}) + 4u_2(x_{i+1,1}, t_{i+1}) - u_2(x_{i+1,2}, t_{i+1})). \end{aligned}$$

Производные $u_{2,x}(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})$ и $u_{2,x}(x_{i+1,N}, t_{i+1})$ известны из граничных условий.

Для нахождения $u_{k,xx}$ во внутренних узлах слоя t_{i+1} воспользуемся формулой:

$$u_{k,xx}(x_{i+1,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_{i+1}} (u_{k,x}(x_{i+1,j+1}, t_{i+1}) - u_{k,x}(x_{i+1,j-1}, t_{i+1})).$$

Производная $u_{2,xx}(x_{i+1,0}, t_{i+1})$ равна нулю. Остальные производные $u_{2,xx}$ на границах в слое t_{i+1} находятся с использованием аппроксимаций вперёд и назад:

$$u_{2,xx}(x_{i+1,N}, t_{i+1}) = \frac{1}{2Hp_{i+1}} (u_{2,x}(x_{i+1,N-2}, t_{i+1}) - 4u_{2,x}(x_{i+1,N-1}, t_{i+1}) + 3u_{2,x}(x_{i+1,N}, t_{i+1}));$$

$$\begin{aligned} u_{2,xx}(x_{i+1,Nl} - 0, t_{i+1}) &= \\ &= \frac{1}{2Hl_{i+1}} (u_{2,x}(x_{i+1,Nl-2}, t_{i+1}) - 4u_{2,x}(x_{i+1,Nl-1}, t_{i+1}) + 3u_{2,x}(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2,xx}(x_{i+1,Nl} + 0, t_{i+1}) &= \\ &= \frac{1}{2Hp_{i+1}} (-u_{2,x}(x_{i+1,Nl-2}, t_{i+1}) + 4u_{2,x}(x_{i+1,Nl-1}, t_{i+1}) - 3u_{2,x}(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})). \end{aligned}$$

Частные производные $u_{2,xxx}$ находятся по формулам для $u_{2,xx}$ только вместо функции $u_{2,x}$ необходимо использовать $u_{2,xx}$.

Для нахождения $u_{2,xxxx}$ во внутренних узлах слоя t_{i+1} воспользуемся известной аппроксимацией:

$$u_{2,xxxx}(x_{i+1,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_{i+1}^2} (u_{k,xx}(x_{i,j-1}, t_{i+1}) - 2u_{k,xx}(x_{i,j}, t_{i+1}) + u_{k,xx}(x_{i,j+1}, t_{i+1})).$$

Для нахождения производных по t в промежуточных точках слоя t_{i+1} используется аппроксимация вперёд:

$$u_{k,t}(x_{i,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_t} (u_k(x_{i,j}, t_{i-1}) - 4u_k(x_{i,j}, t_i) + 3u_k(x_{i,j}, t_{i+1})).$$

Производные $u_{k,t}$ на неподвижных концах равны нулю. Полная производная на движущейся границе равна:

$$\left. \frac{d u_k(L(t), t)}{dt} \right|_{t=t_{i+1}} = \frac{1}{2H_t} (u_k(x_{i-1,Nl}, t_{i-1}) - 4u_k(x_{i,Nl}, t_i) + 3u_k(x_{i+1,Nl}, t_{i+1})).$$

С учётом того, что

$$\frac{du_k(L(t), t)}{dt} = u_{k,x}(L(t) \mp 0, t)L'(t) + u_{k,t}(L(t) \mp 0, t)$$

получим

$$u_{k,t}(x_{i+1,NI} \mp 0, t_{i+1}) = \left. \frac{du_k(L(t), t)}{dt} \right|_{t=t_{i+1}} - u_{k,x}(x_{i+1,NI} \mp 0, t_{i+1})L'(t_{i+1}).$$

Для нахождения функций и их производных по t в узлах слоя t_{i+1} также воспользуемся аппроксимациями аналогичными (5.67):

$$u_{k,t}(x_{i+1,j}, t_{i+1}) = \frac{1}{2H_{i+1}^2}(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 (u_{k,t}(x_{i,j-1}, t_{i+1}) - 2u_{k,t}(x_{i,j}, t_{i+1}) + u_{k,t}(x_{i,j+1}, t_{i+1})) + \\ + \frac{1}{2H_{i+1}}(x_{i+1,j} - x_{i,j})(u_{k,t}(x_{i,j+1}, t_{i+1}) - u_{k,t}(x_{i,j-1}, t_{i+1})) + u_{k,t}(x_{i,j}, t_{i+1}).$$

Для нахождения производных $u_{k,xt}$, $u_{k,xtt}$, $u_{2,xxx}$, $u_{2,xxxxt}$ в слое t_{i+1} необходимо применить формулы для $u_{k,x}$, $u_{k,xx}$, $u_{2,xxx}$, $u_{2,xxxxt}$, только вместо функций u_k использовать $u_{k,t}$.

Все функции и их производные, необходимые для перехода к следующему временному слою, определены. Это позволяет, последовательно переходя от одного слоя к другому, найти решение задачи при любом значении времени t . Вычисления выполняются с использованием программного комплекса TB-ANALYSIS-7, разработанного в среде MATLAB.

5.6. Выводы по пятой главе

1. Разработанные в работе нелинейные математические модели и методы направлены на решение фундаментальных проблем механики деформируемых систем с подвижными границами. Применение вариационного принципа Гамильтона позволило получить строгие нелинейные постановки задач для различных механических систем, что особенно важно для анализа сложных

динамических процессов, где традиционные линейные модели оказываются некорректными.

2. Выполненные нелинейные постановки задач продольно–поперечных колебаний струн, стержней и балок с подвижными границами учитывают ключевые факторы: геометрическую нелинейность, вязкоупругие свойства объекта, энергетический обмен через движущуюся границу и др. Разработанные математические модели позволяют описывать колебания высокой интенсивности и выявлять принципиально новые эффекты, не наблюдаемые в линейном приближении. При этом соблюдается принцип однородности: в случае малых колебаний линеаризованные модели совпали с классическими, что подтверждает корректность полученных результатов.

3. В программном комплексе TB–ANALYSIS–7 реализован разработанный численный метод, обеспечивающий эффективное решение нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами.

Глава 6

Разработка методов анализа резонансных свойств механических объектов с движущимися границами

В отличие от систем с неподвижными границами, где наблюдается только одно резонансное явление – резонанс, в системах с движущимися границами выделяют два таких явления: установившийся резонанс и прохождение через резонанс. Эти явления подробно описаны в работах [8, 47, 123, 125, 139, 163, 168, 180, 188] и др. Сопоставляя изложенное в данных работах с результатами, полученными в диссертации, можно дать следующие определения резонансным явлениям.

Установившийся резонанс – это явление, при котором амплитуда колебаний резко возрастает, когда изменение частоты внешней силы и одной из собственных частот системы согласованы таким образом, что создаются оптимальные условия для увеличения амплитуды.

Прохождение через резонанс – это явление, при котором амплитуда колебаний резко увеличивается в течение конечного промежутка времени, когда мгновенная частота одного из собственных колебаний проходит через значение частоты внешнего возмущения.

Отметим, что при стремлении скорости движения границ к нулю оба явления – установившийся резонанс и прохождение через резонанс – переходят в явление обычного резонанса, характерного для систем с неподвижными границами.

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [7, 8, 123, 125, 139, 156, 157, 168].

6.1. Разработка численного метода и алгоритмов исследования установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс

Выражение для амплитуды колебаний системы на n -ной динамической моде, полученное с помощью приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений движения механических объектов переменной длины имеет вид (см. (3.42)):

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (6.1)$$

Проанализируем резонансные явления, имеющие место в объектах с движущимися границами.

Если в (6.1) скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, то в системе возникает явление установившегося резонанса, т.е.

$$\Phi_n(\zeta) = \gamma, \quad (6.2)$$

где γ – постоянная величина. В этом случае выражение для максимальной амплитуды имеет вид:

$$A_n(\tau) = E_n(\tau) \int_0^\tau F_n(\zeta) d\zeta.$$

Пусть на границах действуют возмущения гармонического вида (3.28). Тогда при использовании метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений движения механических объектов переменной длины условие (6.2) примет вид:

$$W_{ji}(\tau) = w_n(\tau) - \gamma,$$

где $w_n(\tau), W_n(\tau), W_{ji}(\tau)$ – определены в разделе 3.1.

При использовании численно–аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений выражение для амплитуды имеет аналогичный вид (см. (3.93)):

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

что позволяет применять для анализа резонансных свойств рассмотренную методику. Условие установившегося резонанса для различных задач принимает следующий вид:

1) для задачи (3.83) при граничных условиях (3.96), (3.97), (3.98) и (3.101):

$$W_{1n}(\tau) = 2\pi n \varphi(\tau + l_1(\tau)) + \gamma,$$

$$W_{2n}(\tau) = 2\pi n \varphi(\tau + l_2(\tau)) + \gamma;$$

2) для задачи (3.83) при граничных условиях (3.99) и (3.100):

$$W_{1n}(\tau) = \pi(2n-1)\varphi(\tau + l_1(\tau)) + \gamma,$$

$$W_{2n}(\tau) = \pi(2n-1)\varphi(\tau + l_2(\tau)) + \gamma.$$

Явление прохождения через резонанс наблюдается во временной области, содержащей точку τ_0 , где скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равно нулю, т.е.

$$\Phi_n'(\tau_0) = 0. \quad (6.3)$$

В этой точке мгновенная частота n -ного собственного колебания проходит через значение возмущающей частоты. Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 и заканчивается за этой точкой.

Если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) будет определяться следующим выражением:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (6.4)$$

График максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс изображен на рисунке 6.1.

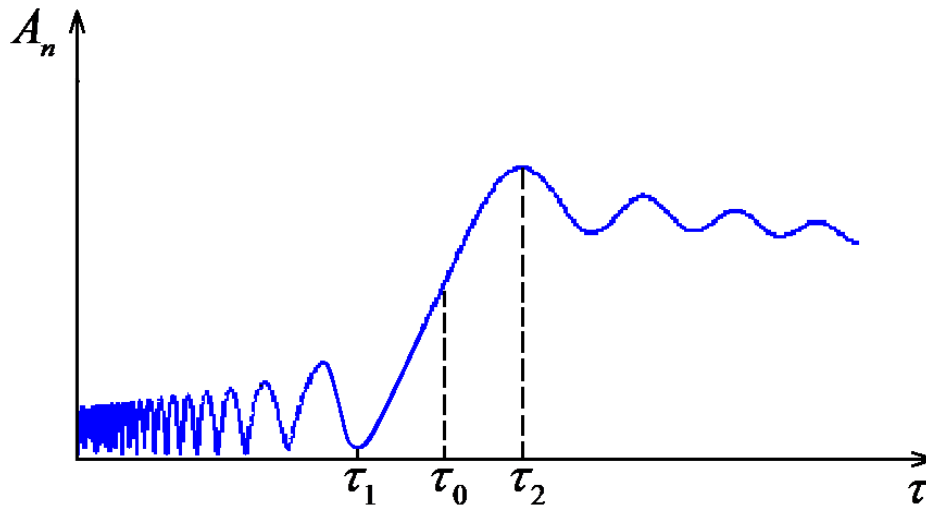


Рис.6.1. График максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс

Численный метод исследования прохождения через резонанс рассмотрен в работе [123] и заключается в определении границ резонансной области τ_1 и τ_2 , соответствующих максимуму выражения (6.4).

Данный численный метод и алгоритмы положены в основу программного комплекса «ТВ–ANALYSIS–7» и использованы в главе 7 для решения конкретных задач. Во всех рассмотренных моделях процесс вычислений был устойчив и давал удовлетворительные по точности результаты.

6.2. Приближенное исследование явления прохождения через резонанс

Если колебательная система не подвержена действию демпфирующих сил, а границы движутся в медленном режиме, то в выражении для амплитуды (6.4) функции E_n и F_n являются функциями медленного времени (см. раздел 2.4). За период прохождения через резонанс эти функции изменяются незначительно, и их можно считать постоянными величинами. В таком случае выражение (6.4) примет следующий вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) \approx d_n^2 \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (6.5)$$

Постоянную d_n можно вычислить по формуле

$$d_n = E_n(\tau_2)F_n(\tau_0),$$

где τ_0 находится из уравнения (6.3), а τ_2 – граница резонансной области (она будет определена ниже).

Если к фазе $\Phi_n(\tau)$ прибавить постоянную величину или умножить её на (-1) , то величина амплитуды, определяемая формулой (6.4), не изменится. Используя это, можно добиться того, чтобы функция $\Phi_n(\tau)$ имела в резонансной области график, изображенный на рисунке 6.2.

Аппроксимируем график функции $\Phi_n(\tau)$ кубической параболой, проходящей через точки E, K и касающейся оси абсцисс в точке M (рисунок 6.2).

Тогда

$$\Phi_n(\tau) = \alpha(\tau - \tau_0)^3 - \beta(\tau - \tau_0)^2, \quad (6.6)$$

где

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \frac{(r-1)r}{(a_2 - \tau_0)^3}; \quad \beta = \frac{\pi}{2} \frac{1-r+r^2}{(a_2 - \tau_0)^2}; \quad (6.7)$$

$$r = \frac{a_2 - \tau_0}{\tau_0 - a_1}. \quad (6.8)$$

Сделаем замену переменной в интегралах равенства (6.5):

$$\zeta - \tau_0 = z / \sqrt{\beta}.$$

Тогда с учетом (6.6) величина A_n^2 будет определяться выражением

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = \frac{d_n^2}{\beta} B_n^2(\tau_1, \tau_2), \quad (6.9)$$

где

$$B_n^2(\tau_1, \tau_2) = \left[\int_{z_1}^{z_2} \cos(cz^3 - z^2) dz \right]^2 + \left[\int_{z_1}^{z_2} \sin(cz^3 - z^2) dz \right]^2; \quad (6.10)$$

$$z_2 = (\tau_2 - \tau_0)\sqrt{\beta}; \quad z_1 = (\tau_1 - \tau_0)\sqrt{\beta}; \quad (6.11)$$

$$c = \alpha/(\beta\sqrt{\beta}), \quad (6.12)$$

а точка τ_0 перейдёт в точку $z_0 = 0$.

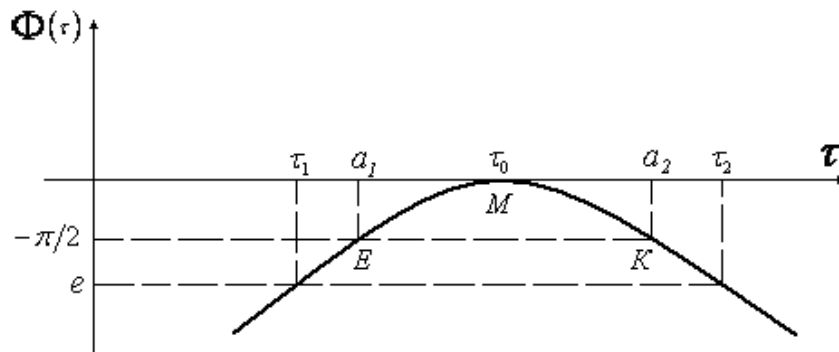


Рис. 6.2. График функции $\Phi_n(\tau)$ в резонансной области

Таким образом, задача сведена к нахождению при различных c величин $z_1 < 0$ и $z_2 > 0$, таких, что выражение (6.10) имеет максимум. Проведены численные расчеты для $-0,25 \leq c \leq 0,25$, результаты сведены в таблицу 6.1.

Таблица 6.1. Результаты численных расчетов выражения (6.10) на максимум

c	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25
z_1	-1,52	-1,46	-1,43	-1,40	-1,39	-1,38
z_2	1,52	1,68	1,66	1,80	2,06	2,50
B_n^2	5,65	5,72	5,97	6,31	6,72	7,42

Для определения величин z_1 , z_2 и B_n^2 при отрицательных c следует пользоваться следующими формулами:

$$z_1(-c) = -z_2(c);$$

$$z_2(-c) = -z_1(c);$$

$$B_n^2(-c) = B_n^2(c).$$

Из анализа таблицы следует, что $1,7 < -c < 1,85$. Этим, в частности, объясняется выбор точек E, K (см. рисунок 6.2).

Для определения границ резонансной области и максимальной амплитуды необходимо:

1) найти корень уравнения (6.3);

2) из уравнения $\Phi_n(\tau_0) + \gamma = 0$ определить постоянную γ ;

3) найти a_1 и a_2 из уравнения $\pm[\Phi_n(\tau) + \gamma] = -\frac{\pi}{2}$ (знак здесь выбирается

таким образом, чтобы выражение в квадратных скобках имело вблизи точки τ_0 график типа, изображённого на рисунке 6.2);

4) определить по формулам (6.7), (6.12) α, β, c ;

5) найти из таблицы 6.1 величины B_n^2, z_1, z_2 ;

6) найти по формулам (6.9), (6.11) значения τ_1, τ_2, A_n^2 .

6.3. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием

Прохождение через резонанс происходит в течение ограниченного временного интервала, и амплитуда колебаний в этом случае не достигает значений, характерных для установившегося резонанса. Однако, когда затухание велико, а скорость движения границ мала, указанные выше величины резонанса близки между собой. В такой ситуации для оценки амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, нет необходимости решать задачу с подвижными границами. Достаточно зафиксировать границы в резонансной точке и вычислить амплитуду установившихся колебаний, которая будет близка к максимальной амплитуде, наблюдаемой при прохождении через резонанс. Амплитуда колебаний при

неподвижных границах выступает в качестве верхней границы для искомой величины.

6.3.1. С учетом вышеизложенного возникает вопрос о том в каких случаях необходимо учитывать движение границ. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим прохождение через резонанс в системе с демпфированием.

В разделе 3.8. рассмотрены резонансные свойства систем с учётом демпфирующих сил. Выражения для амплитуды колебаний, полученные там, имеют вид

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau)e^{-2\alpha_0(\varepsilon_1\tau)\tau} \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \sin \Phi_n(\zeta)d\zeta \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta)e^{\alpha_0(\varepsilon_1\zeta)\zeta} \cos \Phi_n(\zeta)d\zeta \right]^2 \right\},$$

где $\alpha_0(\varepsilon_1\tau)$ – некоторая функция, ε_1 – малый параметр; E_n, F_n, Φ_n – определены ранее (раздел 3.1).

Заменяя функции медленного времени постоянными величинами и аппроксимируя функцию $\Phi_n(\tau)$ параболой, получим следующее приближённое выражение для амплитуды колебаний систем с демпфированием, возникающих при прохождении через резонанс:

$$A_{0n}^2(\tau_1, \tau_2) = A^2 e^{-2\alpha_0\tau_2} \left[I_{os}^2(\tau_1, \tau_2) + I_{oc}^2(\tau_1, \tau_2) \right], \quad (6.13)$$

где

$$I_{os}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \sin \Phi_n(\zeta)d\zeta; \quad (6.14)$$

$$I_{oc}(\tau_1, \tau_2) = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{\alpha_0\zeta} \cos \Phi_n(\zeta)d\zeta; \quad (6.15)$$

$$\Phi_n(\zeta) = \frac{1}{2\nu}(\nu\zeta + \omega_0)^2, \quad (6.16)$$

где α_0 – коэффициент, характеризующий затухание в системе (его можно принять равным декременту затухания свободных колебаний); A – постоянная величина.

Заметим, что $\Phi'_n(\zeta) = \nu\zeta + \omega_0$; $\Phi''_n(\zeta) = \nu$. Отсюда следует, что параметр ν характеризует скорость прохождения через резонанс, а величина τ_0 (см. раздел 6.1) определяется по формуле $\tau_0 = -\omega_0 / \nu$.

Сделаем в интегралах (6.14), (6.15) замену переменных:

$$z = (\nu\zeta + \omega_0) / \sqrt{2|\nu|}.$$

Тогда выражение (6.13) примет вид

$$A_{0n}^2(\tau_1, \tau_2) = A^2 \frac{2}{|\nu|} A_n^2(z_1, z_2), \quad (6.17)$$

где

$$A_n^2(z_1, z_2) = e^{-2\alpha z_2} [I_s^2(z_1, z_2) + I_c^2(z_1, z_2)]; \quad (6.18)$$

$$I_s(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z} \sin(\pm z^2) dz; \quad (6.19)$$

$$I_c(z_1, z_2) = \int_{z_1}^{z_2} e^{\alpha z} \cos(\pm z^2) dz; \quad (6.20)$$

$$\alpha = \alpha_0 \sqrt{2/|\nu|}; \quad z_i = (\nu\tau_i + \omega_0) / \sqrt{2|\nu|}; \quad i = \overline{1, 2}.$$

Выбор знака перед z^2 в (6.19) и (6.20) не изменит величины выражения (6.18), поэтому в дальнейшем будем брать знак плюс. Заметим также, что после замены точка τ_0 переходит в точку $z_0 = 0$.

Исследуем выражение (6.18) на максимум в окрестности точки $z_0 = 0$.

Величины z_1 и z_2 , соответствующие максимуму, определяются из системы

$$\begin{cases} \frac{\partial A_n^2(z_1, z_2)}{\partial z_1} = 0; \\ \frac{\partial A_n^2(z_1, z_2)}{\partial z_2} = 0, \end{cases}$$

которая в рассматриваемом случае примет вид

$$\begin{cases} -\alpha I_s(z_1, z_2) + e^{\alpha z_2} \cos z_1^2 \sin(z_2^2 - z_1^2) = 0, \\ I_s(z_1, z_2) \sin z_1^2 + I_c(z_1, z_2) \cos z_1^2 = 0. \end{cases} \quad (6.21)$$

В результате численного решения данной системы была получена следующая таблица (табл. 6.2).

Таблица 6.2. Результаты численного решения системы (6.21)

α	0,00	0,10	0,30	0,50	0,70	1,00	1,30	2,00	3,00	7,00
z_1	-1,56	-1,54	-1,49	-1,49	-1,48	-1,48	-1,47	-1,46	-1,35	-1,29
z_2	1,56	1,45	1,30	1,25	1,20	1,15	1,10	1,00	0,70	0,40
$A_n(\alpha)$	2,37	2,06	1,60	1,29	1,07	0,84	0,68	0,47	0,33	0,144

Максимальная амплитуда колебаний, возникающих при остановке границ в резонансной точке, определяется выражением (6.13) при $\nu = 0$. Произведя вычисления, получим:

$$A_{0n}^{\max} = A/\alpha_0 . \quad (6.22)$$

При $\nu \neq 0$ амплитуда определяется выражением

$$A_{0n} = A \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} A_n \left(\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \right), \quad (6.23)$$

где A_n находится по таблице 6.2.

Учёт движения границ следует производить, если относительная погрешность амплитуды

$$\Delta = \frac{A_{0n}^{\max} - A_{0n}}{A_{0n}} \quad (6.24)$$

велика. Подставляя в выражение (6.24) равенства (6.22), (6.23), получим:

$$\Delta = \frac{\frac{\sqrt{|\nu|}}{\alpha_0 \sqrt{2}} - A_n \left(\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \right)}{A_n \left(\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} \right)}.$$

Используя данные таблицы 6.2, нетрудно установить, что погрешность Δ превышает значение 0,05 при

$$\alpha_0 \sqrt{\frac{2}{|\nu|}} < 2,164. \quad (6.25)$$

Неравенство (6.25) определяет область в пространстве параметров α_0, ν , где необходимо учитывать движение границ.

6.3.2. Определим, как соотносятся между собой величина ν и скорость движения границ. Если система подвержена действию силы постоянной частоты ω_0 , то с точностью до величин порядка малости ε^2 (ε – малый параметр, характеризующий медленность движения границ) можем записать

$$\Phi_n(\tau) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta - \omega_0\tau, \quad (6.26)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)$ – собственная частота колебаний системы (см. (3.72)).

В большинстве прикладных случаев функция $\omega_{0n}(\varepsilon\zeta)$ может быть записана в виде

$$\omega_{0n}(\varepsilon\zeta) = k/\ell^\gamma(\varepsilon\zeta), \quad (6.27)$$

где k, γ – постоянные величины.

Величина ν характеризует скорость прохождения через резонанс и определяется по формуле

$$\nu = \Phi_n''(\tau),$$

откуда с учётом (6.26), (6.27) получим

$$\nu = -\omega_{0n}(\varepsilon\tau) \frac{\gamma \varepsilon \ell'(\varepsilon\tau)}{\ell(\varepsilon\tau)}.$$

Таким образом, ν является медленно изменяющейся во времени функцией. Примем за ν ее значение в точке $\tau = \tau_0$, где мгновенная собственная частота системы совпадает с возмущающей частотой. В этом случае получим

$$\nu = -\omega_0 \frac{\gamma \nu}{\ell_0}, \quad (6.28)$$

где ℓ_0 – длина объекта в момент времени $\tau = \tau_0$; ν – скорость изменения длины в точке $\tau = \tau_0$.

Подставляя ν в (6.25) и производя преобразования, получим следующее неравенство, ограничивающее область, где необходимо учитывать движение границ:

$$\Delta_A < 3,8\sqrt{\gamma\Delta_\ell}, \quad (6.29)$$

где $\Delta_\lambda = 2\pi\alpha_0/\omega_0$ – относительное изменение амплитуды за одно свободное колебание; $\Delta_\ell = 2\pi|\nu|/\omega_0\ell_0$ – относительное изменение длины за одно свободное колебание.

6.3.3. Следует учитывать, что возможен случай, при котором прохождение через резонанс осуществляется настолько стремительно, что демпфирующие силы не успевают существенно уменьшить амплитуду колебаний. В этом случае при решении задачи можно не учитывать действие демпфирующих сил, и в данной ситуации (см. (6.13)) параметр α_0 следует принять равным нулю. Погрешность при этом имеет вид

$$\Delta = \frac{A_{on}|_{\alpha=0} - A_{on}}{A_{on}}.$$

Используя данные таблицы 6.2, находим, что эта погрешность превышает значение 0,05, если

$$\alpha_0\sqrt{\frac{2}{|\nu|}} > 0,04.$$

Подставляя сюда величину ν , определяемую равенством (6.28), после преобразований получим:

$$\Delta_A > 0,1\sqrt{\gamma\Delta_\ell}. \quad (6.30)$$

Неравенство (6.30) определяет область, где необходимо учитывать действие демпфирующих сил.

Области учета действия демпфирующих сил и движения границ изображены на рисунке 6.3.

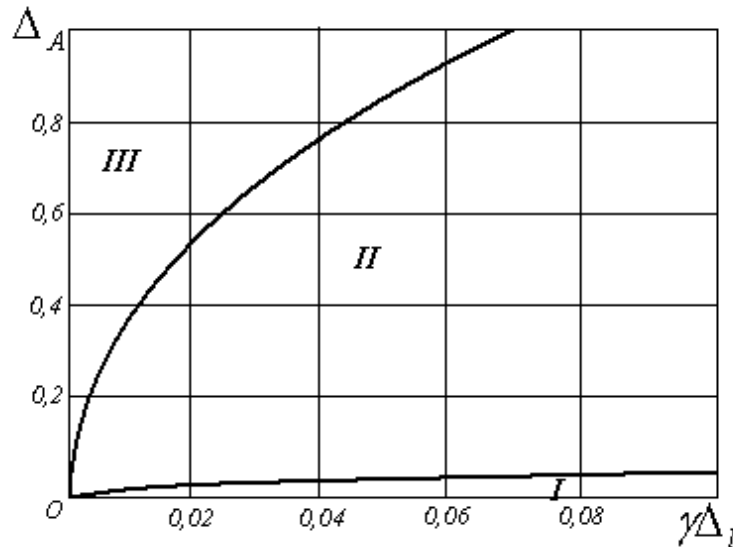


Рис. 6.3. Области учета действия демпфирующих сил и движения границ

Следовательно, если соблюдается неравенство $0 < \Delta_A < 0,1\sqrt{\gamma\Delta_l}$, то при исследовании прохождения через резонанс действие демпфирующих сил можно игнорировать (область I на рисунке 6.3). Если $\Delta_A > 3,8\sqrt{\gamma\Delta_l}$, то допустимо не учитывать движение границ (область III на рисунке 6.3), а при $0,1\sqrt{\gamma\Delta_l} < \Delta_A < 3,8\sqrt{\gamma\Delta_l}$ необходимо учитывать и демпфирующие силы, и движение границ (область II на рисунке 6.3).

6.4. Выводы по шестой главе

1. Разработанный метод моделирования и численного исследования резонансных эффектов, наблюдаемых в механических системах с движущимися границами, позволяет установить возможность возникновения установившегося резонанса, а также определить численные характеристики

явления прохождения через резонанс – что особенно важно для современных технических приложений.

2. Разработанный алгоритм численного исследования явления прохождения через резонанс позволяет найти границы резонансной области и амплитуду колебаний, возникающих при различных режимах работы системы.

3. Проведенное исследование воздействия демпфирующих сил на амплитуду колебаний, возникающих при прохождении через резонанс, позволило получить критерии необходимости учета движения границ и влияния демпфирующих сил в зависимости от параметров системы.

Глава 7

Программный комплекс для исследования колебаний и явлений резонанса в одномерных системах переменной длины

Материалы данной главы излагаются в соответствии с публикациями автора данной работы [8, 11–18, 104–114, 119–141, 144–148, 155–169, 178–189, 197].

В данной главе представлено описание разработанного программного комплекса «TB–ANALYSIS–7», который предназначен для решения определённого класса одномерных краевых задач с движущимися границами, а также для математического моделирования и анализа резонансных свойств механических систем с изменяющейся границей.

Программный комплекс предоставляет следующие возможности:

1. Получение и анализ численных решений модельных уравнений для заданных параметров системы и внешних воздействий.
2. Исследование резонансных свойств моделей в зависимости от различных факторов, таких как тип объекта, скорость движения границ, мода колебаний, сила сопротивления среды, вязкоупругие свойства, изгибная жёсткость объекта и жёсткость основания.
3. Подбор параметров модели для исключения возникновения резонансных эффектов.
4. Решение нелинейных задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами, с использованием разработанного численного метода.

Алгоритмы и программы, входящие в состав комплекса «ТВ–ANALYSIS–7», созданы на основе аналитических исследований, изложенных в главах 2–6.

Комплекс программ реализован в среде MATLAB [197] в виде автономного прикладного программного обеспечения.

На рисунке 7.1 представлена структурная блок–схема комплекса «ТВ–ANALYSIS–7», которая иллюстрирует алгоритмы и процессы, выполняемые программой, а также взаимодействие между отдельными модулями.



Рис. 7.1. Блок–схема комплекса программ «ТВ–ANALYSIS–7»

Каждый модуль программного комплекса, соответствующий отдельному блоку схемы, будет подробно описан в настоящей главе.

Следующий раздел посвящён основным принципам функционирования программы.

7.1. Описание комплекса программ

Интерфейс программного комплекса «TB-ANALYSIS-7» включает четыре окна, одно из которых является главным. Это окно открывается при запуске программы (см. рисунок 7.2), а остальные окна активируются через главное. Также они могут быть вызваны друг из друга с помощью меню программы.

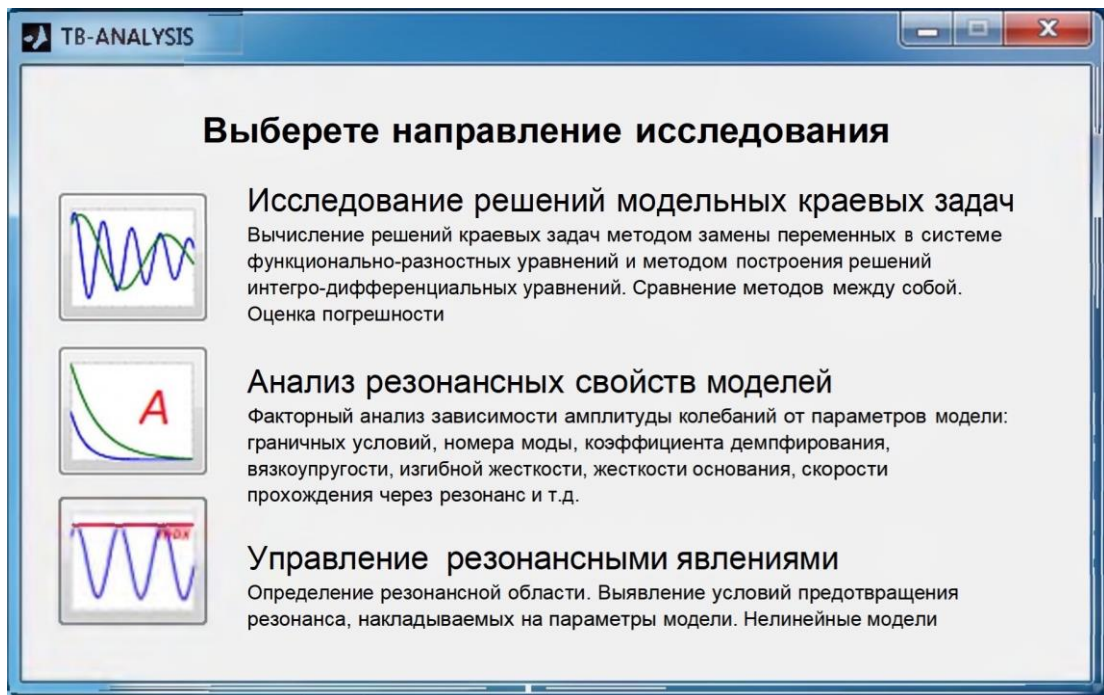


Рис. 7.2. Главное окно

Главное окно программного комплекса «TB-ANALYSIS-7» включает три интерактивные кнопки с графическими обозначениями, которые отвечают за запуск ключевых модулей программы:

- 1) исследование решений модельных краевых задач;

- 2) анализ резонансных свойств моделей;
- 3) управление резонансными явлениями.

Меню доступно во всех окнах, за исключением главного, и включает разделы: «Файл» и «Выбор направления исследования».

В разделе «Файл» представлены команды: «Импорт/Загрузить», «Экспорт/Сохранить» и «Выход».

Команда «Импорт/Загрузить» предназначена для пакетного ввода данных, т.е. загрузки начальных параметров из файлов форматов *.xls/*.xlsx и *.txt. Это предоставляет удобную альтернативу ручному вводу информации с клавиатуры

Команда «Экспорт/Сохранить» содержит подменю «Значения» и «Графики», которые позволяют сохранять массивы рассчитанных данных в файлы форматов *.txt и .xls (.xlsx) для последующего использования в данной программе или других программных средах, а также сохранять построенные графики в форматы *.eps или *.png соответственно.

Команда «Выход» завершает работу программы «TB-ANALYSIS-7» и закрывает текущее окно.

Раздел меню «Направления исследования» включает подпункты: «Исследование решений модельных краевых задач», «Анализ резонансных свойств моделей» и «Управление резонансными явлениями».

Команда «Исследование решений модельных краевых задач» предназначена для построения решений краевых задач с использованием численно-аналитического метода, основанного на замене переменной в системе функционально-разностных уравнений, а также асимптотического и приближённого методов решения интегро-дифференциальных уравнений. Кроме того, данная функция позволяет сравнивать результаты, полученные разными методами, и оценивать погрешность каждого из них.

Команда «Анализ резонансных свойств моделей» даёт возможность проводить факторный анализ, изучая зависимость амплитуды колебаний от различных параметров модели. К таким параметрам относятся граничные

условия, номер моды колебаний, скорость прохождения через резонанс, сопротивление внешней среды, вязкоупругие свойства, изгибная жёсткость объекта и жёсткость основания и т.д.

Команда «Управление резонансными явлениями» позволяет определять область резонанса и устанавливать условия, при которых резонанс может быть предотвращён, путём наложения ограничений на параметры модели.

7.2. Решений модельных краевых задач с помощью программного комплекса

При нажатии на верхнюю кнопку в главном окне оно трансформируется, принимая вид, показанный на рисунке 7.3.

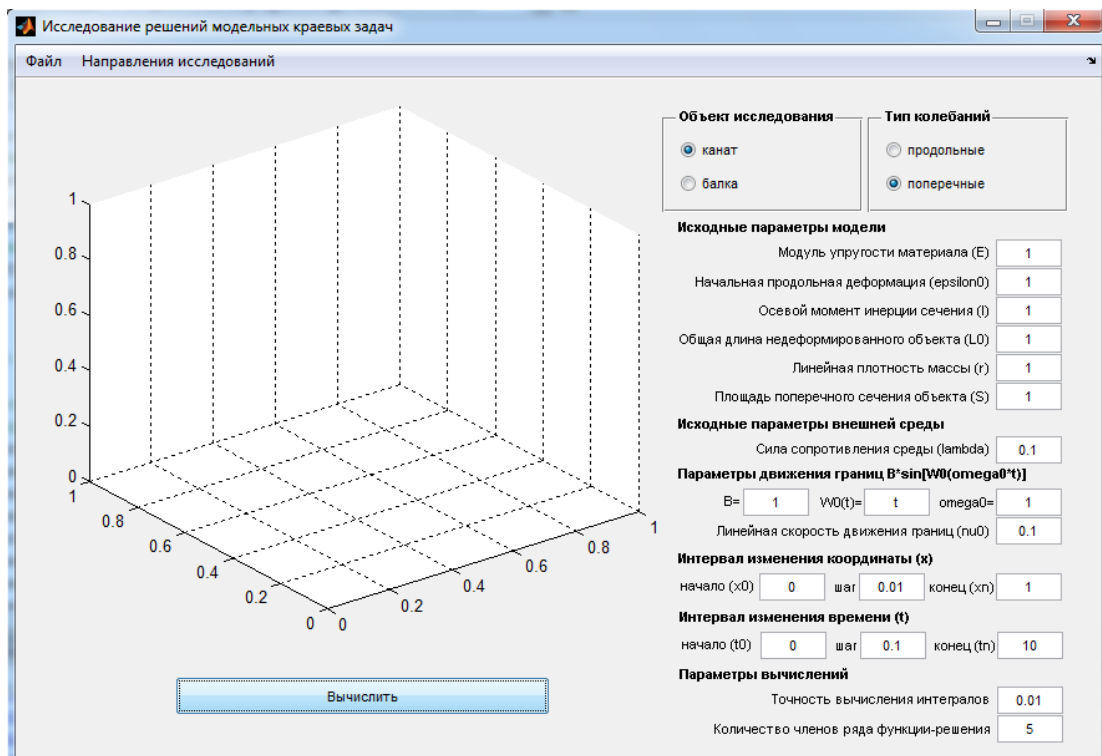


Рис. 7.3. Окно исследования решений модельных краевых задач

Данное окно включает меню с разделами: «Файл» и «Направления исследования», которые упрощают взаимодействие с программой.

В разделе «Файл» доступны команды: «Импорт/Загрузить», «Экспорт/Сохранить» и «Выход».

Описание команд «Импорт/Загрузить» и «Выход» приведено в разделе 7.1.

Команда «Экспорт/Сохранить» включает подпункты «Данные» и «График», предназначенные для сохранения массивов вычисленных значений в файлы форматов *.xls/*.xlsx и *.txt для дальнейшего использования, а также для экспорта отображённых графиков в форматы *.eps и *.png соответственно

Раздел меню «Направления исследований» включает следующие подпункты: «Исследование решений модельных краевых задач», «Анализ резонансных свойств моделей», «Сравнение методов решений». Обозначенные команды отвечают за запуск соответствующих модулей программы.

Кнопка «Вычислить» служит для выполнения расчётов и построения графиков полученных зависимостей.

Расчёты проводятся с использованием трёх методов решения краевых задач: приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений движения механических объектов с движущимися границами в сочетании с методом Канторовича–Галеркина; асимптотического метода построения решений однородных интегро–дифференциальных уравнений и систем обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих движение объектов переменной длины; численно–аналитического метода замены переменной в системе функционально–разностных уравнений, описанных в главе 3.

Автоматический выбор метода решения зависит от типа анализируемой модели (класса интегро–дифференциального или дифференциального уравнения, а также начальных и граничных условий):

– для моделей, описываемых однородными интегро–дифференциальными уравнениями, используется асимптотический метод;

– для моделей, описываемых более сложными неоднородными интегро–дифференциальными уравнениями, применяется приближённый метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галеркина;

– для моделей, описываемых волновым уравнением, задействуется численно–аналитический метод, основанный на замене переменной в системе функционально–разностных уравнений.

Вычисление решений краевых задач численно–аналитическим методом выполняется с помощью внутренней функции «TBNumAnal_7».

Асимптотический метод реализован во внутренней функции «TBAsym_7» и базируется на теоретических выводах, изложенных в главе 3.

При использовании приближённого метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений также применяются результаты главы 3, которые реализованы в функции «TBNum_7».

Пример работы данного модуля представлен на рисунке 7.4.

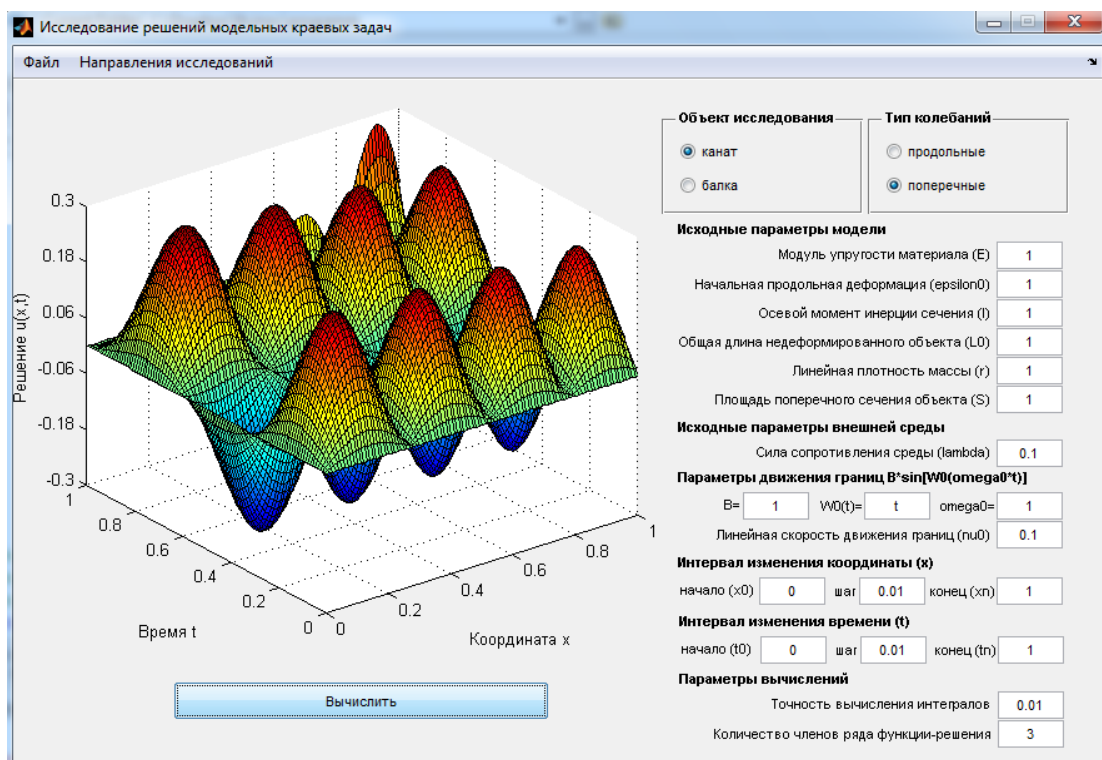


Рис. 7.4. График функции–решения краевой задачи для поперечных колебаний каната при $x=0;0,01;1$; $t=0;0,01;1$; движении границы по закону $f(t) = \sin t$ и линейной скорости движения границы $v_0 = 0,1$

7.3. Вычисление резонансных характеристик математических моделей

При нажатии кнопки «Анализ резонансных свойств моделей» в главном окне оно преобразуется в окно, показанное на рисунке 7.5. Данное окно включает те же разделы меню, что и окно модуля «Исследование решений модельных краевых задач».

Окно также содержит две панели с переключателями: «Объект исследования» и «Анализ зависимости», а также группы полей для ручного ввода данных:

- «Параметры модели» (включая поля «Номер моды», «Коэффициент демпфирования», «Коэффициент жёсткости объекта», «Коэффициент вязкоупругости», «Коэффициент жёсткости подложки» и др.);
- «Интервал изменения скорости границ» (с полями «Начало», «Шаг», «Конец»);
- «Интервал изменения времени» (с полями «Начало», «Шаг», «Конец»).

Дополнительно в окне предусмотрена область для построения графиков и кнопка «Вычислить».

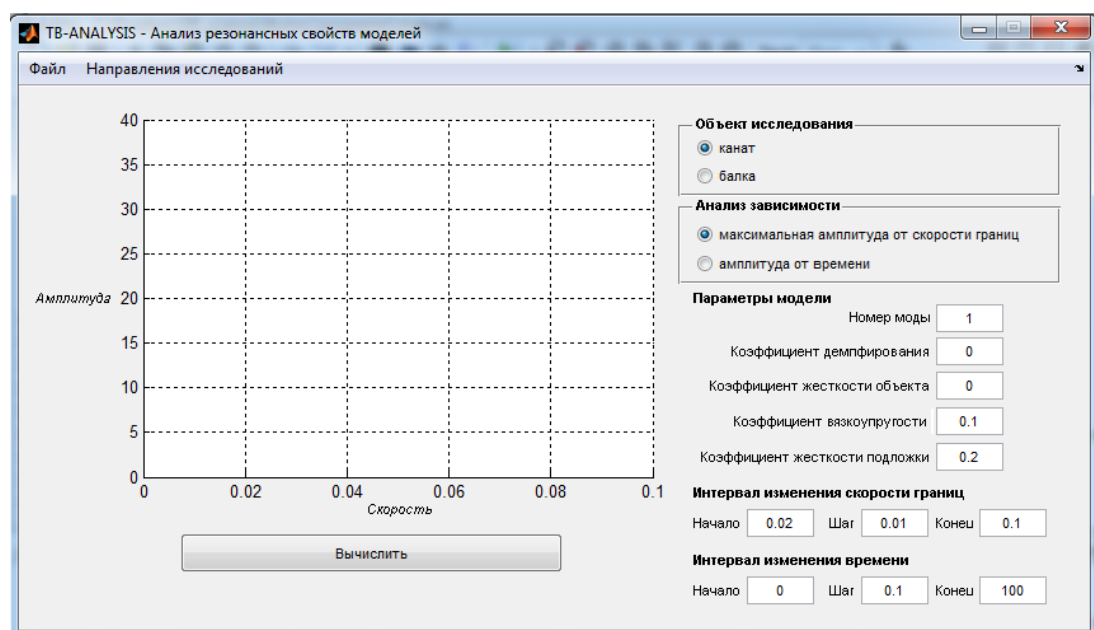


Рис.7.5. Окно анализа резонансных свойств моделей

Панель с переключателями «Объект исследования» предоставляет возможность выбрать один из двух объектов: канат или балку.

С помощью панели «Анализ зависимости» можно задать направление исследований:

- исследование зависимости амплитуды от времени;
- исследование зависимости максимальной амплитуды от скорости границ.

Расчёт зависимости амплитуды колебаний от времени выполняется с использованием приближённого метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений (глава 3) и реализован во внутренней функции программы – «met_ampl_7».

Вычисление зависимости максимальной амплитуды от скорости осуществляется с использованием методики, рассмотренной в главе 6. Методика основана на выражениях для амплитуды колебаний, полученных с помощью численно–аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений, а также приближённого метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений, и учитывает резонансные свойства исследуемых объектов.

В соответствии с разделами 3.1, 3.2, 3.6, 3.8 выражение для амплитуды колебаний системы на n -ной динамической моде имеет вид:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.1)$$

Алгоритм численного исследования установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс, описанный в разделе 6.1, реализован в функции «met_ampl_max_7». На рисунке 7.6 представлен график зависимости максимальной амплитуды колебаний каната при прохождении через резонанс от скорости движения границы для различных значений коэффициента сопротивления среды (сверху вниз: $\lambda = 0$; $\lambda = 0,01$; $\lambda = 0,02$) со следующими

параметрами модели: номер моды 1; коэффициент жесткости объекта 0,01; коэффициент вязкоупругости 0,01; коэффициент жесткости подложки 0,02.

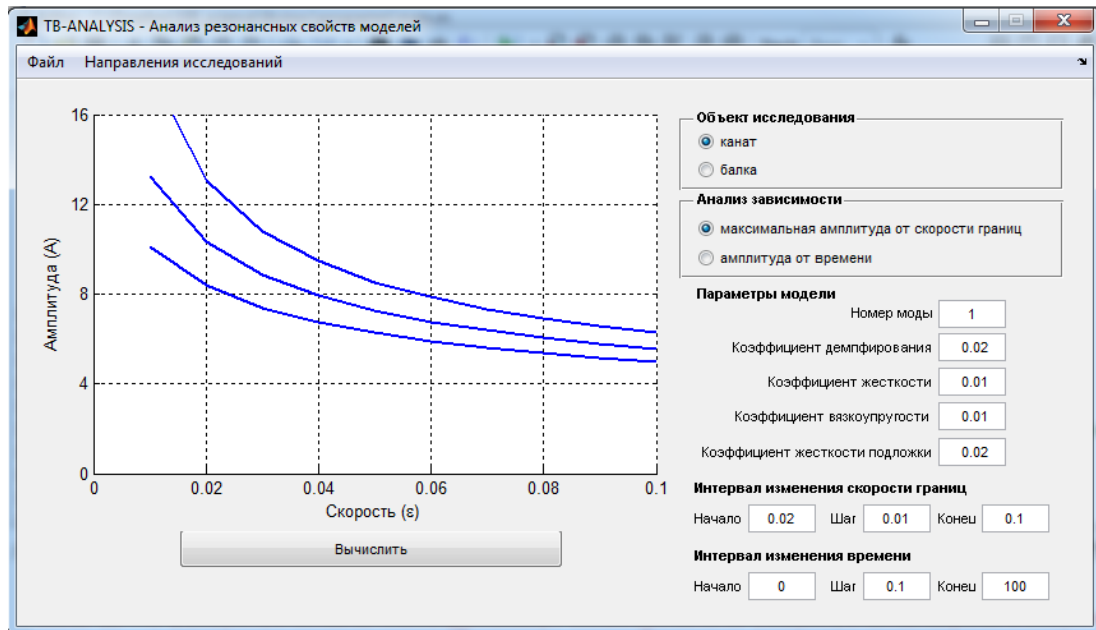


Рис.7.6. График зависимости максимальной амплитуды от скорости движения границ при различных значениях коэффициента сопротивления среды (сверху вниз:

$$\lambda = 0; \lambda = 0,01; \lambda = 0,02)$$

Внутренняя функция «met_ampl_7», которая является подфункцией «met_ampl_max_7», выполняет вычисление выражения для амплитуды колебаний (5.1) в зависимости от времени. Результаты тестовых вычислений амплитуды поперечных колебаний каната переменной длины при прохождении через резонанс на первой динамической моде для заданных параметров модели представлены на рисунке 7.7.

Помимо своей основной функции, графики, представленные на рисунке 7.7, также демонстрируют особенности поведения амплитуды колебаний, которые легли в основу метода расчёта максимальной амплитуды.

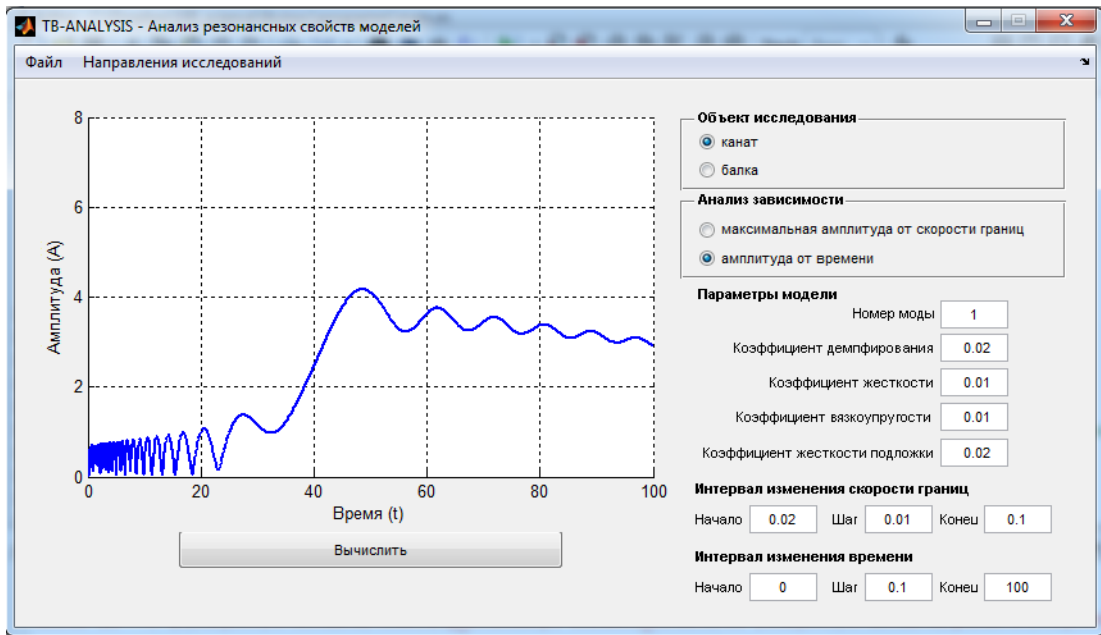


Рис.7.7. График зависимости амплитуды от времени

7.4. Оценка погрешности вычислений на примере математической модели поперечных колебаний вязкоупругого каната переменной длины

Проведём оценку погрешности вычисления квадрата амплитуды (6.4) при прохождении через резонанс.

В работе [123] для оценки погрешности вычислений квадрата амплитуды доказана следующая лемма.

Лемма 7.1. Прибавление и вычитание константы к функции $z(\tau)$ не влияет на результат вычисления функции

$$g(\varepsilon, \tau_1, \tau_2) = \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \cos[z(\zeta)] d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(\zeta) \sin[z(\zeta)] d\zeta \right]^2.$$

Из леммы 7.1 следует, что погрешность численного вычисления функции $\Phi_n(\zeta)$ не влияет на точность вычисления выражения (6.4), что значительно облегчает оценку погрешности.

Таким образом, погрешность вычислений квадрата амплитуды (6.4) вычисляется по формуле

$$R = 2E_n^2(\tau_2)R_{\text{int}}[R_{\text{int}} + I_1 + I_2], \quad (7.2)$$

где $I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta$, $I_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta$, $R_{\text{int}} = \max\{R_{\text{int}}^1, R_{\text{int}}^2\}$,

$R_{\text{int}}^1, R_{\text{int}}^2$ – погрешности вычисления интегралов I_1, I_2

В программном комплексе реализован алгоритм оценки погрешности на каждом этапе расчетов, на основе формулы (7.2). Для контроля точности вычислений применяется встроенная функция MATLAB – quad, которая используется для численного интегрирования, одним из аргументов которой является погрешность вычислений.

Для повышения эффективности вычислений интегралов используется принцип аддитивности интегрального оператора, что позволяет существенно сократить время выполнения расчетов.

В рамках исследования проведена оценка погрешностей для модельной краевой задачи, описывающей поперечные колебания вязкоупругого каната переменной длины, лежащего на упругом основании, обладающего изгибной жесткостью, с учетом действия сил сопротивления среды.

В безразмерных переменных

$$\xi = \omega_0 x / a; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}; \quad U(x, t) = Bu(\xi, \tau)$$

дифференциальное уравнение и граничные условия, описывающие колебания каната, имеют вид [123]:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \sigma^2 V(\xi, \tau) + (\beta^2 - \alpha\gamma^2)V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma^2 V_{\xi\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.3)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (7.4)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau); \quad V_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0. \quad (7.5)$$

Введем обозначения $\delta^2 = (\beta^2 - \alpha\gamma^2)$ и $\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \sigma^2$, где $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$ – собственные частоты задачи (7.3) – (7.5).

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям раздела 3.1. и 3.8. получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\varepsilon\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1 / \sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad w_n(\tau) = \int_0^\tau \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta) d\zeta;$$

$$F_n(\varepsilon\zeta) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\zeta) Q_{n21}(\varepsilon\zeta) e^{\alpha\zeta} \sqrt{A_{1n}(\varepsilon\zeta) / \Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)}.$$

Произведем оценку погрешности вычислений.

Решение задачи (7.3–7.5) имеет вид:

$$u(\xi, \tau) = e^{-\alpha\tau} \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (7.6)$$

Отбрасывая в (7.6) члены ряда начиная с k -го, получим выражение для погрешности в виде

$$R_k = e^{-\alpha\tau} \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (7.7)$$

Для вычисления (7.7) необходимо найти зависимость погрешности от номера k . При $\alpha > 0$, $\tau > 0$ имеем

$$\begin{aligned} |R_k| &= \left| e^{-\alpha\tau} \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \right| \leq \left| \sum_{n=k}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \right| \leq \sum_{n=k}^{\infty} |\mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)| = \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} |\mu_n(\tau)| |X_n(\xi, \varepsilon\tau)|, \end{aligned}$$

где модуль амплитуды $\mu_n(\tau)$ определяется выражением

$$|\mu_n(\tau)| = E_n(\varepsilon\tau) \sqrt{\left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}}.$$

Погрешность вычисления интегралов $I_1 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta$,

$I_2 = \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta$ рассмотрена выше.

Проведем оценку множителя $E_n(\varepsilon\tau) = \frac{e^{-\alpha\tau}}{\sqrt{4A_{1n}(\varepsilon\tau)}\sqrt{\omega_{0n}^2 - \sigma^2}}$.

Для оценки $E_n(\varepsilon\tau)$ требуется оценить составляющие $d_n(\varepsilon\tau)$, $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$, $A_{1n}(\varepsilon\tau)$, $k_1(\varepsilon\tau)$, $k_2(\varepsilon\tau)$, $c_n(\varepsilon\tau)$.

Оценим $d_n(\varepsilon\tau)$.

$$d_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)}}{\sqrt{1 + \delta^2 \frac{\pi^2 n^2}{l^2(\varepsilon\tau)}}} = \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{\frac{l^2(\varepsilon\tau)}{n^2} + \delta^2 \pi^2}}.$$

$$\frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{\frac{l^2(\varepsilon\tau)}{n^2} + \delta^2 \pi^2}} \Big|_{n=1} \leq d_n(\varepsilon\tau) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{\frac{l^2(\varepsilon\tau)}{n^2} + \delta^2 \pi^2}}.$$

$$\frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau) + \delta^2 \pi^2}} \leq d_n(\varepsilon\tau) \leq \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \operatorname{arctg} 1.$$

В итоге получим оценку для $d_n(\varepsilon\tau)$:

$$0 < d_n(\varepsilon\tau) \leq \frac{\pi}{4l(\varepsilon\tau)}. \quad (7.8)$$

Теперь оценим $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$.

$$\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \left(\frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)} + d_n(\varepsilon\tau) \right) \sqrt{1 + \delta^2 \left(\frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)} + d_n(\varepsilon\tau) \right)^2} =$$

$$= \frac{1}{l(\varepsilon\tau)} \left(\pi n + \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{\frac{l^2(\varepsilon\tau)}{n^2} + \delta^2 \pi^2}} \right) \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(\pi n + \operatorname{arctg} \frac{\delta\pi}{\sqrt{\frac{l^2(\varepsilon\tau)}{n^2} + \delta^2 \pi^2}} \right)^2}.$$

В итоге получим оценку для $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$:

$$\frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} n \sqrt{1 + \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2} < \omega_{0n} \leq \frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right) \sqrt{1 + \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2}. \quad (7.9)$$

Оценим $A_{1n}(\varepsilon\tau) = \frac{1}{2} l(\varepsilon\tau) [1 - c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}$. Для этого

оценим по отдельности каждую составляющую $A_{1n}(\varepsilon\tau)$.

Произведем оценку $k_1(\varepsilon\tau)$:

$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{2}\delta} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + 4\delta^2 \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)}}.$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\delta} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2 \left(1 + \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2\right)}} < k_1(\varepsilon\tau) \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2}\delta} \sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2 \left(1 + \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2\right)}}.$$

$$\frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} n < k_1(\varepsilon\tau) \leq \frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right). \quad (7.10)$$

Аналогично оценим $k_2(\varepsilon\tau)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\delta} \sqrt{2 + \frac{2\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2} < k_2(\varepsilon\tau) \leq \frac{1}{\sqrt{2}\delta} \sqrt{2 + \frac{2\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2}.$$

$$\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2} < k_2(\varepsilon\tau) \leq \sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4}\right)^2}. \quad (7.11)$$

Приступим к оценке $c_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{sh[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}$.

При $k_1(\varepsilon\tau) = \frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} n$ и $k_2(\varepsilon\tau) = \sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2}$ числитель

$\sin[k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] = 0$, поэтому $c_n(\varepsilon\tau) = 0$.

Рассмотрим $c_n(\varepsilon\tau)$ при других крайних значениях $k_1(\varepsilon\tau)$ и $k_2(\varepsilon\tau)$:

$$k_1(\varepsilon\tau) = \frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4} \right), \quad k_2(\varepsilon\tau) = \sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} \left(n + \frac{1}{4} \right)^2}.$$

В итоге получим

$$0 \leq |c_n(\varepsilon\tau)| < \frac{1}{|\operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]]}.$$

Далее построим оценку сверху.

$$|c_n(\varepsilon\tau)| < \frac{1}{|\operatorname{sh}[k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]]} = \frac{2}{e^{k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)} - e^{-k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}}.$$

Подставим поочередно два крайних значения для $k_2(\varepsilon\tau)$.

$$\begin{aligned} \frac{2}{e^{k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)} - e^{-k_2(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}} \Big|_{\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2}} &= \frac{2}{e^{l(\varepsilon\tau)\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2}} - e^{-l(\varepsilon\tau)\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2}}} = \\ &= \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}}}. \end{aligned}$$

Найдем пределы при $n=1$ и $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}}} \Big|_{n=1} = \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2}}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 n^2}}} = 0.$$

Второе крайнее значение $k_2(\varepsilon\tau)$ находится аналогично при $n=1$ и $n \rightarrow \infty$.

$$\frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2}}} \Big|_{n=1} = \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \frac{25\pi^2}{16}}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \frac{25\pi^2}{16}}}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2 \left(n + \frac{1}{4} \right)^2}}} = 0.$$

Итак, имеем два верхних значения. Во втором случае знаменатель имеет максимальное значение

$$e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2+\frac{9\pi^2}{16}}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2+\frac{9\pi^2}{16}}},$$

где $e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2+\frac{9\pi^2}{16}}} > e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2}}$, а $e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2+\frac{9\pi^2}{16}}} < e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2}}$.

Следовательно, максимальное значение $|c_n(\varepsilon\tau)|$ принимает в первом случае:

$$0 \leq |c_n(\varepsilon\tau)| \leq \frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2}}} = \frac{1}{sh\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2+\pi^2}} \leq 1. \quad (7.12)$$

Все составляющие оценены, теперь оценим $\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]$ из $A_{1n}(\varepsilon\tau)$.

$$\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]\Big|_{k_1(\varepsilon\tau)=\frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)}n} = \sin[2\pi n],$$

$$\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]\Big|_{k_1(\varepsilon\tau)=\frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)}\left(n+\frac{1}{4}\right)} = \sin\left[2\pi n + \frac{\pi}{2}\right].$$

Итак, $0 \leq \sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)] \leq 1$.

Далее оценим верхнее значение $\frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}$.

$$\begin{aligned} \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta} &= \frac{1}{4\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)}n^2} \frac{\pi}{l(\varepsilon\tau)}n\delta\sqrt{1 + \frac{\delta^2\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)}n^2}} = \\ &= \frac{1}{\frac{4\pi\delta}{l(\varepsilon\tau)}n\sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)}n^2[1 + \delta^4]} + \frac{\delta^2\pi^4}{l^4(\varepsilon\tau)}n^4}. \end{aligned}$$

Получим нижнюю оценку выражения $A_{1n}(\varepsilon\tau)$.

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) \geq \frac{1}{2}l(\varepsilon\tau)[1 - c_n^2(\varepsilon\tau)] - \frac{\sin[2k_1(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)]}{4k_2(\varepsilon\tau)\omega_{0n}(\varepsilon\tau)\delta}$$

$$= \frac{1}{2} l(\varepsilon\tau) \left[1 - \left(\frac{2}{e^{\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2}} - e^{-\sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2}}} \right)^2 \right] -$$

$$\frac{1}{\frac{4\pi\delta}{l(\varepsilon\tau)} n \sqrt{\delta^2 + \frac{\pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2 [1 + \delta^4]} + \frac{\delta^2 \pi^4}{l^4(\varepsilon\tau)} n^4}.$$

Для оценки $E_n(\varepsilon\tau)$ воспользуемся нижней границей $A_{1n}(\varepsilon\tau)$ и $\omega_{0n}(\varepsilon\tau)$, в виду того, что данные функции входят в знаменатель. Следовательно, верхняя оценка для $E_n(\varepsilon\tau)$ имеет вид

$$E_n(\varepsilon\tau) \leq \sqrt{\frac{e^{-2\alpha\tau}}{4A_{1n}(\varepsilon\tau)\sqrt{\omega_{0n}^2 - \sigma^2}}} =$$

$$= \frac{e^{-\alpha\tau}}{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} l(\varepsilon\tau) \left[1 - \frac{1}{sh^2 \sqrt{l^2(\varepsilon\tau)\delta^2 + \pi^2}} \right] - \frac{l^3(\varepsilon\tau)}{4\pi\delta n \sqrt{\delta^2 l^4(\varepsilon\tau) + \pi^2 n^2 l^2(\varepsilon\tau) [1 + \delta^4] + \delta^2 \pi^4 n^4}} \right)^2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)} \right)^2 \left(1 + \frac{\delta^2 \pi^2}{l^2(\varepsilon\tau)} n^2 \right) - \sigma^2}}.$$

7.5. Математические модели колебаний механических объектов переменной длины

С использованием разработанного программного комплекса проведен анализ и определены количественные оценки максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс для пятнадцати объектов, широко распространенных в технике.

7.5.1. Исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании с учетом влияния сил сопротивления среды

Исследуем колебания струны, лежащей на упругом основании, одна из границ которой движется равномерно. Математическая модель данного процесса описывается следующим дифференциальным уравнением

$$\rho Z_{tt}(x,t) - TZ_{xx}(x,t) + \lambda Z_t(x,t) + k_0 Z(x,t) = 0, \quad (7.13)$$

где ρ – линейная плотность массы струны, T – сила натяжения струны, λ – сила сопротивления среды, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения; k_0 – жесткость подложки; $Z(x,t)$ – поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t .

Рассмотрим граничные условия следующего вида:

$$Z(0,t) = 0; \quad Z(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (7.14)$$

Здесь $l_0(t) = L_0 + v_0 t$ – закон движения границы, L_0 – начальная длина струны; v_0 – скорость движения границы; $W_0(\omega_0 t)$ – функция класса C^2 , B, ω_0 – постоянные величины (в случае действия гармонического возмущения ω_0 является частотой этого возмущения).

Введем в задачу (7.13), (7.14) безразмерные переменные:

$$\xi = \omega_0 x / a; \quad \tau = \omega_0 t + (\omega_0 L_0 - a) / v_0; \quad (7.15)$$

$$Z(x,t) = Bz(\xi, \tau)$$

и новую функцию

$$z(\xi, \tau) = e^{-\alpha \tau} U(\xi, \tau),$$

где

$$a = \sqrt{T / \rho}; \quad \alpha = \lambda / (2\omega_0 \rho).$$

Тогда, после преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 U(\xi, \tau) = 0; \quad (7.16)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad U(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (7.17)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = v_0 / a; \quad \beta^2 = \alpha^2 - \frac{k_0}{\rho\omega_0^2};$$

$$W(\tau) = W_0(\tau + \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Заметим, что величина $\exp(-2\pi\alpha)$ характеризует относительное изменение амплитуды свободных колебаний за одно собственное колебание и α в большинстве случаев является величиной того же порядка малости, что и ε .

Для решения задачи используем метод построения решений интегро–дифференциальных уравнений и метод Канторовича–Галеркина, поэтому необходимо преобразовать граничные условия к однородным. Для этого введём новую функцию согласно методике, изложенной в разделах 3.1. и 3.8.:

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau),$$

где $V(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$[V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 [V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)] = 0 \quad (7.18)$$

и граничным условиям

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (7.19)$$

а $H(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.20)$$

$$H(0, \tau) = 0; \quad (7.21)$$

$$H(l(\varepsilon\tau), \tau) = e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (7.22)$$

Из уравнения (7.20) и условий (7.21), (7.22) нетрудно получить, что

$$H(\xi, \tau) = \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (7.23)$$

Уравнение (7.18) с учетом (7.23) примет следующий вид:

$$\left[V(\xi, \tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \beta^2 \left[V(\xi, \tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right] = 0. \quad (7.24)$$

Решение задачи (7.24), (7.19) будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (7.25)$$

Здесь $X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin[\pi n \xi / l(\varepsilon\tau)]$ – собственные функции задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \nu) + \omega_{0n}^2(\nu) X_n(\xi, \nu) = 0; \quad (7.26)$$

$$X_n(0, \nu) = 0; \quad X_n(l(\nu), \nu) = 0, \quad (7.27)$$

где ν – рассматривается как параметр.

Подставляя n -ый член ряда (7.25) в уравнение (7.24), получим:

$$\left[f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) - \beta^2 \left[f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right] = 0, \quad (7.28)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \pi n / l(\varepsilon_0\tau)$ – собственные частоты задачи (7.26), (7.27).

Применим метод Галеркина. Функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (7.28) с функцией $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[0, l(\varepsilon\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} \left[f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) + \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \right]_{\tau\tau} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + A_{n1}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) - \beta^2 \left[A_{n1}(\varepsilon\tau) f_n(\tau) + e^{\alpha\tau} \cos W(\tau) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} d\xi \right] = 0, \quad (7.29)$$

где $A_{n1}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = l(\varepsilon\tau) / 2$.

Введем в уравнение (7.29) новую функцию

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau) e^{\alpha\tau} \cos W(\tau),$$

где

$$Q_n(\varepsilon\tau) = - \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon\tau)} d\xi / A_{n1}(\varepsilon\tau) = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Тогда уравнение (7.29) будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = -\omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)Q_n(\varepsilon\tau)e^{\alpha\tau} \cos W(\tau), \quad (7.30)$$

где

$$\Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) - \beta^2.$$

Перейдем к определению функции $\mu_n(\tau)$. Введем в уравнение (7.30) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)y_n(\tau),$$

где $A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1 / \sqrt{l(\varepsilon\tau)}$.

Функция $y_n(\tau)$ с точностью до величин порядка ε^2 удовлетворяет уравнению

$$y_n''(\tau) + \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau)e^{\alpha\tau} \cos W(\tau). \quad (7.31)$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$M_n(\varepsilon\tau) = -2(-1)^n \pi n l^{\frac{3}{2}}(\varepsilon\tau).$$

Два линейно независимых решения однородного уравнения, соответствующего (7.31), имеют вид

$$y_{1n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \sin w_n(\tau); \quad y_{2n}(\tau) = a_n(\varepsilon\tau) \cos w_n(\tau).$$

Применяя асимптотический метод, описанный в разделе 3.4., получим следующие формулы для функций $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$:

$$a_n(\varepsilon\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}}; \quad w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau).$$

Для получения $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$ можно применить метод малого параметра.

В этом случае:

$$a_n(\varepsilon\tau) = 1 / \sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)};$$

$$w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \left[S(\varepsilon\tau) - \frac{1}{2} \ln \frac{1 + S(\varepsilon\tau)}{1 - S(\varepsilon\tau)} \right];$$

$$S(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 - \beta^2(1 + \varepsilon\tau)^2 / (\pi^2 n^2)}.$$

Подставим найденные выражения в равенство (3.32). После преобразований с учётом (7.28) для функции $z(\xi, \tau)$ получим формулу амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.32)$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{e^{-2\alpha\tau}}{4l(\varepsilon\tau)\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta);$$

$$F_n(\zeta) = -2\pi n(-1)^n e^{\alpha\zeta} / \sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^3(\varepsilon\zeta)}.$$

Используя численный метод и алгоритмы, изложенные в разделе 6.1, рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс.

Установившийся резонанс в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W(\zeta) = w_n(\zeta) + \gamma,$$

где γ – постоянная величина.

Амплитуда при этом имеет вид

$$A_n(\tau) = \frac{\pi n e^{-\alpha\tau}}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}} \int_0^\tau \frac{e^{\alpha\zeta}}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\zeta)l^3(\varepsilon\zeta)}} d\zeta.$$

Проведённое численное исследование данного равенства с использованием разработанного программного комплекса «ТВ–ANALYSIS–7» выявило следующие закономерности: при сокращении длины струны ($\varepsilon < 0$) амплитуда её колебаний непрерывно возрастает, а в случае увеличения длины ($\varepsilon > 0$) амплитуда колебаний сначала возрастает, достигая определённого максимума, после чего наблюдается её снижение. Соответствующая зависимость максимальной амплитуды от параметров α и ε при $k_0 = 0$ (от номера n она не зависит) приведена в таблице 7.1.

Таблица 7.1. Зависимость максимальной амплитуды от α и ε

$\varepsilon \backslash \alpha$	0,001	0,005	0,010	0,100	0,200
0,00	1000	201	101	10,1	5,1
0,05	51,3	27,1	20,1	5,4	3,3
0,01	31,5	17,3	13,4	4,2	2,7

Исследуем явление прохождения через резонанс, возникающее в струне под действием силы постоянной частоты, т.е. $W(\tau) = \tau$, что в исходной системе соответствует действию силы постоянной частоты ω_0 .

Максимально возможная амплитуда колебаний совпадает с максимумом выражения

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.33)$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по формуле

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{\pi n}{\sqrt{1 + \beta^2}} - 1 \right].$$

При помощи разработанного программного комплекса «TB–ANALYSIS–7» проведено численное исследование выражения (7.33) на максимум. На рис. 7.8 изображен график, отображающий зависимость максимальной амплитуды колебаний, возникающих в струне (в программном комплексе – канат без учета изгибной жесткости) при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах, от относительной скорости движения границы (графики расположены сверху вниз соответственно).

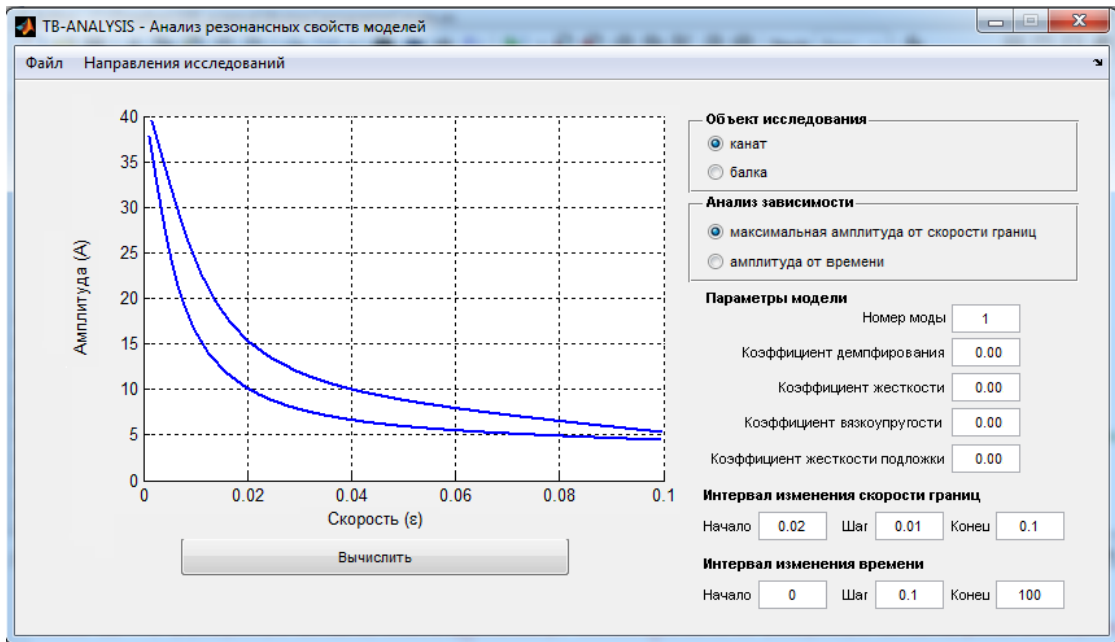


Рис.7.8. График зависимости максимальной амплитуды колебаний струны от относительной скорости движения границы ε на первой и второй динамических модах (сверху вниз)

На рисунке 7.9 отражена зависимость максимальной амплитуды колебаний (7.33) от времени при прохождении через резонанс на первой динамической моде.

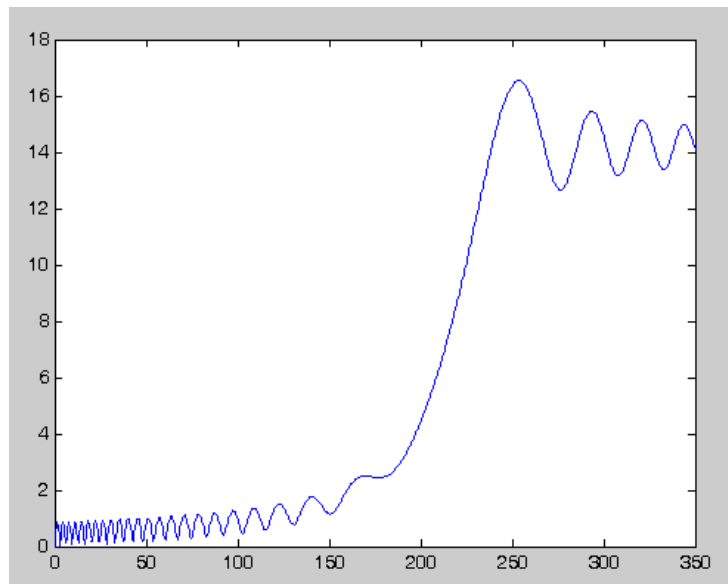


Рис.7.9. График зависимости максимальной амплитуды колебаний струны от времени при прохождении через резонанс на первой динамической моде

Зависимость амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах, от α , характеризующих сопротивление среды, и ε при $k_0 = 0$ приведена на рисунке 7.10.

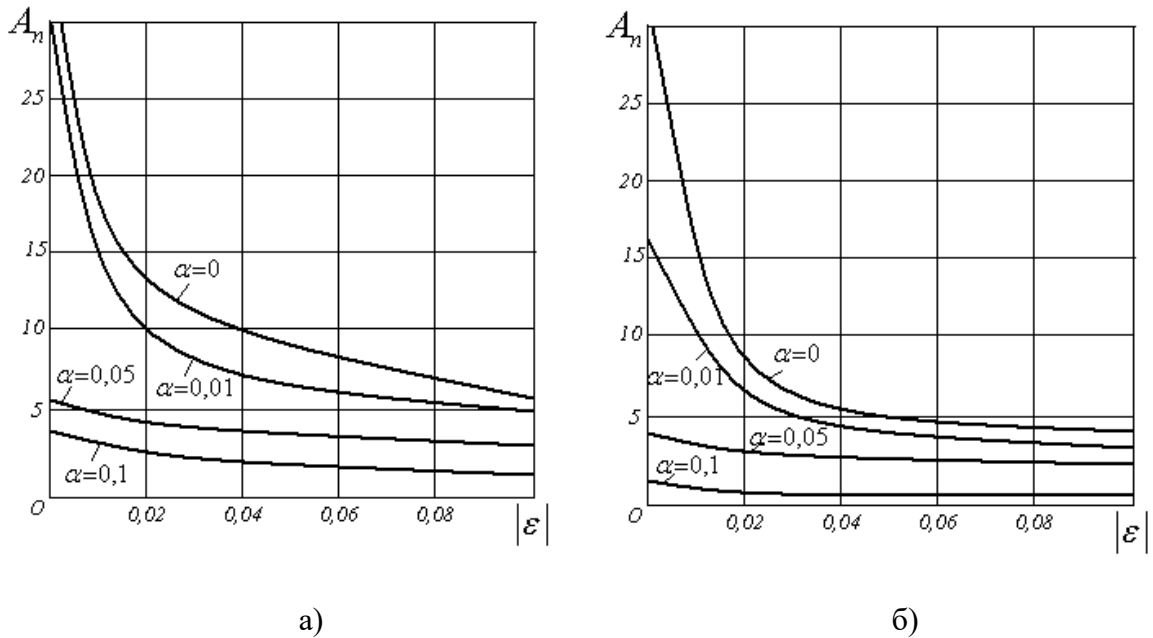


Рис.7.10. Графики зависимости максимальной амплитуды колебаний струны от относительной скорости движения границы ε при прохождении через резонанс на первой (а) и второй (б) динамических модах при различных значениях безразмерных коэффициентов α , характеризующих сопротивление среды

Анализ графических данных, представленных на рис. 7.10, свидетельствует о том, что амплитуда при значении $\alpha = 0$ служит верхней оценкой для амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс в случае, когда $\alpha > 0$. Если влияние демпфирующих сил и жесткости упругой подложки не учитывается ($\alpha = 0, k_0 = 0$), задача (7.13), (7.14) допускает точное аналитическое решение. Такое решение было получено в работе [13]. Сравнение численных результатов, представленных в настоящей диссертации, с данными работы [13] демонстрирует, что метод построения решений интегро-дифференциальных уравнений обеспечивает в рассматриваемом случае ($\varepsilon < 0,37$) удовлетворительные по точности результаты (погрешность лежит в пределах 5%).

7.5.2. Математическое моделирование колебаний в передачах с гибкой связью при разгоне

Механизмы с гибкой связью находят широкое применение в технических устройствах. Функционирование подобных систем можно разделить на две фазы: разгон и равномерное движение.

Фаза равномерного движения исследована в работах [8, 39, 51, 78, 96], где были определены собственные частоты поперечных колебаний гибкого звена, зависящие от скорости движения. Однако в период разгона динамика таких систем не может быть описана набором постоянных собственных частот, и данная фаза движения остается недостаточно исследованной.

При анализе динамики механизмов с гибкой связью применяются два типа моделей:

1. Гибкое звено перемещается относительно стационарных опор [233, 234].
2. Опоры движутся относительно неподвижного гибкого звена [78, 229].

Как показано в исследовании [78], с помощью соответствующей замены переменных возможен переход от одной модели к другой. В данной работе используется вторая модель. Схема для расчёта колебаний гибкого звена представлена на рисунке 7.11.

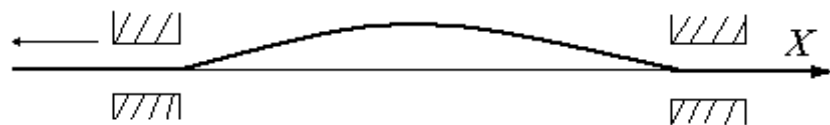


Рис. 7.11. Схема для расчета колебаний гибких звеньев передач

Для описания колебаний в процессе разгона используется волновое уравнение

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0 \quad (7.34)$$

при граничных условиях

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(t); \quad U(L_0 + l_0(t), t) = 0, \quad (7.35)$$

где $U(x, t)$ – поперечное смещение точек гибкого звена; L_0 – длина колеблющейся части; x – координата точки в системе отсчёта, движущейся вместе с гибким звеном; t – время; $l_0(t)$ – закон продольного движения гибкого звена в период разгона; B – амплитуда возмущающего воздействия; $W_0(t)$ – монотонно возрастающая функция; $a = \sqrt{T/\rho}$ – скорость распространения колебаний; T – сила натяжения звена; ρ – линейная плотность массы гибкого звена.

Начальные условия не влияют на резонансные характеристики, поэтому в данном случае они принимаются нулевыми. Отсутствие возмущений на правом конце гибкого звена, обусловленное линейностью задачи, не снижает общности анализа. Использование уравнения (7.34) является обоснованным для моделирования процессов быстрого разгона (в случае медленного разгона в уравнение (7.34) необходимо включить член, учитывающий диссипацию энергии).

Введём в задачу (7.34), (7.35) безразмерные переменные:

$$\xi = x/L_0; \quad \tau = at/L_0; \quad U(x, t) = BV(\xi, \tau).$$

Тогда равенства (7.34), (7.35) примут вид

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0;$$

$$V(l(\tau), \tau) = \cos W(\tau); \quad V(1 + l(\tau), \tau) = 0,$$

где

$$l(\tau) = l_0 \left(\frac{L_0 \tau}{a} \right) / L_0, \quad W(\tau) = W_0 \left(\frac{L_0 \tau}{a} \right).$$

Резонансные свойства системы будем исследовать исходя из выражения для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде. Опуская некоторые математические выкладки, согласно методике, описанной

в разделах 3.6., 3.7. и [123, 125], выражение амплитуды колебаний для рассматриваемой задачи получено в виде

$$A_n^2(\tau) = 4 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau));$$

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - W(0,5\bar{\varphi}(\zeta - 1) + 0,5\bar{\psi}(\zeta - 1));$$

$\bar{\varphi}(\zeta), \bar{\psi}(\zeta)$ – функции, обратные по отношению к $\varphi(\zeta), \psi(\zeta)$.

Функции φ, ψ определяются из системы (3.82), а функция $\xi_0(\tau)$ – из уравнения [13, 125]

$$\sin \left\{ \pi n \left[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi) \right] \right\} = \pm 1.$$

Для решения системы (3.82) используем обратный метод, описанный в разделе 3.7. Примем

$$\varphi(z) = \frac{e^{-\alpha z} - 1}{2(e^{-\alpha} - 1)} - 0,5; \quad \psi(z) = \frac{-e^{\alpha z} + 1}{2(e^{-\alpha} - 1)} - 0,5. \quad (7.36)$$

Тогда для случая, когда скорость движения границ меньше скорости распространения колебаний ($|l'(\tau)| < 1$), с помощью (3.82), (7.36) получим следующее выражение:

$$l(\tau) = \frac{1}{\alpha} \ln \left[\frac{e^{\alpha\tau} + e^{-\alpha\tau}}{2} \right], \quad (7.37)$$

причем

$$l(0) = 0; \quad l'(0) = 0; \quad l''(\tau) = \alpha[1 - l'^2(\tau)].$$

Функция $l(\tau)$ в виде (7.37) достаточно хорошо аппроксимирует закон продольного движения гибкого звена в период разгона, поскольку, как следует из приведённых формул, ускорение гибкого звена со временем убывает, как это имеет место в действительности.

Явление установившегося резонанса возможно, если

$$\Phi_n(\zeta) = \beta,$$

где β – постоянная величина. Согласно методике раздела 6.1., условие резонанса будет выглядеть следующим образом:

$$W(\tau) = 2\pi n \varphi(\tau + l(\tau)) + 2\pi n - \beta. \quad (7.38)$$

Амплитуда при этом составит величину

$$A_n = 2\psi(\tau + \xi_0(\tau)),$$

т.е. она увеличивается пропорционально функции $\psi(\tau + \xi_0(\tau))$.

Наиболее распространёнными на практике являются периодические нагрузки. Поэтому представляет интерес изучение колебаний, возникающих под действием гармонического возмущения, когда

$$W(\tau) = \omega\tau.$$

При этом на каждой динамической моде при соответствующей величине ω в период разгона передачи может наблюдаться явление прохождения через резонанс. Резонансная область содержит точку ζ_0 , определяемую из уравнения

$$\Phi'_n(\zeta_0) = 0.$$

Решая данное уравнение, для рассматриваемого случая получим:

$$\zeta_0 = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{\pi n \alpha - \omega (1 - e^{-\alpha})}{\pi n \alpha (1 - e^{-\alpha})^2}} + 1 \right].$$

Следуя методике и алгоритмам, описанным в разделе 6.1., если принять амплитуду в начале резонансной области (точка τ_1) равной нулю, то амплитуда в конце резонансной области (точка τ_2) будет определяться следующим равенством:

$$A_n^2(\zeta_1, \zeta_2) = 4 \left\{ \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.39)$$

где

$$\zeta_i = \psi(\tau_i - \xi_0(\tau_i)), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (7.40)$$

Величины ζ_1 и ζ_2 следует определять из условия максимума выражения (7.39), причём $\zeta_1 < \zeta_0$, а $\zeta_2 > \zeta_0$. Точки резонансной области τ_0, τ_1, τ_2 по найденным $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$ определяются из уравнения (7.40):

$$\tau_i = -\frac{1}{2\alpha} \ln \left\{ \frac{2n-1+e^{-\alpha}}{n[1+(2\zeta_i+1)(1-e^{-\alpha})]} - 1 \right\}, \quad i=0,1,2.$$

С помощью разработанного программного комплекса выражение (7.39) было исследовано на максимум для случаев $n=1$ и $n=2$. Зависимость максимальной амплитуды колебаний от α на первой и второй динамической моде приведена на рисунке 7.12 (графики 1 и 2 соответственно). При этом возмущающая частота ω для каждого значения α выбиралась таким образом, чтобы начало резонансной области τ_1 совпадало с начальным моментом времени ($\tau_1 = 0$).

Заметим, что величины $\alpha > 0,05$ рассматривать не имеет смысла, так как амплитуда в этом случае мала, а скорость в конце резонансной области имеет большое значение (прохождение через резонанс здесь может не заканчиваться в период разгона передачи).

Частоты, представляющие опасность при разгоне и определяемые из условия того, чтобы точка τ_0 лежала в пределах времени разгона передачи, определяются неравенством

$$\pi n \left[(1-v_k^2) - v_k \alpha \left(4 + \frac{1}{n} \right) - \frac{\alpha v_k^2}{n} \right] < \omega_n < \pi n, \quad (7.41)$$

где v_k – конечная скорость при разгоне ($v_k = l'(\tau_k)$, τ_k – время окончания разгона).

Полученные результаты могут быть использованы при проектировании передач с гибкой связью. В частности, имеется возможность предотвращать возникновение резонанса (7.38), выявлять область опасных частот (7.41),

оценивать величину амплитуды колебаний (рисунок 7.12), возникающих при прохождении через резонанс.

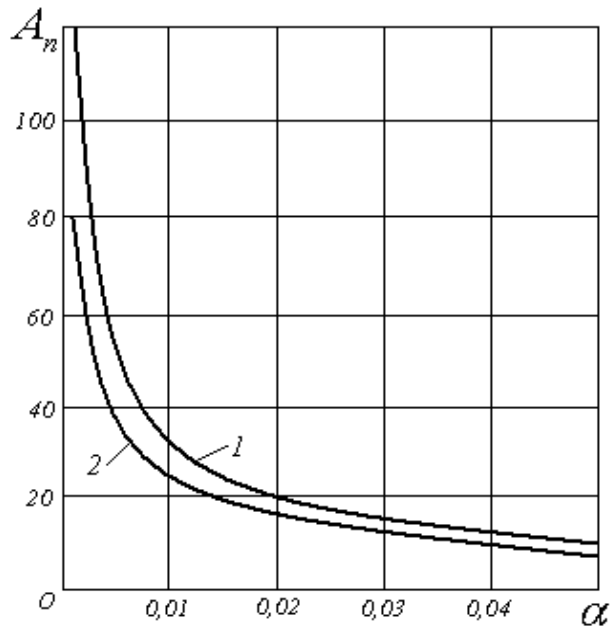


Рис. 7.12. Зависимость амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс гибкого звена на первой и второй динамических модах (графики 1 и 2), от параметра α , характеризующего ускорение разгона

7.5.3. Вынужденные поперечные колебания струны переменной длины

Дифференциальное уравнение, описывающее малые вынужденные колебания струны, имеет вид:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = \omega_0^2 B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (7.42)$$

Граничные условия:

$$U(0,t) = 0; \quad U(l_0(t),t) = 0. \quad (7.43)$$

В (7.42), (7.43) используются следующие обозначения: $U(x,t)$ – поперечное смещение точки струны с координатой x в момент времени t ; $l_0(t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения правой границы; $W_0(z)$ – функция класса C^1 . Остальные обозначения введены ранее.

Если ввести в задачу (7.42) – (7.43) безразмерные переменные вида (7.15) и новую функцию $U(x, t) = BV(\xi, \tau)$, то исходная задача примет вид:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = \varphi(\tau); \quad (7.44)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (7.45)$$

где $l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau$; $\varepsilon = -\frac{v_0}{a}$; $\varphi(\tau) = \cos W(\tau)$; $W(\tau) = W_0(\tau - \varphi_0)$.

Для решения задачи (7.44), (7.45) воспользуемся методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений и методом Канторовича–Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) \quad (7.46)$$

Здесь $X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin \frac{\pi n \xi}{l(\varepsilon\tau)}$, при этом $\omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)}$.

Подставляя n -ный член ряда (7.46) в уравнение (7.44) получим:

$$[f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \varphi(\tau). \quad (7.47)$$

Функцию $f_n(\tau)$ будем определять из условия ортогональности левой части уравнения (7.47) с функцией $X_n(\xi, \varepsilon\tau)$ на интервале $[0, l(\varepsilon\tau)]$. В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon\tau)} [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau)]_{\tau\tau} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi + A_{1n}(\varepsilon\tau) \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) - \varphi(\tau) \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = 0$$

или с точностью до величин порядка малости ε^2 :

$$f_n''(\tau) + 2 \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau)}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} f_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) f_n(\tau) = -\varphi(\tau) Q_n(\varepsilon\tau), \quad (7.48)$$

где

$$A_{1n}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = \frac{l(\varepsilon\tau)}{2}, \quad \varepsilon A_{2n}(\varepsilon\tau) = \int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_{n\tau}(\xi, \varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi = \frac{\varepsilon l'(\tau)}{4};$$

$$Q_n(\varepsilon\tau) = -\frac{\int_0^{l(\varepsilon\tau)} X_n(\xi, \varepsilon\tau) d\xi}{A_{1n}(\varepsilon\tau)} = \frac{2(-1)^n}{\pi n}.$$

Для преобразования уравнения (7.48), чтобы оно не содержало члена с $f'_n(\tau)$, введем новую функцию

$$f_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau), \quad (7.49)$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon\tau) = \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon A_{2n}(\varepsilon\zeta)}{A_{1n}(\varepsilon\zeta)} d\zeta\right] = \frac{1}{\sqrt{l(\varepsilon\tau)}}.$$

Тогда с точностью до величин порядка ε^2

$$\mu_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = -\frac{Q_n(\varepsilon_0\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} \cos W(\tau), \quad (7.50)$$

или, следуя методике, описанной в разделе 3.1.

$$\mu_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau)\mu_n(\tau) = \theta_n(\tau),$$

где

$$\theta_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau); \quad M_n(\varepsilon\tau) = -\frac{Q_n(\varepsilon\tau)}{A_{0n}(\varepsilon\tau)} = \frac{2(-1)^n \sqrt{l(\tau)}}{\pi n}.$$

Выполняя преобразования уравнения (7.50) для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.51)$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta);$$

$$F_n(\tau) = \frac{(-1)^n l(\varepsilon\tau)}{(\pi n)^{3/2}}.$$

Заметим, что к решению задачи (7.42), (7.43) можно применить несколько иной подход. В связи с медленным движением границ при исследовании резонансных свойств (раздел 2.4.), функция $W_0(\omega_0 t)$ в уравнении (7.42) имеет вид:

$$W_0(\omega_0 t) = \omega_0 t + \psi_0 \left(\frac{v_0 t}{a} \right),$$

где $\psi_0\left(\frac{v_0 t}{a}\right)$ – функция, характеризующая медленное изменение частот возмущающих воздействий. Поэтому членами вида $\frac{v_0}{a}\psi_0'\left(\frac{v_0 t}{a}\right)$, которые на резонансные свойства влияют, как величины порядка малости ε^2 , можно пренебречь.

Если в задачу (7.42), (7.43) ввести новую функцию

$$U(x, t) = Z(x, t) - B \cos W_0(\omega_0 t),$$

то она примет вид

$$Z_{tt}(x, t) - a^2 Z_{xx}(x, t) = 0; \quad (7.52)$$

$$Z(0, t) = B \cos W_0(\omega_0 t); \quad Z(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (7.53)$$

Введем в задачу (7.52), (7.53) безразмерные переменные

$$\xi = \frac{\omega_0}{a} x; \quad \tau = \omega_0 t + \frac{\omega_0 L_0 - a}{-v_0}$$

и новую функцию $Z(x, t) = Bu(\xi, \tau)$, в результате чего получим

$$u_{\tau\tau}(\xi, \tau) - u_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.54)$$

$$u(0, \tau) = \cos W(\tau); \quad u(l(\varepsilon\tau), \tau) = \cos W(\tau). \quad (7.55)$$

Далее, следуя методике, описанной в разделе 3.1., для $\theta_n(\tau)$:

$$\theta_n(\tau) = M_{n11}(\varepsilon\tau) \cos W(\tau) + M_{n21}(\varepsilon\tau) \sin W(\tau),$$

где $M_{n11}(\varepsilon\tau) = \frac{2\pi n}{l^{3/2}(\tau)}$; $M_{n21}(\varepsilon\tau) = -\frac{2\pi n(-1)^n}{l^{3/2}(\tau)}$.

Таким образом, уравнение (7.50) преобразуется к виду

$$\mu_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) \mu_n(\tau) = \frac{2(-1)^n \pi n}{l^{3/2}(\tau)} \cos W(\tau). \quad (7.56)$$

В случае, если в уравнение (7.48) вместо функции (7.49) ввести функцию вида

$$f_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau) + Q_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau),$$

то оно так же преобразуется к виду (7.56).

В этом случае в выражении для амплитуды колебаний (7.51) функция $F_n(\tau)$ примет вид

$$F_n(\tau) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi n}}{l(\varepsilon\tau)}.$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается, если скорость изменения функции $\Phi_n(\zeta)$ равна нулю, т.е.:

$$W(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau).$$

Если $W(\tau) = \tau$, то в области, содержащей точку $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon}(\pi n - 1)$ наблюдается явление прохождения через резонанс. Выражение

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\} \quad (7.57)$$

определяет амплитуду колебаний при прохождении через резонанс в окрестности точки τ_0 .

Решим задачу (7.54), (7.55) численно–аналитическим методом замены переменных в системе функционально–разностных уравнений (раздел 3.6). Начальные условия примем нулевыми.

Общее решение уравнения (7.54) имеет вид (3.86).

Подставляя решение (3.86) в граничные условия (7.55), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau + \ell_1(\tau)) + G(\tau - \ell_1(\tau)) = \cos W(\tau); \\ g(\tau + \ell_2(\tau)) + G(\tau - \ell_2(\tau)) = \cos W(\tau). \end{cases} \quad (7.58)$$

Введем в систему (7.58) новые функции

$$g(z) = r(\varphi(z)); G(z) = R(\psi(z)),$$

где функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из системы функциональных уравнений (3.82).

Введем обозначения в первом уравнении системы (7.58) согласно раздела 3.6.

$$\varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = z; \quad \psi(\tau - \ell_1(\tau)) = z \quad (7.59)$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = z; \quad \psi(\tau - \ell_2(\tau)) = z - 1. \quad (7.60)$$

Из (7.59), (7.60) следует, что в первом уравнении системы (7.58)

$$\tau = 0,5(\bar{\varphi}(z) + \bar{\psi}(z)),$$

а во втором уравнении

$$\tau = 0,5(\bar{\varphi}(z) + \bar{\psi}(z-1)),$$

где $\bar{\varphi}(z)$, $\bar{\psi}(z)$ – функции, обратные к $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

С учетом сделанной замены система (7.58) примет вид

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = \theta_1(z); \\ r(z) + R(z-1) = \theta_2(z), \end{cases} \quad (7.61)$$

где $\theta_1(z) = \cos W(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z))$; $\theta_2(z) = \cos W(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z-1))$.

Из первого уравнения системы (7.61) получим:

$$R(z) = \theta_1(z) - r(z). \quad (7.62)$$

После подстановки (7.62) во второе уравнение системы (7.61) будем иметь:

$$r(z) - r(z-1) = \theta(z). \quad (7.63)$$

Здесь

$$\theta(z) = \theta_2(z) - \theta_1(z-1) = \cos W(z) - \cos W(z-1).$$

Таким образом, задача сведена к решению уравнения (7.63).

Используем для решения задачи интегральное преобразование Лапласа и методику, описанную в разделе 3.6., получим:

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau), \quad (7.64)$$

где

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\} \times$$

$$\begin{aligned} & \times (\cos\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\}) 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \sin(2\pi n\zeta) d\zeta - \\ & - \sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \cos(2\pi n\zeta) d\zeta. \end{aligned} \quad (7.65)$$

Функция $\sin\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)]\}$ – n -ная динамическая мода системы, $\omega(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau}\{\pi n[\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)]\}$ – мгновенная собственная частота n -ного собственного колебания.

Выполняя преобразования уравнения (7.65), аналогичные преобразованиям раздела 3.6, получим выражение для полной амплитуды в точке $\xi = \xi_0(\tau)$, соответствующей максимальному размаху колебаний

$$A_n^2(\tau) = 16 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.66)$$

где

$$b(\tau) = \psi(\tau - \xi_0(\tau));$$

$$\varphi(z) = \psi(z) = \frac{\ln[(vz + 1)/(1 - v)]}{\ln[(1 + v)/(1 - v)]} - 1; \quad F_n(\zeta) = \sin \left\{ \frac{1}{2} (W(\zeta - 1) - W(\zeta)) \right\};$$

$$\Phi_n(\zeta) = 2\pi n\zeta - \frac{1}{2} (W(\zeta - 1) + W(\zeta));$$

$$W(\zeta) = W \left(\frac{1}{v} \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^\zeta - \frac{1}{v} \right); \quad W(\zeta - 1) = W \left(\frac{1+v}{v} \left(\frac{1+v}{1-v} \right)^{\zeta-1} - \frac{1}{v} \right).$$

Таким образом, применение приближенного метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галёркина позволило получить сравнительно простое выражение, описывающее амплитуду вынужденных колебаний струны с движущейся границей. Аналогичные по структуре выражения для амплитуд колебаний системы на n -й динамической моде были получены с помощью численно–

аналитического метода, основанного на замене переменных в системе функционально–разностных уравнений.

7.5.4. Математическое моделирование зависимости частоты поперечных колебаний струны от амплитуды

При исследовании колебаний струны традиционно применяется линейное волновое уравнение, которое не учитывает зависимость силы натяжения струны от амплитуды колебаний. Однако для металлов даже при небольшом удлинении сила натяжения значительно возрастает, что оказывает влияние на скорость распространения поперечных волн и частоту колебаний.

Скорость поперечных колебаний ограничена пределом прочности материала. Например, для высокопрочной кремне–хромом–марганцовистой стали, отношение скорости продольных волн к максимальной скорости поперечных волн приближенно равно 10. Для других материалов это соотношение может быть значительно больше, поэтому можно предположить, что продольные деформации успевают равномерно распределиться по длине струны в каждый момент времени.

Уравнение поперечных колебаний струны, учитывающее зависимость силы натяжения от смещения, может быть записано в следующем виде:

$$\rho \cdot S \cdot U_{tt}(x,t) - (T_0 + T(U(x,t))) U_{xx}(x,t) = 0, \quad (7.67)$$

где T_0 – сила натяжения струны в положении равновесия; $T(U(x,t))$ – изменение силы натяжения в результате продольной деформации.

Пусть l – длина струны в положении равновесия. Длина струны в деформированном состоянии равна:

$$L(t) = \int_0^l \sqrt{1 + U_x^2(x,t)} dx. \quad (7.68)$$

Используя закон Гука, получим:

$$T(U(x,t)) = S \cdot E \cdot \frac{L(t) - l}{l}, \quad (7.69)$$

где E – модуль упругости материала струны.

Рассмотрим колебания струны с неподвижно закрепленными концами с граничными условиями:

$$U(0,t) = 0; \quad U(l,t) = 0. \quad (7.70)$$

Решение, удовлетворяющее граничным условиям (7.70), можно записать в виде:

$$U(x,t) = A(t) \sin \frac{\pi n x}{l}, \quad (7.71)$$

где n – целое число.

Подставляя (7.71) в (7.68) получим

$$L(t) = \int_0^l \sqrt{1 + A^2(t) \cdot \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi n x}{l}} \cdot dx.$$

Сделаем в интеграле замену переменной $\xi = \frac{\pi n x}{l}$. С учетом периодичности косинуса

$$L(t) = \alpha(t) l \int_0^\pi \sqrt{\frac{1}{\pi^2 \alpha^2(t)} + \cos^2 \xi} d\xi, \quad (7.72)$$

где $\alpha(t) = \frac{A(t)n}{l}$.

Вычислив интеграл численно с помощью разработанного программного комплекса и сделав аппроксимацию по методу наименьших квадратов, получим следующее выражение для изменения силы натяжения:

$$T(t) = (0,00125\alpha(t) + 1,0896\alpha^2(t)) \cdot ES. \quad (7.73)$$

Относительная погрешность выражения (7.73) в диапазоне $\alpha \in [0; 0,05]$ не превосходит 0,02.

Подставив (7.71) и (7.73) в дифференциальное уравнение (7.67), получим:

$$\rho S A''(t) + \left(T_0 + (0,00125\alpha(t) + 1,0896\alpha^2(t)) ES \right) \frac{\pi^2 n^2}{l^2} A(t) = 0.$$

Введем новые функцию и безразмерную переменную

$$y(\tau) = \frac{n}{l} A(t); \quad \tau = \frac{\pi n a_1}{l} \cdot t. \quad (7.74)$$

После преобразований получим:

$$y''(\tau) + \left(\frac{a_0^2}{a_1^2} + 0,00125 y(\tau) + 1,0896 \cdot y^2(\tau) \right) y(\tau) = 0, \quad (7.75)$$

где $a_0^2 = \frac{T_0}{\rho S}$ – квадрат скорости распространения малых поперечных волн;

$a_1^2 = \frac{E}{\rho}$ – квадрат скорости продольных волн.

Начальные условия возьмем в виде:

$$A(0) = A_0; \quad A'(0) = 0. \quad (7.76)$$

С учетом замены (7.74) получим $y(0) = \frac{n}{l} A_0; \quad y'(0) = 0$.

При малых колебаниях ($A_0 \rightarrow 0$) период по τ равен $\tau_0 = \frac{2\pi a_1}{a_0}$, а по t

равен $t_0 = \frac{l}{\pi n a_1} \tau_0$.

Решая дифференциальное уравнение (7.75) численно с помощью разработанного программного комплекса при начальных условиях (7.76) получим зависимость периода поперечных колебаний по τ в зависимости от безразмерных параметров $\alpha = \frac{n A_0}{l}$ и $\beta = \frac{a_0}{a_1}$.

Данная зависимость представлена в таблице 7.2.

Таблица 7.2. Зависимость периода поперечных колебаний от параметров α и β

$\alpha \backslash \beta$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	∞	628,32	314,16	209,44	157,08	125,66
0,01	5888,16	464,34	286,12	200,53	153,22	123,65

0,02	3138,16	304,53	233,09	179,38	143,13	118,17
0,03	2156,58	218,93	187,10	155,60	130,09	110,49
0,04	1647,60	169,28	153,12	134,25	116,77	101,95
0,05	1334,54	137,51	128,37	116,57	104,53	93,46

В таблице 7.3. приведено отношение максимальной скорости распространения поперечных колебаний a , имеющей место при наибольшем отклонении струны от положения равновесия к минимальной a_0 , имеющей место в положении равновесия:

$$\frac{a}{a_0} = \sqrt{1 + (0,00125\alpha + 1,089\alpha^2) / \beta^2} .$$

Таблица 7.3. Отношение максимальной скорости распространения поперечных колебаний a к минимальной a_0

$\alpha \backslash \beta$	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	∞	1	1	1	1	1
0,01	∞	1,49	1,14	1,07	1,04	1,02
0,02	∞	2,37	1,47	1,23	1,13	1,09
0,03	∞	3,34	1,88	1,46	1,28	1,19
0,04	∞	4,35	2,34	1,73	1,46	1,31
0,05	∞	5,37	2,82	2,02	1,66	1,45

Анализ таблиц показывает, что даже при небольших амплитудах колебаний $\frac{A}{l} < 0.05$ наблюдается сильная зависимость частоты и скорости поперечных волн от амплитуды. Использование при этом для описания колебаний линейного волнового уравнения некорректно.

7.5.5. Параметрический резонанс нагруженной вязкоупругой нити переменной длины

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях вязкоупругой нити, на одном конце которой закреплен груз, а также исследуем прохождение системы

через параметрический резонанс. Резонансные явления возникают вследствие неравномерности подъема груза при наматывании нити на барабан. В данном случае удлинение нити оказывается сравнимым с её исходной длиной, что существенно влияет на динамику системы.

Для учета внутреннего трения пусть реология материала нити подчиняется нелинейной модели Фойгта, т.е. $\sigma = E \cdot \varepsilon^a + \lambda \cdot \dot{\varepsilon}$, где E , a , λ – реологические параметры, ε – относительное удлинение, σ – напряжение.

Уравнение колебаний имеет вид:

$$M\ddot{u}(t) + S(E(\frac{u(t)}{\ell(t)} - 1)^a + \lambda \frac{\dot{u}(t)\ell(t) - u(t)\ell'(t)}{\ell^2(t)}) = Mg, \quad (7.77)$$

где M – масса груза; $u(t)$ – расстояние от точки подвеса до груза в момент времени t ; $\ell(t)$ – длина нерастянутой нити в момент времени t ; S – площадь поперечного сечения нити.

В данном случае относительное удлинение определяется соотношением

$$\varepsilon(t) = \frac{u(t) - \ell(t)}{\ell(t)}.$$

Так как нить наматывается на барабан в растянутом виде, закон изменения длины нити $\ell(t)$ взаимосвязан с $u(t)$ уравнением:

$$\ell'(t) = \frac{v(t)\ell(t)}{u(t)}. \quad (7.78)$$

Здесь $v(t)$ – скорость вращения барабана.

С учетом неравномерности подъема, будем считать, что скорость вращения барабана имеет вид: $v(t) = v_0 + Av_0 \sin \omega_0 t$, т.е. интенсивность возбуждения зависит от скорости подъема v_0 .

Задачу необходимо решить при начальных условиях:

$$u(0) = u_0; \dot{u}(0) = 0; \ell(0) = \ell_0.$$

Если подъем начинается из положения равновесия, то:

$$u_0 = \ell_0 \left(1 + \left(\frac{g}{\ell_0 \omega_0} \right)^{\frac{1}{a}} \right).$$

Введем безразмерные переменные:

$$u(t) = \ell_0 U(\tau); \quad \ell(t) = \ell_0 L(\tau); \quad v(t) = v_0 V(\tau);$$

$$\tau = \omega t; \quad V(\tau) = 1 + A \sin \frac{\omega_0 \tau}{\omega}; \quad \omega^2 = \frac{ES}{M \ell_0}.$$

В результате получим следующую задачу:

$$\begin{cases} \ddot{U}(\tau) + \alpha \frac{\dot{U}(\tau)}{L(\tau)} - \beta \frac{V(\tau)}{L(\tau)} + \left(\frac{U(\tau)}{L(\tau)} - 1 \right)^a = \gamma; \\ L'(\tau) = \theta \frac{V(\tau)L(\tau)}{U(\tau)}; \\ V(\tau) = 1 + A \sin W \tau, \end{cases}$$

где

$$U(0) = U_0; \quad \dot{U}(0) = 0; \quad L(0) = 1; \quad \alpha = \lambda \sqrt{\frac{S}{M \ell_0 E}};$$

$$\theta = v_0 \sqrt{\frac{M}{ES \ell_0}}; \quad \gamma = \frac{gM}{ES}; \quad \beta = \frac{\lambda v_0}{E \ell_0} = \theta \alpha; \quad U_0 = 1 + \gamma^{\frac{1}{a}}.$$

При частоте возмущения W , близкой к единице, наблюдается прохождение через резонанс, т.е. увеличение амплитуды колебаний в течение некоторого периода времени.

Исследование прохождения через резонанс было произведено численно, при помощи разработанного в среде MATLAB комплекса программ «ТВ–ANALYSIS–7», так как задача не допускает точного решения.

Для нити с параметрами

$$\alpha = 1; \quad E = 4 \cdot 10^6 (\text{н} / \text{м}^2); \quad S = 10^{-3} (\text{м}^2); \quad M = 100 (\text{кг}); \quad \ell_0 = 10 (\text{м}); \quad A = 0,1$$

была получена зависимость максимального относительного увеличения амплитуды, т.е. $\Delta \ell = \max_t \frac{(u(t) - \ell(t))\ell_0}{(u_0 - \ell_0)\ell(t)}$ в зависимости от скорости подъема v_0 , и параметра вязкости λ .

Частота возмущения ω_0 подбиралась таким образом, чтобы увеличение амплитуды за время подъема было максимальным.

Результаты численного решения представлены в таблице 7.4.

Таблица 7.4. Зависимость максимального относительного увеличения амплитуды, от скорости подъема v_0 и параметра вязкости λ

$\lambda \backslash v_0$	0,1	0,3	0,5	0,7	1
$2 \cdot 10^4$	1,074	1,153	1,270	1,364	1,521
$4 \cdot 10^4$	1,058	1,127	1,226	1,314	1,462
$6 \cdot 10^4$	1,047	1,11	1,196	1,272	1,402

Увеличение амплитуды колебаний с возрастанием скорости связано с тем, что амплитуда возмущений прямо пропорциональна скорости подъема груза.

7.5.6. Исследование продольных колебаний каната с грузом на конце

Рассмотрим задачу о возникновении продольных колебаний в канате грузоподъемной установки, один конец которого наматывается на барабан, а на втором жёстко закреплён груз большой массы [49, 138, 145, 182].

Задачу по описанию продольных колебаний каната можно поставить следующим образом. Найти решение уравнения

$$Z_{tt}(x,t) - a^2 Z_{xx}(x,t) = 0 \quad (7.79)$$

при граничных условиях [8]

$$Z_{xx}(0,t) - \frac{ES}{ma^2} Z_x(0,t) = -\frac{g}{a^2}; \quad (7.80)$$

$$Z_t(l_0(v_0t),t) = F'_0(\omega_0t). \quad (7.81)$$

В задаче (7.79) – (7.81) обозначено: $Z(x,t)$ – продольное смещение точки с координатой x в момент времени t ; $a = \sqrt{E/\rho}$ – скорость распространения продольных волн в канате, E – модуль упругости материала каната; S – площадь поперечного сечения каната; m – масса груза; g – ускорение свободного падения; $l_0(v_0t) = L_0 - v_0t$ – закон движения границы, v_0 – окружная линейная скорость вращения барабана; $F_0(\omega_0t)$ – функция, характеризующая внешнее возмущение.

Проинтегрировав условие (7.81) по времени с учетом выражения для полной производной $Z_t(l_0(v_0t),t) = \frac{dZ(l_0(v_0t),t)}{dt} - v_0 Z_x(l_0(v_0t),t) l'_0(v_0t)$, получим:

$$Z(l_0(v_0t),t) - v_0 \int_0^t Z_x(l_0(v_0\zeta),\zeta) l'_0(v_0\zeta) d\zeta = F_0(\omega_0t). \quad (7.82)$$

С помощью приведённой модели можно рассчитывать резонансные свойства несущих звеньев широкого круга грузоподъёмных машин.

Исходя из физических основ модели, в дальнейшем вместо функции $Z(x,t)$ будем использовать функцию $u(x,t)$, причем

$$Z(x,t) = u(x,t) + v_0t + \frac{mg}{ES} x.$$

В результате задача (7.79), (7.80), (7.82) примет вид

$$u_{tt}(x,t) - a^2 u_{xx}(x,t) = 0; \quad (7.83)$$

$$u_{xx}(0,t) - \frac{ES}{ma^2} u_x(0,t) = 0; \quad (7.84)$$

$$u(l_0(v_0t),t) - v_0 \int_0^t u_x(l_0(v_0\zeta),\zeta) l'_0(v_0\zeta) d\zeta = F(\omega_0t), \quad (7.85)$$

где $F(\omega_0t) = F_0(\omega_0t) - v_0t$.

Введем в задачу (7.83) – (7.85) безразмерные переменные вида (7.15) и новую функцию $u(x, t) = U(\xi, \tau)$.

После преобразований получим

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0;$$

$$U_{\xi\xi}(0, \tau) - kU_{\xi}(0, \tau) = 0;$$

$$U(l(\varepsilon_0\tau), \tau) - \varepsilon_0 \int_{\gamma_0}^{\tau} U_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta), \zeta) l'(\varepsilon_0\zeta) d\zeta = F(\tau),$$

где

$$k = \frac{ES}{ma\omega_0}; \quad \varepsilon_0 = -v_0 / a; \quad l(\varepsilon_0\tau) = 1 + \varepsilon_0\tau;$$

$$F(\tau) = F_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Членами, содержащими коэффициенты вида ε_0^2 и членами вида $\varepsilon F'(\tau)$, которые на резонансные свойства системы влияют, как члены порядка ε_0^2 , будем пренебрегать.

Введём новую функцию

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau),$$

где $V(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$[V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (7.86)$$

и граничным условиям

$$V_{\xi\xi}(0, \tau) - kV_{\xi}(0, \tau) = 0; \quad V(l(\varepsilon_0\tau), \tau) = 0, \quad (7.87)$$

а $H(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$H_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.88)$$

$$H_{\xi}(0, \tau) = 0; \quad (7.89)$$

$$H(l(\varepsilon_0\tau), \tau) = F(\tau) + \varepsilon_0 \int_{\gamma_0}^{\tau} H_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta), \zeta) l'(\varepsilon_0\zeta) d\zeta + \varepsilon_0 \int_{\gamma_0}^{\tau} V_{\xi}(l(\varepsilon_0\zeta), \zeta) l'(\varepsilon_0\zeta) d\zeta. \quad (7.90)$$

Из уравнения (7.88) и условия (7.89) нетрудно получить, что

$$H(\xi, \tau) = C_1(\tau) \frac{\xi}{l(\varepsilon_0 \tau)} + C_2(\tau). \quad (7.91)$$

Подставляя (7.91) в (7.89), получим

$$C_1(\tau) = 0. \quad (7.92)$$

Таким образом

$$H(\xi, \tau) = C_2(\tau); \quad (7.93)$$

$$H_\xi(\xi, \tau) = 0. \quad (7.94)$$

Подставляя (7.91) в (7.90), с учетом (7.92), получим следующее выражение для определения $C_2(\tau)$:

$$C_2(\tau) = F(\tau) + \varepsilon_0 \int_{\gamma_0}^{\tau} V_\xi(l(\varepsilon_0 \zeta), \zeta) l'(\zeta) d\zeta. \quad (7.95)$$

Уравнение (7.86) с учетом (7.91) будет выглядеть следующим образом:

$$[V(\xi, \tau) + F(\tau)]_{\tau\tau} + \varepsilon_0 V_{\xi\tau}(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) l'(\tau) - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0. \quad (7.96)$$

Решение будем искать в виде

$$U(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau). \quad (7.97)$$

Следуя методике, описанной в разделе 3.1., получим

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) y_n(\tau) = - \frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) Q_n(\varepsilon_0 \tau)}{A_{0n}(\varepsilon_0 \tau)} F_n(\tau),$$

где

$$Q_n(\varepsilon_0 \tau) = - \frac{2(-1)^n}{\pi n}; \quad A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) = \frac{1}{\sqrt{l(\varepsilon_0 \tau)}}; \quad \omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau) \approx \frac{\pi n}{l(\varepsilon_0 \tau)} + \frac{k}{\pi n}.$$

Примем $F_n(\tau) = B \cos W_n(\tau)$, где $W_n(\tau)$ – функция класса C^2 .

Здесь выражение $B \cos W_n(\tau)$ характеризует слабые возмущения гармонического характера, связанные с отклонением формы барабана от окружности, а также с вибрациями барабана.

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям раздела 3.1. и используя асимптотический метод (раздел 3.4.), получим следующее

выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{1}{\pi n}; \quad F_n(\tau) = -\frac{B(-1)^n \sqrt{\pi n}}{l(\varepsilon_0 \zeta)}; \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W_n(\zeta);$$

$$w_n(\zeta) = \int_0^\tau \omega_{0n}(\varepsilon_0 \zeta) d\zeta = \frac{\pi n}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau) + \frac{k}{\pi n} \tau.$$

Амплитуда при установившемся резонансе имеет вид

$$A_n(\tau) = B \int_0^\tau \frac{1}{1 + \varepsilon_0 \zeta} d\zeta.$$

Если $W_n(\tau) = \tau$, то в области, содержащей точку $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\pi n - 1)$

наблюдается явление прохождения через резонанс. Максимально возможная амплитуда определяется по формуле

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.98)$$

Выражение (7.98) было исследовано на максимум численно при помощи разработанного программного комплекса «ТВ-ANALYSIS-7». На рисунке 7.13 показан график зависимости максимальной амплитуды колебаний в канате, возникающей при прохождении через резонанс на первой динамической моде, от относительной скорости движения границы.

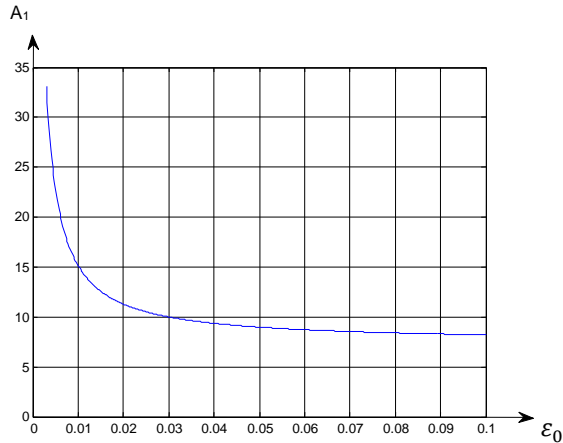


Рис. 7.13. График зависимости максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде от относительной скорости движения границы при $k = 0.1$

На рисунке 7.14 представлен график, иллюстрирующий зависимость амплитуды колебаний в канате от времени при прохождении системы через резонанс на первой динамической моде. График построен с использованием разработанного программного комплекса, который позволяет моделировать динамические процессы в канате грузоподъемной установки.

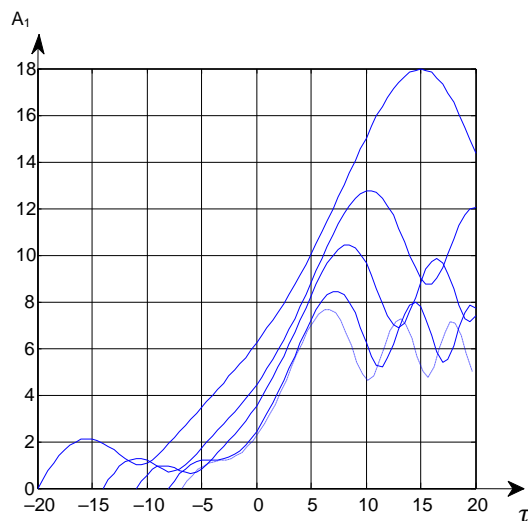


Рис. 7.14. График зависимости амплитуды колебаний от времени на первой динамической моде в резонансной области при $k = 1$ для различных значений ε_0 (сверху вниз: 0.01, 0.02, 0.03, 0.04 и 0.05)

Полученные результаты исследований предоставляют возможность на этапе проектирования предотвратить возникновение продольных колебаний значительной амплитуды в несущих элементах грузоподъемных установок.

7.5.7. Вычисление собственных частот каната, обладающего изгибной жёсткостью и движущегося в продольном направлении

При рассмотрении поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении (рисунок 7.11), изгибная жесткость чаще всего не учитывается.

В этом случае формула для вычисления собственных частот имеет вид

$$\omega_n = (a^2 - v_0^2) / (l_0 a), \quad (7.99)$$

где v_0 – скорость продольного движения каната; l_0 – длина колеблющейся части.

В работах [78, 96] изучение колебаний каната производится с учётом изгибной жёсткости, но для вычисления собственных частот используются приближённые формулы.

В данном разделе расчеты выполняются в безразмерных величинах, при этом количество безразмерных параметров, от которых зависят собственные частоты, равно двум. С использованием разработанного программного комплекса «ТВ–ANALYSIS–7» было получено численное решение уравнения для собственных частот, выведенного в рамках данного раздела. Это позволило представить значения частот в табличной форме в зависимости от указанных параметров.

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость и натяжение каната, имеет вид [123, 125]

$$U_{tt}(x,t) + \alpha^4 U_{xxxx}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) = 0,$$

где $\alpha^4 = EI/\rho$ (E – модуль упругости материала каната; I – осевой момент инерции сечения каната).

Граничные условия с учётом выводов раздела 6.3 можно записать следующим образом:

$$U(v_0 t, t) = 0; \quad U(v_0 t + l_0, t) = 0;$$

$$U_x(v_0 t, t) = 0; \quad U_x(v_0 t + l_0, t) = 0.$$

Введем новые переменные:

$$\zeta = 2\pi(x - v_0 t)/l_0; \quad \eta = 4\pi^2 \alpha^2 t/l_0^2; \quad V(\zeta, \eta) = U(x, t).$$

В результате получим:

$$V_{\eta\eta}(\zeta, \eta) + V_{\zeta\zeta\zeta\zeta}(\zeta, \eta) - \lambda V_{\zeta\zeta}(\zeta, \eta) - \beta V_{\zeta\eta}(\zeta, \eta) = 0; \quad (7.100)$$

$$V(0, \eta) = 0; \quad V(2\pi, \eta) = 0;$$

$$V_\zeta(0, \eta) = 0; \quad V_\zeta(2\pi, \eta) = 0, \quad (7.101)$$

где

$$\beta = v_0 l_0 / (\pi \alpha^2); \quad \lambda = (a^2 - v_0^2) l_0^2 / (4 \alpha^4 \pi^2).$$

Решение уравнения (7.100) при граничных условиях (7.101) будем искать в виде $V(\zeta, \eta) = \mu(\zeta) e^{i\omega_0 \eta}$.

Для определения $\mu(\zeta)$ получим следующую задачу:

$$\mu''''(\zeta) - \lambda \mu''(\zeta) - \beta \omega_0 i \mu'(\zeta) - \omega_0^2 \mu(\zeta) = 0; \quad (7.102)$$

$$\mu(0) = 0; \quad \mu(2\pi) = 0;$$

$$\mu'(0) = 0; \quad \mu'(2\pi) = 0.$$

Применим к уравнению (7.102) конечное интегральное преобразование Фурье:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} \mu(\zeta) e^{ip\zeta} d\zeta, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$$

Опуская некоторые математические выкладки, получим:

$$F(p) = \begin{cases} \frac{ipd - \sigma}{p^4 + \lambda p^2 - \beta \omega_0 p - \omega_0^2}, & p \neq 0; \\ \sigma / \omega_0^2, & p = 0, \end{cases}$$

где

$$\sigma = \mu'''(2\pi) - \mu'''(0); \quad d = \mu''(2\pi) - \mu''(0).$$

Обратное интегральное преобразование имеет вид

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p) e^{-ip\zeta}.$$

Объединяя в данном равенстве члены при p и $-p$, получим:

$$\mu(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{\sigma}{\omega_0^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{idpB_p - \sigma A_p}{A_p^2 - B_p^2} \cos(p\zeta) - 2i \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-ipdA_p - \sigma B_p}{A_p^2 - B_p^2} \sin(p\zeta) \right], \quad (7.103)$$

где

$$A_p = p^4 + \lambda p^2 - \omega_0^2; \quad B_p = \beta \omega_0 p.$$

При применении интегрального преобразования учтено, что

$$\mu(2\pi) - \mu(0) = 0; \quad \mu'(2\pi) - \mu'(0) = 0,$$

поэтому две произвольные постоянные d и σ должны быть определены из условий

$$\mu(0) = 0; \quad \mu'(0) = 0.$$

Подставляя сюда $\mu(\zeta)$, определяемое выражением (7.103), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений с двумя неизвестными d и σ . Из равенства нулю её определителя получим уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{1}{\omega_0^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{p^2 A_p}{A_p^2 - B_p^2} + 2 \left[\sum_{p=1}^{\infty} \frac{p B_p}{A_p^2 - B_p^2} \right]^2 = 0. \quad (7.104)$$

Аналогичный подход был применён в работе [8] к задаче с граничными условиями вида

$$\begin{aligned} V(0, \tau) &= 0; & V(2\pi, \tau) &= 0; \\ V_{\zeta\zeta}(0, \tau) &= 0; & V_{\zeta\zeta}(2\pi, \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (7.105)$$

Там было получено следующее уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\lambda}{\omega_0} - 3,2899 - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \frac{\omega_0^2 A_p + B_p^2}{A_p^2 - B_p^2} \right) \times \left(1,644 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^2} \frac{(\omega_0^2 - \lambda p^2) A_p + B_p^2}{A_p^2 - B_p^2} \right) +$$

$$+ \left(2,1646 - \frac{1}{\omega_0^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p^4} \frac{(\omega_0^2 - \lambda p^2) A_p + B_p^2}{A_p^2 - B_p^2} \right) \times \left(-0,5 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\omega_0^2 A_p + B_p^2}{A_p^2 - B_p^2} \right) = 0. \quad (7.106)$$

Уравнения были решены численно относительно первой собственной частоты для параметров λ и β , наиболее часто встречающихся на практике. Результаты вычислений для уравнения (7.104) приведены в таблице 7.5, а для уравнения (7.106) – в таблице 7.6.

Таблица 7.5. Результаты вычислений собственных частот для уравнения (7.104) в зависимости от значений λ и β

$\lambda \backslash \beta$	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0
0,0	0,566	0,527	0,320	0,230	0,163	0,135	0,096	0,111	0,082	0,077	0,069
0,5	0,689	0,622	0,427	0,312	0,261	0,190	0,162	0,141	0,123	0,109	0,096
1,0	0,791	0,725	0,541	0,395	0,306	0,245	0,227	0,198	0,161	0,154	0,135
1,5	0,880	0,816	0,675	0,482	0,411	0,303	0,292	0,208	0,201	0,175	0,161
2,0	0,960	0,899	0,764	0,573	0,459	0,361	0,300	0,286	0,259	0,226	0,188
2,5	1,033	0,974	0,842	0,669	0,564	0,421	0,370	0,297	0,279	0,250	0,214
3,0	1,101	1,044	0,914	0,771	0,618	0,482	0,439	0,376	0,295	0,273	0,240
3,5	1,164	1,110	0,983	0,834	0,644	0,545	0,449	0,389	0,379	0,354	0,266
4,0	1,224	1,171	1,046	0,896	0,721	0,607	0,518	0,467	0,401	0,382	0,354
4,5	1,281	1,230	1,107	0,959	0,834	0,671	0,589	0,482	0,419	0,408	0,383
5,0	1,335	1,285	1,165	1,019	0,885	0,736	0,597	0,559	0,501	0,433	0,412
5,5	1,387	1,338	1,219	1,076	0,936	0,800	0,672	0,577	0,525	0,458	0,441
6,0	1,436	1,389	1,272	1,129	0,987	0,864	0,742	0,652	0,546	0,482	0,470
6,5	1,484	1,436	1,323	1,179	1,038	0,868	0,756	0,673	0,624	0,505	0,499
7,0	1,530	1,486	1,373	1,230	1,083	0,943	0,829	0,687	0,650	0,593	0,528

7,5	1,575	1,532	1,420	1,278	1,135	0,989	0,840	0,769	0,673	0,620	0,557
8,0	1,618	1,576	1,466	1,325	1,179	1,034	0,919	0,787	0,695	0,647	0,586
8,5	1,660	1,619	1,511	1,374	1,226	1,079	0,926	0,863	0,774	0,674	0,615
9,0	1,701	1,661	1,555	1,415	1,269	1,124	1,011	0,887	0,801	0,700	0,650
9,5	1,741	1,702	1,597	1,458	1,313	1,170	1,096	0,904	0,826	0,726	0,674
10	1,780	1,741	1,638	1,500	1,354	1,215	1,181	0,984	0,849	0,751	0,704

Таблица 7.6. Результаты вычислений собственных частот для уравнения (7.106) в зависимости от значений λ и β

$\beta \backslash \lambda$	0,0	1,5	3,0	4,5	6,0	7,5	9,0	10,5	12,0	13,5	15,0
0,0	0,251	0,209	0,151	0,113	0,089	0,075	0,061	0,054	0,050	0,045	0,039
0,5	0,433	0,378	0,290	0,224	0,178	0,147	0,122	0,108	0,090	0,082	0,076
1,0	0,559	0,501	0,399	0,315	0,254	0,210	0,178	0,152	0,137	0,116	0,112
1,5	0,661	0,604	0,495	0,398	0,326	0,271	0,235	0,200	0,176	0,154	0,150
2,0	0,750	0,694	0,580	0,475	0,392	0,322	0,289	0,243	0,214	0,194	0,185
2,5	0,829	0,774	0,659	0,546	0,455	0,386	0,330	0,293	0,259	0,234	0,217
3,0	0,901	0,848	0,732	0,614	0,516	0,441	0,382	0,330	0,292	0,265	0,247
3,5	0,968	0,916	0,801	0,679	0,575	0,492	0,426	0,375	0,330	0,295	0,276
4,0	1,031	0,980	0,865	0,741	0,632	0,543	0,475	0,416	0,369	0,329	0,296
4,5	1,089	1,041	0,927	0,800	0,687	0,595	0,517	0,456	0,410	0,363	0,327
5,0	1,145	1,098	1,985	1,856	0,740	0,641	0,564	0,498	0,445	0,398	0,358
5,5	1,199	1,152	1,041	0,911	0,791	0,689	0,604	0,537	0,479	0,433	0,389
6,0	1,250	1,204	1,094	0,963	0,841	0,735	0,648	0,574	0,514	0,467	0,420
6,5	1,299	1,254	1,146	1,015	0,889	0,780	0,689	0,614	0,550	0,501	0,450
7,0	1,346	1,303	1,195	1,064	0,936	0,825	0,730	0,653	0,589	0,534	0,481
7,5	1,392	1,349	1,243	1,112	0,983	0,868	0,771	0,689	0,622	0,565	0,510
8,0	1,436	1,395	1,290	1,158	1,027	0,910	0,810	0,725	0,656	0,595	0,540

8,5	1,479	1,438	1,335	1,203	1,072	0,953	0,849	0,761	0,688	0,626	0,569
9,0	1,520	1,481	1,379	1,247	1,114	0,993	0,888	0,798	0,720	0,650	0,599
9,5	1,561	1,522	1,421	1,290	1,156	1,033	0,926	0,834	0,753	0,689	0,628
10	1,600	1,562	1,463	1,332	1,198	1,073	0,962	0,868	0,785	0,717	0,657

Отметим, что уравнения (7.104) и (7.106) позволяют получить не только первую, но и любую более высокую частоту. Так, для случая $\lambda = 1$, $\beta = 3$, были получены следующие собственные частоты уравнения (7.106):

$$\omega_{01} = 0,4; \omega_{02} = 1,309; \omega_{03} = 2,746; \omega_{04} = 4,645.$$

Данные, представленные в таблицах, дают возможность исследовать влияние скорости движения границ на значение первой собственной частоты. При анализе табличных результатов важно учитывать, что решение задачи выполнено в безразмерных переменных.

Например, для каната с параметрами

$$E = 2 \cdot 10^9 \text{ н/м}^2; r = 0,01 \text{ м}; l_0 = 5 \text{ м}; a = 30 \text{ м/с}; \rho = 1300 \text{ кг/м}^3,$$

где r – радиус поперечного сечения каната, получены графические зависимости, приведённые на рисунке 7.15.

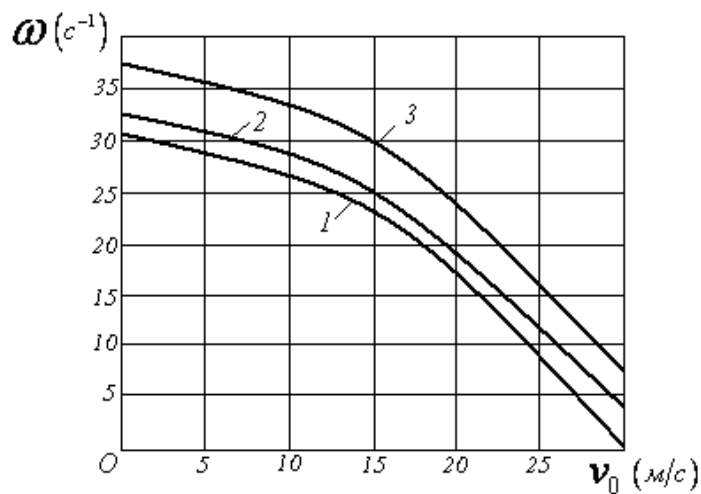


Рис. 7.15. Зависимость собственных частот каната от скорости

На рисунке 7.15 обозначено: 1 – собственные частоты, полученные по формуле (7.99); 2 и 3 – собственные частоты каната, имеющего изгибную жесткость, при граничных условиях соответственно (7.105) и (7.101).

Рисунок 7.15 демонстрирует, что при скорости каната, приближающейся к a , погрешность формулы (7.99) становится недопустимо большой. Следовательно, при значениях v_0 , близких к a , а также в случаях значительной изгибной жесткости, использование формулы (7.99) недопустимо. В таких ситуациях собственные частоты широкого круга технических объектов можно получить, используя таблицы 7.5 и 7.6.

7.5.8. Задача о колебаниях кабеля на участке наложения на него изоляции

Схема технологической установки по изготовлению кабеля изображена на рисунке 7.16.

Здесь в точке $x = l_0$ через круглое отверстие в разжиженном виде выдавливается изоляционная масса 3, которая накладывается на протягиваемую через отверстие жилу 4. Кабель 2 охлаждается в водяной ванне 1 и наматывается на катушку 5.

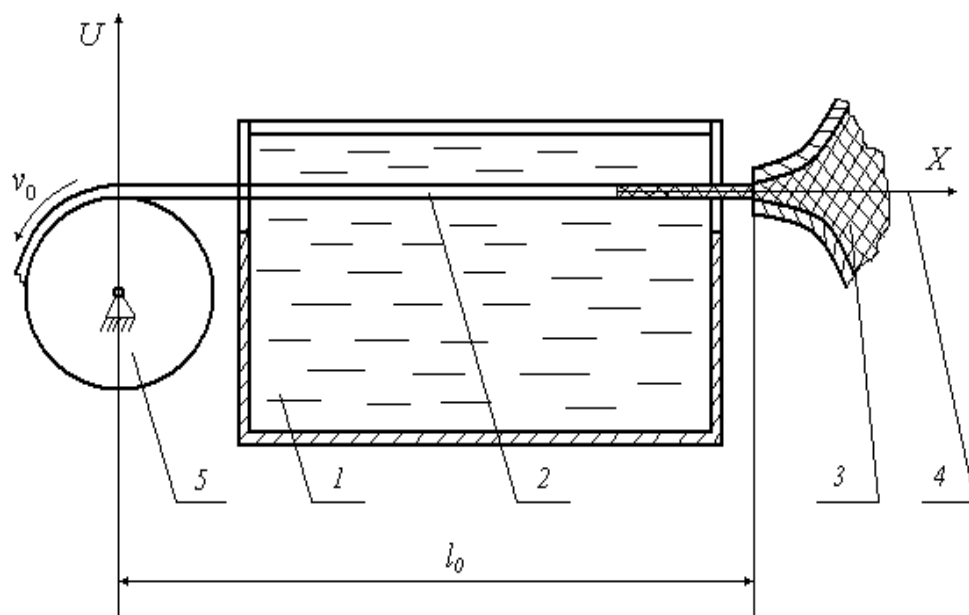


Рис. 7.16. Схема технологической установки по изготовлению кабеля

Особенность задачи состоит в том, что изгибная жесткость кабеля изменяется вдоль его длины. Скорость волн, распространяющихся из точки $x=0$ в точку $x=l_0$, снижается из-за уменьшения жесткости струны, что приводит к своеобразной концентрации волн по мере приближения к точке $x=l_0$. Кроме того, эти волны бегут относительно среды с меньшей скоростью, и, как отмечается в статье [46], среда оказывает меньшее сопротивление волнам, распространяющимся в данном направлении, по сравнению с волнами, движущимися в обратную сторону. Указанные особенности могут вызвать значительное увеличение амплитуд колебаний вблизи точки $x=l_0$, что является нежелательным эффектом. Для предотвращения этого необходимо определить собственные частоты колебаний рассматриваемой системы

Задачу по определению собственных частот поставим следующим образом:

$$TU_{xx}(x,t) - \frac{\partial^2}{\partial x^2} [C(x-v_0t)U_{xx}(x,t)] - \rho U_{tt}(x,t) - \lambda U_t(x,t) - RU_x(x,t) = 0;$$

$$U(v_0t, t) = 0; \quad U(v_0t + l_0, t) = 0;$$

$$U_x(v_0t, t) = 0; \quad U_x(v_0t + l_0, t) = 0.$$

Здесь λ, R – коэффициенты, учитывающие сопротивление воды; $C(x-v_0t)$ – изгибная жесткость кабеля; v_0 – скорость движения кабеля.

Значение R приближенно составляет величину

$$R = \lambda v_0. \quad (7.107)$$

При этом на волну $U = \varphi(x-v_0t)$, бегущую со скоростью v_0 и, следовательно, покоящуюся относительно воды, силы сопротивления не действуют ($F_c = \lambda U_t + RU_x = 0$), что соответствует действительности.

Введем новые переменные:

$$\zeta = x - v_0t; \quad t = t; \quad V(\zeta, t) = U(x, t).$$

После преобразований с учетом (7.107) получим:

$$(a^2 - v_0^2)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} [C(\zeta)V_{\zeta\zeta}(\zeta, t)] + 2v_0V_{\zeta t}(\zeta, t) - V_{tt}(\zeta, t) - \frac{\lambda}{\rho}V_t(\zeta, t) = 0;$$

$$V(0, t) = 0; \quad V(l_0, t) = 0;$$

$$V_{\zeta}(0, t) = 0; \quad V_{\zeta}(l_0, t) = 0.$$

Примем

$$C(\zeta) = d - b\zeta$$

и введем безразмерные переменные:

$$\xi = \zeta / l_0 - 0,5; \quad \tau = at / l_0; \quad Z(\xi, \tau) = V(\zeta, t).$$

Окончательная постановка задачи примет вид

$$r\xi Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \gamma Z_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + 2rZ_{\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \\ + (1 - v^2)Z_{\xi\xi}(\xi, \tau) + 2vZ_{\xi\tau}(\xi, \tau) - Z_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \beta Z_{\tau}(\xi, \tau) = 0;$$

$$Z(-0,5; \tau) = 0; \quad Z(0,5; \tau) = 0;$$

$$Z_{\xi}(-0,5; \tau) = 0; \quad Z_{\xi}(0,5; \tau) = 0,$$

где

$$r = b / (\rho l_0 a^2); \quad \gamma = 0,5 b / (\rho l_0 a^2) - d / (\rho l_0^2 a^2);$$

$$v = v_0 / a; \quad \beta = \lambda l_0 / (\rho a). \quad (7.108)$$

Решение полученной задачи будем искать в виде произведения двух функций: $Z(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{W\tau}$.

Для $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = (r\xi + \gamma)\mu^{(IV)}(\xi) + 2r\mu'''(\xi) + (1 - v^2)\mu''(\xi) + \\ + 2vW\mu'(\xi) - (W^2 + \beta W)\mu(\xi) = 0; \quad (7.109)$$

$$\mu(-0,5) = 0; \quad \mu(0,5) = 0;$$

$$\mu'(-0,5) = 0; \quad \mu'(0,5) = 0. \quad (7.110)$$

Точно определить собственные частоты задачи (7.109), (7.110) довольно сложно, поэтому воспользуемся приближенным методом, основанным на методе Галеркина. Решение задачи будем искать в виде

$$\mu(\xi) = C\varphi_1(\xi) + B\varphi_2(\xi),$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_1(\xi) &= \xi^4 - 0,5\xi^2 + 0,0625; \\ \varphi_2(\xi) &= \xi^5 - 0,5\xi^3 + 0,0625\xi\end{aligned}\quad (7.111)$$

– две линейно независимые функции, удовлетворяющие граничным условиям (7.110).

При использовании метода Галеркина коэффициенты C и B следует определять из однородной системы

$$\begin{cases} C \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi = 0; \\ C \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi + B \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi = 0. \end{cases}$$

Приравнивая нулю ее определитель, получим уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} & \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi \cdot \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi - \\ & - \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_2(\xi)]\varphi_1(\xi)d\xi \cdot \int_{-0,5}^{0,5} L[\varphi_1(\xi)]\varphi_2(\xi)d\xi = 0. \end{aligned}\quad (7.112)$$

После подстановки в (7.112) оператора $L[\varphi_{1,2}(\xi)]$, определяемого выражением (7.109), и равенств (7.111) будем иметь:

$$\begin{aligned} W^4 + 2\beta W^3 + W^2(\beta^2 - 4465 \cdot \gamma - 12 \cdot \nu^2 + 56) + W[56\beta(1 - \nu^2) - 4465 \cdot \beta\gamma] + \\ + 1996855 \cdot \gamma^2 - 69726 \cdot \gamma(1 - \nu^2) + 528(1 - \nu^2)^2 - 128407 \cdot r^2 = 0. \end{aligned}\quad (7.113)$$

Данное уравнение позволяет определить две пары комплексно–сопряженных корней:

$$W_1 = -\omega_{01} \pm i\omega_1; \quad W_2 = -\omega_{02} \pm i\omega_2.$$

Наличие у W_1 и W_2 действительных частей свидетельствует о затухании свободных колебаний. Мнимые части представляют собой первую и вторую собственные частоты системы.

Точность предлагаемого метода можно оценить сравнением корней уравнения (7.113) с точным решением. Для этого примем $b = 0$ и $\lambda = 0$. После

вычислений по формулам (7.108) будем иметь $r = 0$, $\beta = 0$. Решая уравнение (7.113) и сравнивая полученные частоты с их точными значениями, которые для данного случая можно вычислить с помощью разработанного программного комплекса и используя методику раздела 3.6., получим зависимость относительной погрешности получаемых из уравнения (7.113) частот от скорости v (см. рисунок 7.17).

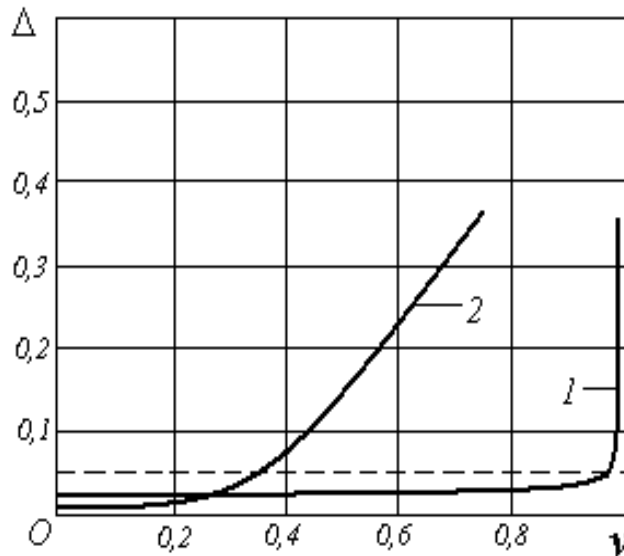


Рис. 7.17. Зависимость относительной погрешности получаемых частот от скорости v

Данная зависимость на рисунке 7.17 показана для случая, когда $\gamma = -0,005$. Графики 1 и 2 на рисунке 7.17 соответственно описывают погрешность первой и второй собственных частот. Графики наглядно показывают, что погрешность частот, определяемых по методу Галеркина, растет с возрастанием v . Этот метод дает удовлетворительные результаты ($\Delta < 0,05$) для первой собственной частоты при $v < 0,95$ и для второй собственной частоты при $v < 0,34$.

Используя уравнение (7.113), проанализируем влияние b и v на первую собственную частоту свободных колебаний кабеля при следующих параметрах:

$$d = 2,65 \text{ н} \cdot \text{м}^2; \quad \rho = 0,25 \text{ кг} / \text{м}; \quad \lambda = 2,6 \text{ н} \cdot \text{с} / \text{м}^2; \quad a = 20 \text{ м} / \text{с}.$$

Зафиксируем $b=0,45$. Тогда таблица, полученная с помощью разработанного программного комплекса «TB–ANALYSIS–7» и раскрывающая зависимость W_1 от ν , будет выглядеть следующим образом (таблица 7.7).

Таблица 7.7. Зависимость W_1 от ν при $b=0,45$

ν	0,00	0,25	0,50	0,75
W_1	$-1,30 + 3,25i$	$-1,20 + 3,04i$	$-0,95 + 2,40i$	$-0,59 + 1,41i$

Зафиксируем $\nu = 0,25$. Тогда зависимость W_1 от b выразится таблицей 7.8.

Таблица 7.8. Зависимость W_1 от b при $\nu = 0,25$

b	0,00	0,15	0,30	0,45
W_1	$-1,205 + 3,074i$	$-1,204 + 3,061i$	$-1,203 + 3,048i$	$-1,201 + 3,035i$

Анализ таблиц позволяет сделать следующие выводы.

1. С увеличением ν собственные частоты и величина затухания уменьшаются.
2. С увеличением b (что равносильно усилению зависимости изгибной жесткости струны от координаты x) собственные частоты и величина затухания незначительно уменьшаются.

7.5.9. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость

Рассмотрим влияние вязкоупругих свойств на поперечные колебания каната с изгибной жесткостью (см. рисунок 7.11). В случае, когда ось x

движется вместе с канатом, задачу по определению собственных частот можно поставить следующим образом:

$$U_{tt}(x,t) - a^2 U_{xx}(x,t) + b \left[U_{xxxx}(x,t) - \int_0^t K(t-\nu) U_{xxxx}(x,\nu) d\nu \right] = 0;$$

$$U(v_0 t, t) = 0; \quad U_x(v_0 t, t) = 0;$$

$$U(v_0 t + l_0, t) = 0; \quad U_x(v_0 t + l_0, t) = 0,$$

где $b = EI/\rho$; $K(z)$ – ядро релаксации, его можно взять в экспоненциальном виде:

$$K(z) = \sum_{j=1}^n C_j e^{-\beta_j z}. \quad (7.114)$$

Введем новые переменные:

$$\xi = (x - v_0 t) / l_0; \quad \tau = at / l_0; \quad U(x, t) = V(\xi, \tau).$$

После преобразований получим:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \gamma V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - (1 - v^2) V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \\ - 2v V_{\tau\xi}(\xi, \tau) - \gamma d \int_{\xi}^{\xi+v\tau} K(-d(\xi - \eta)) V_{\xi\xi\xi\xi}(\eta, \frac{1}{v}(\xi - \eta) + \tau) d\eta = 0;$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi}(0, \tau) = 0;$$

$$V(1, \tau) = 0; \quad V_{\xi}(1, \tau) = 0,$$

где

$$\gamma = b / (a^2 l_0^2); \quad v = v_0 / a; \quad d = l_0 / v_0.$$

Будем искать решение в виде

$$V(\xi, \tau) = \begin{cases} \mu(\xi) e^{W\tau}, & \xi \leq 1; \\ 0, & \xi > 1. \end{cases}$$

Тогда при $\tau > a / v_0$ (что соответствует $t > l_0 / v_0$) получим следующую задачу для $\mu(\xi)$:

$$W^2 \mu(\xi) + \gamma \mu''''(\xi) - (1 - v^2) \mu''(\xi) - 2v W \mu(\xi) - \gamma d \int_{\xi}^1 e^{\frac{(\xi-\eta)W}{v}} K(-d(\xi - \eta)) \mu''''(\eta) d\eta = 0;$$

$$\mu(0) = 0; \quad \mu'(0) = 0; \quad \mu(1) = 0; \quad \mu'(1) = 0.$$

Для упрощения дальнейших выкладок введем новую переменную $z = \xi - 0,5$.

Сохраняя прежнее обозначение функции, получим:

$$\begin{aligned} L[\mu(z)] &= \gamma \mu''''(z) - (1 - v^2) \mu''(z) - 2vW \mu'(z) + W^2 \mu(z) - \\ &- \gamma d \int_z^{0,5} e^{W(z-\eta)/v} K(-d(z-\eta)) \mu''''(\eta) d\eta = 0; \\ \mu(-0,5) &= 0; \quad \mu'(-0,5) = 0; \quad \mu(0,5) = 0; \quad \mu'(0,5) = 0. \end{aligned} \quad (7.115)$$

Подставляя сюда $K(z)$, определяемое равенством (7.114), рассматривая $\mu(z)$, как

$$\mu(z) = C(z^4 - 0,5z^2 + 0,0625) + B(z^5 - 0,5z^3 + 0,0625z),$$

и применяя к получившейся задаче метод Галеркина, описанный в разделе 7.5.10., получим следующее уравнение для определения первых двух собственных частот каната:

$$\begin{aligned} W^4 + W^2(4465\gamma - 12v^2 + 56) + 1996855\gamma^2 + \\ + 69726\gamma(1 - v^2) + 528(1 - v^2)^2 = \frac{\varepsilon(W)}{5,725}, \end{aligned} \quad (7.116)$$

где

$$\varepsilon(W) = 10^4 \gamma d (\varepsilon_{11} D_{22} + \varepsilon_{22} D_{11} - \varepsilon_{12} D_{21} - \varepsilon_{21} D_{12}) + (10^4 \gamma d)^2 (\varepsilon_{12} \varepsilon_{21} - \varepsilon_{11} \varepsilon_{22});$$

$$D_{11} = 15,87 W^2 + 8000\gamma + 190,5(1 - v^2);$$

$$D_{12} = -D_{21} = 15,87 v W;$$

$$D_{22} = 0,361 W^2 + 1429\gamma + 15,87(1 - v^2);$$

$$\varepsilon_{11} = 24 \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{h_j} \left[\frac{1}{30} - F_1(h_j) \right]; \quad \varepsilon_{12} = -24 \sum_{j=1}^n \frac{C_j}{h_j} F_2(h_j);$$

$$\varepsilon_{21} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{4 C_j}{h_j^2} - \frac{120 C_j}{h_j} \left(0,5 + \frac{1}{h_j} \right) F_1(h_j) \right];$$

$$\varepsilon_{22} = \sum_{j=1}^n \left[\frac{0,143 C_j}{h_j} - \frac{120 C_j}{h_j} \left(0,5 + \frac{1}{h_j} \right) F_2(h_j) \right];$$

$$h_j = \frac{W}{v} + \beta_j d;$$

$$F_1(h_j) = \frac{1}{h_j} \left(\frac{24}{h_j^4} - \frac{12}{h_j^3} + \frac{2}{h_j^2} \right) - \frac{e^{h_j}}{h_j} \left(\frac{24}{h_j^4} + \frac{12}{h_j^3} + \frac{2}{h_j^2} \right);$$

$$F_2(h_j) = \frac{1}{h_j} \left(-\frac{120}{h_j^5} + \frac{60}{h_j^4} - \frac{12}{h_j^3} + \frac{1}{h_j^2} \right) + \frac{e^{-h_j}}{h_j} \left(\frac{120}{h_j^5} + \frac{60}{h_j^4} + \frac{12}{h_j^3} + \frac{1}{h_j^2} \right).$$

Поскольку величина $\varepsilon(W)$ в уравнении (7.116) мала (влияние вязкоупругости незначительно), то для получения решения можно поступить следующим образом:

- 1) принять $\varepsilon(W) = 0$ и найти корни уравнения (7.116) W_{01} и W_{02} ;
- 2) подставить W_{01} (W_{02}) в правую часть уравнения (7.116) и снова решить его, получив первое приближение частоты W_{11} (W_{12});
- 3) продолжая этот процесс, можно достигнуть любой точности определения корней уравнения (7.116)

При условии ограничения случаем, когда $K(z) = Ce^{-\beta z}$, были получены первые приближения первой собственной частоты системы с параметрами

$$d = 1; \quad \gamma = 0,005; \quad \nu = 0,2; \quad W_{01} = 3,68i. \quad (7.117)$$

Зависимость первой собственной частоты от величин C и β , рассчитанная с помощью разработанного программного комплекса, сведена в таблицу 7.9.

Таблица 7.9. Зависимость первой собственной частоты от величин C и β

$\beta \backslash C$	0,00	0,25	0,50
0,00	3,63	3,63	3,63
0,05	$-0,00099+3,6299i$	$-0,00098+3,6297i$	$-0,00097+3,6296i$
0,10	$-0,00198+3,6297i$	$-0,00196+3,6294i$	$-0,00193+3,6292i$
0,15	$-0,00297+3,6295i$	$-0,00294+3,6292i$	$-0,00290+3,6288i$

Таким образом, с увеличением C и β собственные частоты очень незначительно уменьшаются (можно считать, что их величина не зависит от

вязкоупругих свойств). Однако влиянием C и β на затухание пренебречь нельзя.

Так, при $\beta = 0,5$, $C = 0,15$ для каната с параметрами (7.117) в случае $a = 40$ м/с, $l_0 = 0,5$ м. амплитуда свободных колебаний на первой собственной частоте будет уменьшаться в два раза за каждые две секунды.

7.5.10. Вычисление собственных частот поперечных колебаний каната с учетом сопротивления внешней среды при различных граничных условиях

Исследуем поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Схема объекта изображена на рисунке 7.11.

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость, натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид:

$$u_{tt}(x,t) + bu_{xxxx}(x,t) - a^2u_{xx}(x,t) + Gu_t(x,t) = 0. \quad (7.118)$$

Здесь $b = \frac{EI}{\rho}$; $a^2 = \frac{T}{\rho}$; G – коэффициент сопротивления среды (сила,

действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения).

Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0; u_x(vt, t) = 0; u_x(vt + l, t) = 0, \quad (7.119)$$

где v – скорость продольного движения каната, l – длина колеблющейся части.

Введем безразмерные переменные:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau); \quad \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \quad \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l}t.$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.120)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; U_{\xi}(0, \tau); U_{\xi}(2\pi, \tau). \quad (7.121)$$

Здесь

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)} ; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}} ; \gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}} ; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)} .$$

Четыре коэффициента уравнения (7.120) могут быть выражены через три безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a} ; \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2} ; D = \frac{Gl}{2\pi a} .$$

Параметры характеризуют: α – скорость продольного движения каната; θ – изгибную жёсткость; D – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (7.120) выражаются следующим образом:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2} ; \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}} ; \lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}} ; \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2} .$$

Сначала решим задачу (7.120), (7.121) без учёта изгибной жёсткости ($\beta = 0$). Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau} .$$

Для вычисления функции $\mu(\xi)$ получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (7.122)$$

$$\mu(0) = 0 ; \mu(2\pi) = 0. \quad (7.123)$$

Решение задачи (7.122–7.123) не представляет затруднений. Уравнение (7.122) представляет собой линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами при граничных условиях (7.123).

Общее решение (7.122) имеет вид:

$$\mu(\xi) = e^{-\frac{(\gamma\omega - \eta)\xi}{2}} \left(C_1 \cos \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi + C_2 \sin \frac{\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)}}{2} \xi \right). \quad (7.124)$$

Используя граничные условия (7.123), получим

$$C_1 = 0$$

$$C_2 \sin \pi \sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = 0.$$

Тогда:

$$\sqrt{-(\gamma\omega + \eta)^2 - 4(\omega^2 + \lambda\omega)} = n. \quad (7.125)$$

Из (7.125) получим квадратное уравнение относительно собственных частот ω :

$$\omega^2(4 + \gamma^2) + 2\omega(\gamma\eta + 2\lambda) + (\eta^2 + n^2) = 0. \quad (7.126)$$

В результате решения уравнения (7.126) получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i \frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}. \quad (7.127)$$

Здесь i – мнимая единица; n – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (7.127) характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

При отсутствии затухания ($\lambda = \eta = 0$) выражение (7.127) примет вид:

$$\omega_n = i \frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (7.128)$$

Найдем собственные функции $\mu(\xi)$ при отсутствии затухания. С учетом нормирования, из (7.124) получим:

$$\mu(\xi) = e^{-\frac{i n \alpha \xi}{2}} \sin \frac{n \xi}{2}.$$

Используя формулу Эйлера, получим выражение для собственных функций в виде:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1-\alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1+\alpha)n\xi}{2}\right).$$

С использованием программного комплекса, разработанного в среде MATLAB, были изучены зависимости собственных функций $\mu(\xi)$ от параметра α , который определяет скорость продольного движения каната (см. рисунок 7.18).

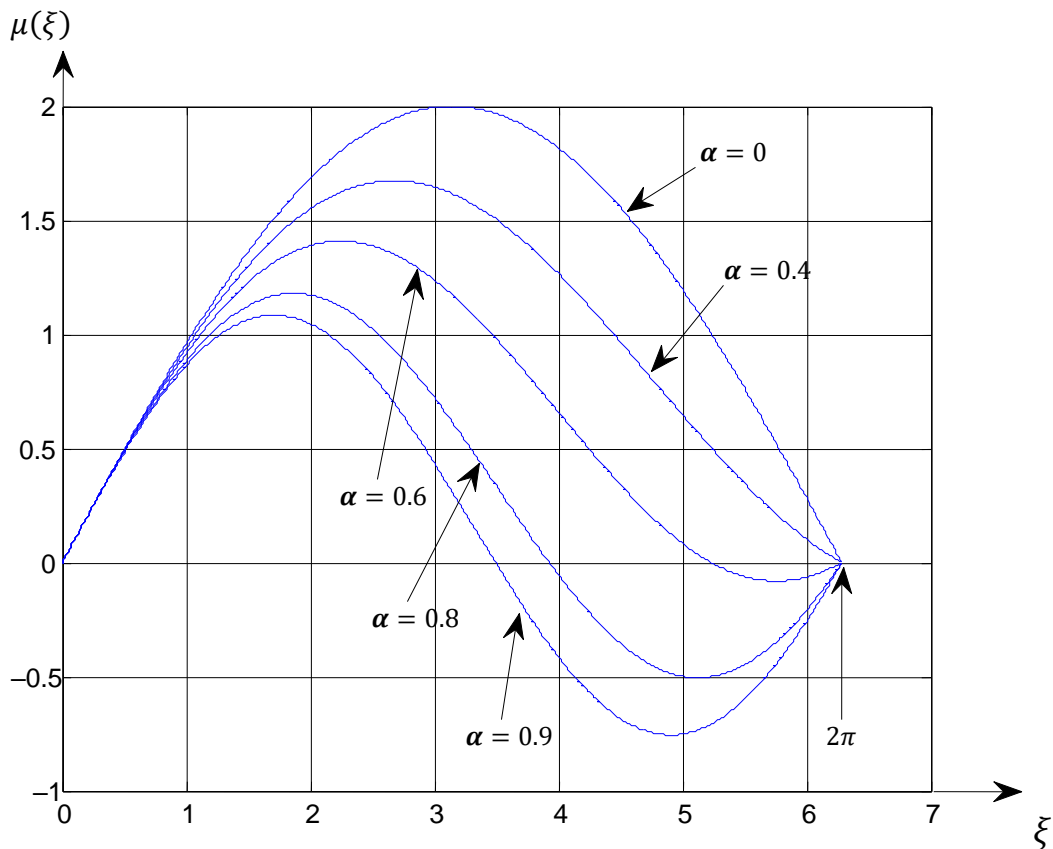


Рис.7.18. Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

Результаты анализа рисунка 7.18 свидетельствуют о том, что с увеличением скорости движения каната наблюдается усиление искажения собственных функций. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

Решим задачу с учётом изгибной жёсткости, но без учета затухания ($\lambda = \eta = 0$). Решение будем искать в виде

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau}.$$

Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\beta\mu^{(IV)}(\xi) - \mu''(\xi) - i\gamma\omega\mu'(\xi) - \omega^2\mu(\xi) = 0; \quad (7.129)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (7.130)$$

Для решения используем дискретное интегральное преобразование Фурье:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} \mu(\xi)e^{ip\xi} d\xi; \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

В результате применения преобразования получим:

$$F(p) = \frac{ip\beta\mu_2 - \beta\mu_3}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2},$$

где $\mu_2 = \mu''(2\pi) - \mu''(0)$; $\mu_3 = \mu'''(2\pi) - \mu'''(0)$.

Обратное интегральное преобразование имеет вид:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p)e^{-ip\xi}.$$

Опуская некоторые математические выкладки, получим:

$$\begin{aligned} \mu(\xi) = & \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\beta\mu_3}{\omega^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ip\beta\mu_2 B_p - \beta\mu_3 A_p}{A_p^2 - B_p^2} \cos(p\xi) \right) + \\ & + \frac{i}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-ip\beta\mu_2 A_p + \beta\mu_3 B_p}{A_p^2 - B_p^2} \sin(p\xi). \end{aligned} \quad (7.131)$$

Здесь $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$; $B_p = \gamma\omega p$.

При применении интегрального преобразования было учтено, что

$$\mu(2\pi) - \mu(0) = 0; \mu'(2\pi) - \mu'(0) = 0.$$

Поэтому, чтобы выполнялись граничные условия (7.130), две произвольные постоянные μ_2 и μ_3 должны быть получены из условий:

$\mu(0)=0$ и $\mu'(0)=0$. Подставляя в данные условия $\mu(\xi)$, определяемое выражением (7.131), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно μ_2 и μ_3 . Из равенства нулю её определителя получается уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p^2 A_p}{A_p^2 - B_p^2} + 2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p B_p}{A_p^2 - B_p^2} \right)^2 = 0. \quad (7.132)$$

Решим задачу (7.120), (7.121) методом Канторовича–Галеркина. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi) e^{\omega \tau}.$$

Для определения $\mu(\xi)$ получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = \beta \mu^{(IV)}(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma \omega + \eta) \mu'(\xi) + (\omega^2 + \omega \lambda) \mu(\xi) = 0; \quad (7.133)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (7.134)$$

Функцию $\mu(\xi)$ возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1 \mu_1(\xi) + C_2 \mu_2(\xi),$$

где $\mu_1(\xi) = \xi^2 (\xi - 2\pi)^2$; $\mu_2(\xi) = \xi^2 (\xi - 2\pi)^2 (\xi - \pi)$. Данные функции удовлетворяют граничным условиям (7.134) и являются ортогональными на интервале $(0, 2\pi)$.

Согласно методу Канторовича–Галеркина, произвольные постоянные C_1 и C_2 находятся из следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_1(\xi) d\xi = 0; \\ \int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)] \mu_2(\xi) d\xi = 0. \end{cases}$$

Дифференциальный оператор $L[\mu(\xi)]$ определяется выражением (7.133).

Произведя интегрирование и приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} &\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(2.86457\beta + \lambda^2 + 0.27795\gamma^2 + 1.41853) + \\ &\quad + \omega(2.86457\lambda\beta + 1.41852\lambda + 0.55591\gamma\eta) + \\ &\quad + (0.82177\beta^2 + 0.77244\beta + 0.27795\eta^2 + 0.69921) = 0. \end{aligned} \quad (7.135)$$

Данное уравнение позволяет получить две первые собственные частоты поперечных колебаний каната.

Уравнение (7.132) было решено численным методом с использованием разработанного программного комплекса при различных значениях параметров α и θ . Результаты расчетов представлены в таблице 7.10. В случаях, когда $\theta = 0$ ряды, входящие в уравнение (7.132), оказываются расходящимися, значения частот определялись по формуле (7.127).

Уравнение (7.135) также было решено с использованием разработанного программного комплекса в среде MATLAB. Для проверки точности метода Канторовича–Галеркина уравнение (7.135) рассматривалось в условиях отсутствия затухания ($\lambda = \eta = 0$). Результаты расчетов представлены в таблице 7.10. Для каждого значения параметра α приведены следующие данные: точное значение первой собственной частоты, точное значение второй собственной частоты, приближенное значение первой собственной частоты и приближенное значение второй собственной частоты. В случае отсутствия изгибной жесткости ($\theta = 0$) частоты, полученные методом Канторовича–Галеркина, обладают значительной погрешностью, поэтому в таблице они не приведены. В таких ситуациях значения частот могут быть рассчитаны по формуле (7.127).

В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты, имеющие погрешность более 5%. Анализ данных таблицы 7.10 показывает, что погрешность частот, полученных методом Канторовича–Галеркина, увеличивается с увеличением α и уменьшается с увеличением θ .

Таблица 7.10. Зависимость частоты от скорости продольного движения каната и изгибной жесткости при граничных условиях (7.121)

$\theta \backslash \alpha$	0	1	2	3	4	5	Примечания
0	0.500	0.792	0.975	1.129	1.263	1.385	ω_1 (точн.)
	1.000	1.898	2.450	2.914	3.307	3.658	ω_2 (точн.)
		0.792	0.940	1.086	1.220	1.342	ω_1 (прибл.)
		1.912	2.503	2.972	3.375	3.734	ω_2 (прибл.)
0.2	0.490	0.795	0.985	1.143	1.281	1.406	ω_1 (точн.)
	0.980	1.924	2.501	2.967	3.369	3.728	ω_2 (точн.)
		0.792	0.948	1.100	1.239	1.364	ω_1 (прибл.)
		1.955	2.556	3.034	3.345	3.811	ω_2 (прибл.)
0.4	0.458	0.806	1.019	1.193	1.344	1.479	ω_1 (точн.)
	0.917	2.015	2.644	3.148	3.581	3.966	ω_2 (точн.)
		0.795	0.980	1.150	1.302	1.439	ω_1 (прибл.)
		2.100	2.737	3.246	3.685	4.076	ω_2 (прибл.)
0.6	0.400	0.841	1.101	1.311	1.490	1.650	ω_1 (точн.)
	0.800	2.227	2.973	3.561	4.063	4.510	ω_2 (точн.)
		0.818	1.063	1.271	1.452	1.615	ω_1 (прибл.)
		2.419	3.141	3.723	4.224	4.671	ω_2 (прибл.)
0.8	0.300	0.966	1.346	1.643	1.894	2.117	ω_1 (точн.)
	0.600	2.817	4.221	4.662	5.343	5.946	ω_2 (точн.)
		0.936	1.314	1.613	1.868	2.093	ω_1 (прибл.)
		3.237	4.193	4.966	5.633	6.229	ω_2 (прибл.)
0.9	0.218	1.200	1.750	2.174	2.530	2.842	ω_1 (точн.)
	0.436	3.748	5.220	6.344	7.293	8.130	ω_2 (точн.)
		1.178	1.732	2.159	2.518	2.833	ω_1 (прибл.)
		4.455	5.732	6.836	7.754	8.574	ω_2 (прибл.)
0.99	0.071	3.300	5.089	6.445	7.576	8.565	ω_1 (точн.)
	0.141	11.180	15.847	19.376	22.338	24.946	ω_2 (точн.)
		3.346	5.136	6.445	7.624	8.614	ω_1 (прибл.)
		13.745	17.824	21.116	23.955	26.490	ω_2 (прибл.)

Уравнение (7.132) позволяет получить любую собственную частоту. Например, при $\alpha = 0.4$ и $\theta = 2$ получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 1.019; \omega_2 = 2.644; \omega_3 = 4.995; \omega_4 = 8.103; \omega_5 = 11.972; \omega_6 = 16.620.$$

Уравнение (7.135) позволяет учесть затухание ($D \neq 0$). Например, для параметров $\alpha = 0.8; \theta = 2; D = 0.1$ получены следующие частоты:

$$\omega_1 = -0.0859 + 1.312i; \omega_2 = -0.0807 + 4.192i.$$

Действительная часть частот характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

Если ω_n безразмерная частота (задача (7.120), (7.121)), то частота исходной задачи (7.118), (7.119) находится по формуле:

$$W_n = \frac{\pi(a^2 - v^2)\beta\omega_n}{lv}.$$

Решим задачу (7.118) при граничных условиях вида

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0; u_{xx}(vt, t) = 0; u_{xx}(vt + l, t) = 0$$

с учётом изгибной жёсткости. Схема объекта изучения изображена на рисунке 7.19.

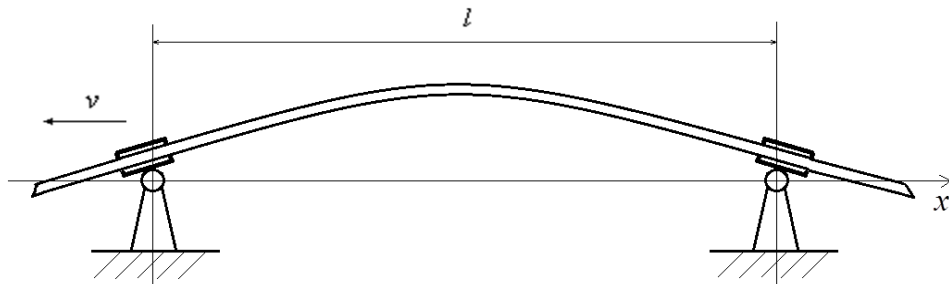


Рис.7.19. Схема объекта

После замены переменных получим задачу (7.120) с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; U_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; U_{\xi\xi}(2\pi, \tau) = 0. \quad (7.136)$$

Для определения $\mu(\xi)$ получим задачу (7.129) с условиями:

$$\mu(0) = 0 ; \mu(2\pi) = 0 ; \mu''(0) = 0 ; \mu''(2\pi) = 0. \quad (7.137)$$

Для решения предполагается использовать дискретное преобразование Фурье. При применении преобразования к задаче (7.129), (7.137) ряд для $\mu''(\xi)$ получается расходящимся. Для улучшения сходимости введем новую функцию:

$$f(\xi) = \mu(\xi) + \frac{\mu_1}{2} \xi - \frac{\mu_1}{2} \xi^3 + \frac{\mu_1}{2} \xi^4 ,$$

где $\mu_1 = \mu'(2\pi) - \mu'(0)$.

Функция $f(\xi)$ удовлетворяет условиям:

$$f(0) = 0 ; f(2\pi) = 0 ; f''(0) = 0 ; f''(2\pi) = 0 ; f'(2\pi) = f'(0).$$

Это улучшает сходимость получаемых далее рядов.

Относительно $f(\xi)$ получим следующую задачу:

$$\begin{aligned} & \beta f^{(IV)}(\xi) - f''(\xi) - i\gamma\omega f'(\xi) - \omega^2 f(\xi) = \\ & = \mu_1 \left(\frac{12\beta}{(2\pi)^3} - \frac{1}{2} i\gamma\omega + \left(\frac{6}{(2\pi)^2} - \frac{\omega^2}{2} \right) \xi + \left(\frac{-6}{(2\pi)^3} + i\gamma\omega \frac{3}{(2\pi)^2} \right) \xi^2 + \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\omega^2}{(2\pi)^2} - \frac{2}{(2\pi)^3} i\gamma\omega \right) \xi^3 - \frac{\omega^2}{2(2\pi)^3} \xi^4 \right) ; \\ & f(0) = 0 ; f(2\pi) = 0 ; f''(0) = 0 ; f''(2\pi) = 0. \end{aligned}$$

В результате применения интегрального преобразования Фурье получим:

$$F(p) = \frac{-\beta f_3 + 0.30396 \frac{\mu_1}{p^4} (-p^2 + (\beta\omega p + \omega^2)(3.28991p^2 + 1))}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2} ; p = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$F(0) = \frac{\beta}{\omega^2} f_3 + 0.30396 \mu_1 \left(12.98788 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.289905}{\omega^2} \right),$$

где $f_3 = f'''(2\pi) - f'''(0)$.

Используя обратное интегральное преобразование, объединяя члены при p и $-p$, с учётом краевых условий (7.137), получим систему двух линейных уравнений относительно μ_1 и f_3 :

$$\mu(2\pi) = \mu(0) = \frac{1}{2\pi} \left(F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} (F(-p) + F(p)) \right) = 0;$$

$$\mu''(2\pi) = \mu''(0) = -\frac{1}{2\pi} \left(F(0) + \sum_{p=1}^{\infty} p^2 (F(-p) + F(p)) \right) = 0.$$

Из равенства нулю определителя системы получается уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2} \right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991 p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^2 (A_p^2 - B_p^2)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p p^2}{A_p^2 - B_p^2} \cdot \left(12.98778 - \frac{\beta}{\omega^2} - \frac{3.28991}{\omega^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-A_p p^2 + (3.28991 p^2 + 1)(A_p \omega^2 + B_p^2)}{p^4 (A_p^2 - B_p^2)} \right) = 0. \quad (7.138)$$

Здесь $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$; $B_p = \gamma \omega p$.

Уравнение (7.138) было решено численно при различных значениях параметров α и θ . Результаты вычислений приведены в таблице 7.11.

Решим задачу (7.120), (7.136) методом Канторовича–Галеркина. Для определения $\mu(\xi)$ получим задачу (7.133) с граничными условиями (7.137).

Функцию $\mu(\xi)$ возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1 \mu_1(\xi) + C_2 \mu_2(\xi),$$

где $\mu_1(\xi) = \sin \frac{\xi}{2}$; $\mu_2(\xi) = \sin \xi$. Данные функции удовлетворяют граничным условиям (7.137) и являются первой и второй собственными функциями задачи (7.120), (7.136) в случае, когда продольное движение каната отсутствует.

Применяя описанную выше методику, получим уравнение собственных частот:

$$\omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(1.0625\beta + 0.36025\gamma^2 + 1.25) + \omega(\lambda(1.0625\beta + 1.25) + 0.72051\gamma\eta) +$$

$$((0.0625\beta + 0.25)(\beta + 1) + 0.36025\eta^2) = 0.$$

Данное уравнение также было решено численно с помощью разработанного программного комплекса «TB–ANALYSIS–7». Результаты вычислений приведены в таблице 7.11. В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты, имеющие погрешность более 5%.

Анализ табличных данных подтверждает вывод о том, что погрешность частот, полученных методом Канторовича–Галеркина, увеличивается с увеличением α и уменьшается с увеличением θ . Погрешность вторых собственных частот больше, чем первых.

Таблица 7.11. Зависимость частоты от скорости продольного движения каната и изгибной жесткости при граничных условиях (7.136)

$\theta \backslash \alpha$	0	2	4	6	8	10	примечания
0	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	ω_1 (точн.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	ω_2 (точн.)
	0.5	0.6124	0.7071	0.7906	0.8660	0.9354	ω_1 (прибл.)
	1	1.7321	2.2361	2.6458	3,0000	3.3166	ω_2 (прибл.)
0.2	0.4899	0.6140	0.7130	0.7993	0.8769	0.9487	ω_1 (точн.)
	0.9798	1.7576	2.2747	2.2747	3.0565	3.3805	ω_2 (точн.)
	0.4815	0.6099	0.7099	0.7968	0.8749	0.9465	ω_1 (прибл.)
	1.0383	1.7753	2.2876	2.7048	3.0657	3.3885	ω_2 (прибл.)
0.4	0.4583	0.6179	0.7304	0.8274	0.9137	0.9913	ω_1 (точн.)
	0.9165	1.8430	2.4056	2.8586	3.2485	3.5968	ω_2 (точн.)
	0.4323	0.6046	0.7214	0.8196	0.9066	0.9857	ω_1 (прибл.)
	1.1565	1.9206	2.4624	2.9055	3.2896	3.6334	ω_2 (прибл.)
0.6	0.4000	0.6334	0.7770	0.8953	1.0001	1.0932	ω_1 (точн.)
	0.8000	2.0419	2.7063	3.2340	3.6870	3.3960	ω_2 (точн.)
	0.3598	0.6052	0.7558	0.8780	0.9842	1.0796	ω_1 (прибл.)
	1.3896	2.2393	2.8513	3.3542	3.7912	4.1829	ω_2 (прибл.)

0.8	0.3000	0.7013	0.9205	1.0942	1.2435	1.3764	ω_1 (точн.)
	0.6000	2.5899	3.5133	4.2350	4.8481	5.3913	ω_2 (точн.)
	0.2584	0.6485	0.8777	1.0576	1.2109	1.3468	ω_1 (прибл.)
	1.9352	3.0485	3.8532	4.5168	5.0948	5.6135	ω_2 (прибл.)
0.99	0.0705	2.1796	3.2835	4.1177	4.8151	5.4242	ω_1 (точн.)
	1.1411	10.3101	14.4443	17.6036	20.2682	22.6175	ω_2 (точн.)
	0.0588	1.9451	3.0599	3.9129	4.6256	5.2487	ω_1 (прибл.)
	8.4981	13.2371	16.6261	19.4233	21.8623	24.0390	ω_2 (прибл.)

Таким образом, проведено исследование поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении, для различных типов граничных условий. Модель учитывает такие параметры, как натяжение каната, его изгибную жесткость, а также сопротивление внешней среды. Решение задачи выполнено как точными, так и приближенными методами с использованием программного комплекса, разработанного в среде MATLAB. Это позволило оценить эффективность применения метода Канторовича–Галеркина для анализа колебательных процессов в системах с движущимися границами. Полученные количественные данные могут быть использованы для расчетов и проектирования широкого спектра технических систем.

7.5.11. Математическая модель продольных колебаний вязкоупругого стержня переменной длины

В настоящее время актуальной является проблема изучения динамических свойств стержней из вязкоупругих материалов [17, 77, 129]. Исследуем резонансные свойства вязкоупругого стержня переменной длины. Поставим задачу следующим образом. Найти решение дифференциального уравнения

$$Z_{tt}(x,t) - a^2[Z_{xx}(x,t) + \mu Z_{xxt}(x,t)] = 0 \quad (7.139)$$

при граничных условиях

$$Z(0, t) = 0; \quad (7.140)$$

$$ES Z_x(l_0(v_0 t), t) = F_0(\omega_0 t). \quad (7.141)$$

В задаче (7.139) – (7.141) обозначено: μ – малый параметр, характеризующий свойство вязкоупругости материала стержня на основе структурной модели Фойгта; $l_0(v_0 t) = L_0 - v_0 t$ – закон движения границы; $F_0(\omega_0 t)$ – функция класса C^1 , характеризующая внешнее возмущение.

Введем в задачу (7.139) – (7.141) безразмерные переменные вида (7.15) и новую функцию $Z(x, t) = \frac{a}{\omega_0} U(\xi, \tau)$.

После преобразований получим:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 U_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.142)$$

$$U(0, \tau) = 0; \quad (7.143)$$

$$U_\xi(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = F(\tau), \quad (7.144)$$

где

$$\varepsilon_1 = \mu\omega_0; \quad l(\varepsilon_0 \tau) = 1 + \varepsilon_0 \tau; \quad \varepsilon_0 = -v_0 / a;$$

$$F(\tau) = \frac{1}{ES} F_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Решим задачу (7.142) – (7.144) приближенным методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галёркина. Введём новую функцию

$$U(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (7.145)$$

где $V(\xi, \tau)$ удовлетворяет уравнению

$$[V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau)]_{\tau\tau} - V_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \varepsilon_1 V_{\xi\xi\tau}(\xi, \tau) = 0 \quad (7.146)$$

и граничным условиям

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi}(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = 0, \quad (7.147)$$

а $H(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи

$$H_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.148)$$

$$H(0, \tau) = 0; \quad (7.149)$$

$$H_{\xi}(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = F(\tau). \quad (7.150)$$

Из уравнения (7.148) и условия (7.149) нетрудно получить, что

$$H(\xi, \tau) = F(\tau)\xi. \quad (7.151)$$

Решение задачи (7.146), (7.147) будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau). \quad (7.152)$$

Здесь $X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau)$ и $\omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau)$ определяются выражениями

$$X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) = \sin(\omega_n(\varepsilon_0 \tau)\xi), \quad (7.153)$$

$$\omega_n(\varepsilon_0 \tau) = \frac{\pi n - \pi / 2}{l(\varepsilon_0 \tau)} \quad (7.154)$$

и представляют собой собственные функции и собственные частоты задачи:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon_0 \tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) = 0; \quad (7.155)$$

$$X_n(0, \varepsilon_0 \tau) = 0; \quad X_{n\xi}(l(\varepsilon_0 \tau), \varepsilon_0 \tau) = 0. \quad (7.156)$$

В исследовании проведен анализ резонансных явлений, возникающих на одной из собственных частот системы. На резонансной частоте амплитуда колебаний значительно возрастает, достигая максимальных значений. В то же время на нерезонансных частотах амплитуда колебаний остается сопоставимой с величиной внешних возмущающих воздействий. При этом нерезонансными членами ряда (7.152) можно пренебречь и рассматривать решение только на одной резонансной моде.

Подставляя n -ный член ряда (7.152) в уравнение (7.146) получим:

$$\begin{aligned} & [f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) + \xi F(\tau)]_{\tau\tau} + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) + \\ & + \varepsilon_1 \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) f_n'(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau) = 0. \end{aligned} \quad (7.157)$$

В этом случае будем иметь:

$$\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} [f_n(\tau)X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) + \xi F(\tau)]_{\tau\tau} X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi +$$

$$+ A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)f_n(\tau) + \varepsilon_1 A_{1n}(\varepsilon_0\tau)\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)f_n'(\tau) = 0, \quad (7.158)$$

где $A_{1n}(\varepsilon_0\tau) = \int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_n^2(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi = \frac{l(\varepsilon_0\tau)}{2}$.

Для того, чтобы избавиться в (7.158) от второй производной функции $F(\tau)$, сделаем замену

$$f_n(\tau) = \mu_n(\tau) + Q_n(\varepsilon_0\tau)F(\tau), \quad (7.159)$$

где

$$Q_n(\varepsilon_0\tau) = -\frac{\int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} \xi X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)} = -\frac{2(-1)^{n+1}l(\varepsilon_0\tau)}{(\pi n - \pi/2)^2}.$$

Тогда уравнение (7.158) с точностью до величин порядка малости ε_0^2 будет иметь вид

$$\mu_n''(\tau) + 2A_n(\varepsilon_0\tau)\mu_n'(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)\mu_n(\tau) = -\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)F(\tau), \quad (7.160)$$

где

$$A_n(\varepsilon_0\tau) = \frac{\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau)}{A_{1n}(\varepsilon_0\tau)} + \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}; \quad (7.161)$$

$$\varepsilon_0 A_{2n}(\varepsilon_0\tau) = \int_0^{l(\varepsilon_0\tau)} X_{n,\tau}(\xi, \varepsilon_0\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) d\xi = -\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{4}. \quad (7.162)$$

Подставляя (7.162) в (7.161), получим

$$A_n(\varepsilon_0\tau) = -\frac{\varepsilon_0 l'(\varepsilon_0\tau)}{2l(\varepsilon_0\tau)} + \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}.$$

Второй член ряда (7.159) слабо влияет на точность (как величина порядка ε_0^2), поэтому вместо (7.152) можно записать [125]:

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau).$$

Введем в уравнение (7.160) новую функцию

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau),$$

где

$$A_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \sqrt{l(\varepsilon_0\tau)} \exp\left[-\int_0^\tau \frac{\varepsilon_1}{2} \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{l^2(\varepsilon_0\zeta)} d\zeta\right].$$

Уравнение (7.160) преобразуется к виду

$$y_n''(\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)y_n(\tau) = -\frac{\omega_{0n}^2(\varepsilon_0\tau)Q_n(\varepsilon_0\tau)}{A_{0n}(\varepsilon_0\tau)}F(\tau). \quad (7.163)$$

Пусть внешнее воздействие на систему носит гармонический характер, т.е. $F(\tau) = B\cos W(\tau)$, где $W(\tau)$ – функция класса C^2 , B – постоянная величина. Рассматриваемая модель может быть использована для описания колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца. В этом случае составляющая $B\cos W(\tau)$ характеризует слабые возмущения гармонического характера, связанные с неоднородностью топлива.

С учетом того, что $l(\varepsilon_0\tau) = 1 + \varepsilon_0\tau$, получим

$$y_n''(\tau) + \frac{(\pi n - \pi/2)^2}{(1 + \varepsilon_0\tau)^2} y_n(\tau) = \frac{2B(-1)^{n+1}}{(1 + \varepsilon_0\tau)^{3/2}} e^{\frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2\tau}{2(1 + \varepsilon_0\tau)}} \cos W(\tau). \quad (7.164)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям раздела 3.1. для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = B^2 E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.165)$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{(1 + \varepsilon_0\tau)^2}{(\pi n - \pi/2)^2} e^{-\frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2\tau}{2(1 + \varepsilon_0\tau)}}; \quad F_n(\tau) = \frac{B(-1)^{n+1}}{l(\varepsilon_0\tau)} e^{\frac{\varepsilon_1(\pi n - \pi/2)^2\tau}{2(1 + \varepsilon_0\tau)}};$$

$$\Phi_n(\tau) = \frac{\pi n - \pi/2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0\tau) - W(\tau).$$

Амплитуда колебаний деформаций для функции $V_\xi(\xi, \tau)$ имеет вид:

$$B_n(\tau) = \frac{1}{B} \omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau) A_n(\tau). \quad (7.166)$$

Величина $B_n(\tau)$ показывает во сколько раз амплитуда колебаний превосходит интенсивность внешнего возмущения B .

С помощью выражения (7.166) были проанализированы резонансные свойства объекта. Амплитуда при установившемся резонансе имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\tau) \int_0^\tau F_n(\zeta) d\zeta.$$

В области, содержащей точку $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\pi n - \frac{\pi}{2} - 1 \right)$, наблюдается явление прохождения через резонанс. Максимально возможная амплитуда определяется по формуле

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

На рисунке 7.20 представлен процесс увеличения амплитуды колебаний в резонансной области на первой динамической моде при $\varepsilon_0 = 0.0001$, $\Omega = 1.6$.

Выражение (7.166) было численно проанализировано на максимум с помощью разработанного программного комплекса.

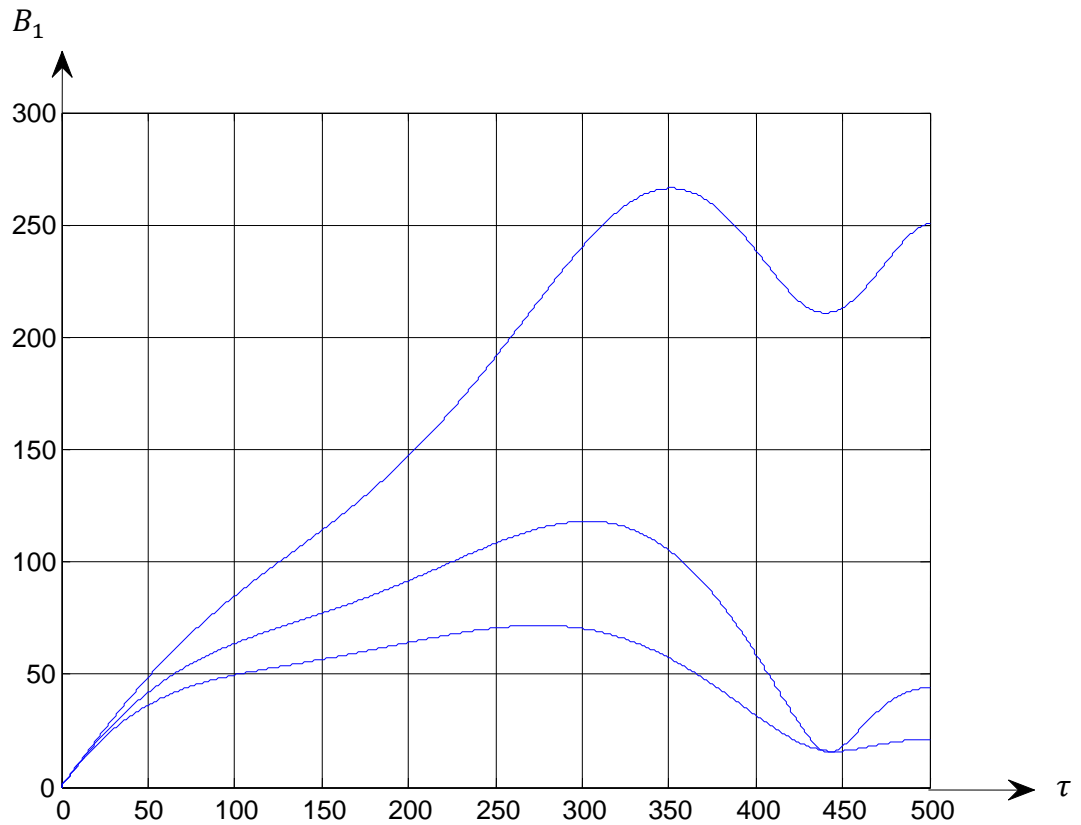


Рис.7.20. Увеличение амплитуды колебаний в резонансной области на первой динамической моде при $\varepsilon_0 = 0.0001$ и различных значениях коэффициента вязкоупругости (сверху вниз: $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 0,005$; $\varepsilon_1 = 0,01$)

На рисунке 7.21 изображена зависимость максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде от ε_0 и ε_1 . Полученные численные результаты были обработаны с помощью метода наименьших квадратов. В результате получены формулы, описывающие зависимость максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой и второй динамической моде от ε_0 и ε_1 :

$$B_1^{max} = \frac{2.7}{\sqrt{\varepsilon_0 + 2.6\varepsilon_1}}; \varepsilon_0 \in (0;0.01); \varepsilon_1 \in (0;0.01); \quad (7.167)$$

$$B_2^{max} = \frac{1.55}{\sqrt{\varepsilon_0 + 16\varepsilon_1}}; \varepsilon_0 \in (0;0.01); \varepsilon_1 \in (0;0.01). \quad (7.168)$$

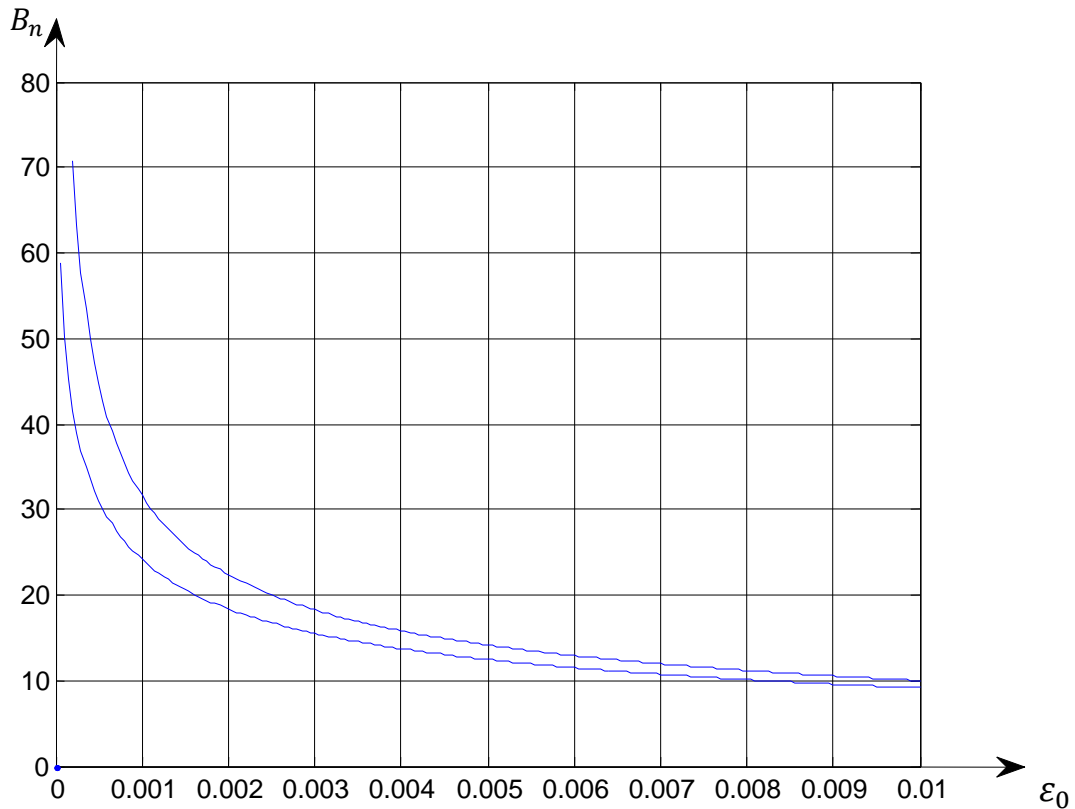


Рис.7.21. Зависимость максимальной амплитуды колебаний при прохождении через резонанс на первой динамической моде при различных значениях коэффициента вязкоупругости (сверху вниз: $\varepsilon_1 = 0$; $\varepsilon_1 = 0,001$)

Относительная погрешность формул (7.167), (7.168) в указанных диапазонах не превосходит 5%.

Решим задачу по описанию продольных колебаний стержня переменной длины (без учета вязкоупругости) при помощи численно–аналитического метода замены переменных в системе функционально–разностных уравнений следуя методике, описанной в разделах 3.6., 3.7. и в работах [13, 123, 125].

Найдем точное решение волнового уравнения

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (7.169)$$

при граничных условиях

$$U(0, \tau) = 0; \quad (7.170)$$

$$U_{\xi}(l(\tau), \tau) = B \cos W(\tau). \quad (7.171)$$

Общее решение уравнения (7.169) имеет вид (3.86).

Подставляя решение (3.86) в граничные условия (7.170), (7.171) нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} g(\tau) + G(\tau) = 0; \\ [g'(\tau + \ell(\tau))] - G'(\tau - \ell(\tau)) = B \cos W(\tau). \end{cases} \quad (7.172)$$

Введем в систему (7.172) новые обозначения $h(z) = g'(z)$; $H(z) = G'(z)$ и новые функции

$$h(z) = r(\varphi(z)); H(z) = R(\psi(z)),$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются из следующей системы функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) = \psi(\tau); \\ \varphi(\tau + \ell(\tau)) = \psi(\tau - \ell(\tau)) + 1. \end{cases} \quad (7.173)$$

Введем, согласно методике раздела 3.6., обозначения в первом уравнении системы (7.173)

$$\varphi(\tau) = \psi(\tau) = z \quad (7.174)$$

и во втором уравнении этой системы

$$\varphi(\tau + \ell(\tau)) = z; \psi(\tau - \ell(\tau)) = z - 1. \quad (7.175)$$

Из (7.174), (7.175) следует, что в первом уравнении системы (7.173)

$$\tau = 0,5(\bar{\varphi}(z) + \bar{\psi}(z)),$$

а во втором уравнении

$$\tau = 0,5(\bar{\varphi}(z) + \bar{\psi}(z-1)),$$

где $\bar{\varphi}(z)$, $\bar{\psi}(z)$ – функции, обратные к $\varphi(z)$ и $\psi(z)$.

С учетом сделанной замены система (7.172) примет вид

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = 0; \\ r(z) - R(z-1) = \theta(z), \end{cases} \quad (7.176)$$

где $\theta(z) = B \cos W(0,5\bar{\varphi}(z) + 0,5\bar{\psi}(z-1))$.

Из первого уравнения системы (7.176) получим:

$$R(z) = -r(z). \quad (7.177)$$

После подстановки (7.177) во второе уравнение системы (7.176) будем иметь:

$$r(z) + r(z-1) = \theta(z). \quad (7.178)$$

Таким образом, задача сведена к решению разностного уравнения (7.178). Используя для решения методику, описанную в [13, 123, 125] и в разделе 3.6., получим:

$$U_\xi(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(\xi, \tau), \quad (7.179)$$

где

$$\begin{aligned} V_n(\xi, \tau) = & \cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} \times \\ & \times \left(\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \cos(k_n \zeta) d\zeta + \right. \\ & \left. + \sin \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\} 4 \int_0^{\psi(\tau - \xi)} \theta(\zeta) \sin(k_n \zeta) d\zeta \right). \end{aligned}$$

Здесь функция $\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\}$ – n -ная динамическая мода системы; $\omega(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) + \psi(\tau - \xi)] \right\}$ – мгновенная собственная частота n -ного собственного колебания; $k_n = \pi(2n - 1)$.

Опуская некоторые математические выкладки, для задачи (7.169) – (7.171) получим следующее выражение для амплитуды напряжений, соответствующих колебаниям на n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = 4B^2 \left\{ \left[\int_0^{b(\tau)} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{b(\tau)} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.180)$$

где $b(\tau) = \psi(\tau - \xi_n(\tau))$, а функция $\xi_n(\tau)$ определяется как ближайший к точке $\xi = 0$ корень уравнения:

$$\cos \left\{ \frac{k_n}{2} [\varphi(\tau + \xi) - \psi(\tau - \xi)] \right\} = \pm 1.$$

В рассматриваемом случае функции φ, ψ, Φ_n имеют вид

$$\varphi(z) = \psi(z) = \frac{\ln[(\varepsilon_0 z + 1)/(1 - \varepsilon_0)]}{\ln[(1 + \varepsilon_0)/(1 - \varepsilon_0)]} - 1; \quad \Phi_n(\zeta) = k_n \zeta - W \left(\frac{1}{\varepsilon_0} \left(\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right)^\zeta - \frac{1}{\varepsilon_0} \right).$$

Явление установившегося резонанса (раздел 6.1.) в рассматриваемой системе наблюдается, если

$$W(\tau) = \frac{k_n \ln(1 + \varepsilon_0 \tau)}{\ln[(1 + \varepsilon_0)/(1 - \varepsilon_0)]} + \gamma,$$

где γ – постоянная величина.

Исследуем колебания стержня под действием нагрузки постоянной частоты. В этом случае $W(\tau) = \tau$. Явление прохождения через резонанс здесь наблюдается в области, содержащей точку ζ_0 , которая определяется по следующей формуле:

$$\zeta_0 = \frac{\ln \left\{ \frac{k_n \varepsilon_0}{\ln[(1 + \varepsilon_0)/(1 - \varepsilon_0)]} \right\}}{\ln[(1 + \varepsilon_0)/(1 - \varepsilon_0)]}.$$

Если амплитуда в начале резонансной области (точка $\zeta_1 = \psi(\tau_1 - \xi_n(\tau_1))$) равна амплитуде возмущающего действия, то амплитуда в конце резонансной области (точка $\zeta_2 = \psi(\tau_2 - \xi_n(\tau_2))$) определяется выражением

$$A_n^2(\zeta_1, \zeta_2) = 4B^2 \left\{ \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.181)$$

Заметим, что точки τ_0, τ_1, τ_2 , соответствующие точкам $\zeta_0, \zeta_1, \zeta_2$, определяются по формуле

$$\tau_i = \frac{1}{\varepsilon_0} \exp \left\{ \zeta_i \ln \left[\frac{1 + \varepsilon_0}{1 - \varepsilon_0} \right] \right\} - \frac{1}{\varepsilon_0}; \quad i = 0, 1, 2.$$

Таким образом, выражения для амплитуд напряжений системы, соответствующих колебаниям на n -ой динамической моде, получены как приближенным (7.165), так и аналитическим (7.180) методами. Результаты численных исследований данных выражений на максимум (при $\varepsilon_1 = 0$) занесем в таблицу 7.12, отображающую зависимость величин A_n, τ_1, τ_2 от

относительной скорости движения границы ε_0 (отношение скорости движения границы к скорости распространения колебаний в стержне) при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах.

Таблица 7.12. Зависимость амплитуды колебаний и времени от относительной скорости ε_0 при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах

	ε_0	0,01	0,10	0,20	0,30	0,40
1 мода	$A_{1\text{точн.}}$	26,9	8,5	6,0	4,9	4,2
	$A_{1\text{прибл.}}$	26,9	8,5	6,1	5,0	4,4
	$\tau_{1\text{точн.}}$	31,4	-1,4	-1,9	-1,7	-1,6
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	31,7	-1,4	-1,7	-1,6	-1,5
	$\tau_{2\text{точн.}}$	85,8	15,9	10,5	8,4	7,2
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	85,5	15,8	10,5	8,5	7,4
2 мода	$A_{2\text{точн.}}$	15,5	4,9	3,4	2,8	2,4
	$A_{2\text{прибл.}}$	15,5	4,9	3,5	2,8	2,5
	$\tau_{1\text{точн.}}$	325,8	23,5	8,7	5,0	2,9
	$\tau_{1\text{прибл.}}$	326,2	23,9	9,6	5,3	3,3
	$\tau_{2\text{точн.}}$	419,7	53,5	31,3	21,8	17,5
	$\tau_{2\text{прибл.}}$	419,3	53,4	30,6	22,5	18,3

Исследуем погрешность приближенного метода применительно к оценке величины вызывающего резонанс внешнего возмущения. Сравним точную и приближенную частоты возмущающего действия, при которых возникает установившийся резонанс:

$$W_{\text{точн.}}(\tau) = \frac{\pi(2n-1) \ln(1 + \varepsilon_0 \tau)}{\ln[(1 + \varepsilon_0) / (1 - \varepsilon_0)]},$$

$$W_{\text{прибл.}}(\tau) = \frac{\pi n - \pi / 2}{\varepsilon_0} \ln(1 + \varepsilon_0 \tau).$$

Относительная погрешность метода построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галеркина определяется выражением

$$R_W = \left| \frac{W_{\text{точн.}}(\tau) - W_{\text{прибл.}}(\tau)}{W_{\text{точн.}}(\tau)} \right| \cdot 100\% = \left| 1 - \frac{\ln[(1 + \varepsilon_0) / (1 - \varepsilon_0)]}{2\varepsilon_0} \right| \cdot 100\%. \quad (7.182)$$

Результаты (7.182) при различных значениях ε_0 совпадают с данными таблицы 3.1. Следовательно, величина R_W также не превосходит 5% при $\varepsilon_0 < 0,37$. При увеличении скорости движения границы погрешность метода увеличивается.

В заключении отметим, что приведенные результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, динамика которых описывается соотношениями (7.139) – (7.141). Рассмотренная модель может быть использована, например, для анализа колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца.

7.5.12. Крутильные колебания стержня переменной длины с учетом действия гармонических возмущений на границе

Дифференциальное уравнение, описывающее крутильные колебания стержня, имеет вид:

$$\Phi_{tt}(x,t) - a^2 \Phi_{xx}(x,t) = 0. \quad (7.183)$$

Граничные условия можно записать следующим образом:

$$\Phi(0,t) = 0; \quad (7.184)$$

$$\Phi(l_0(t),t) = B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (7.185)$$

В задаче (7.183) – (7.185) используются следующие обозначения: $\Phi(x, t)$ – угол поворота сечения стержня с координатой x в момент времени t ; $a^2 = GJ / K$, G – модуль сдвига, J – полярный момент инерции, K – момент инерции единицы длины стержня; $W_0(\omega_0 t)$ – монотонно возрастающая функция класса C^1 .

Введем в поставленную задачу безразмерные переменные вида (7.15) и новую функцию $\Phi(x, t) = B\Theta(\xi, \tau)$.

В результате задача примет вид

$$\Theta_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \Theta_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (7.186)$$

$$\Theta(0, \tau) = 0; \quad (7.187)$$

$$\Theta(l(\tau), \tau) = \cos W(\tau), \quad (7.188)$$

где

$$l(\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = -v_0 / a;$$

$$W(\tau) = W_0(\tau - \gamma_0); \quad \gamma_0 = (a - \omega_0 L_0) / v_0.$$

Для решения задачи (7.186)–(7.188) воспользуемся методом Канторовича–Галеркина (раздел 3.8). Тогда ее решение будет иметь вид:

$$\Theta(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau).$$

Решая задачу:

$$X_{n\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) + \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$X_n(0, \varepsilon\tau) = 0; \quad X_n(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0,$$

получим

$$X_n(\xi, \varepsilon\tau) = \sin \frac{\pi n \xi}{l(\varepsilon\tau)}; \quad \omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{\pi n}{l(\varepsilon\tau)}.$$

Функция $\mu_n(\tau)$ определяется в виде

$$\mu_n(\tau) = A_{0n}(\varepsilon\tau) y_n(\tau),$$

при этом $A_{0n}(\varepsilon\tau) = 1/\sqrt{l(\varepsilon\tau)}$, а $y_n(\tau)$ удовлетворяет следующему уравнению, записанному с точностью до величин порядка ε^2 :

$$y_n''(\tau) + \frac{\pi^2 n^2}{(1 + \varepsilon\tau)^2} y_n(\tau) = M_n(\varepsilon\tau) \cos W(\tau), \quad (7.189)$$

где

$$M_n(\varepsilon\tau) = \frac{-2\pi n(-1)^n}{(1 + \varepsilon\tau)^{3/2}}. \quad (7.190)$$

При применении асимптотического метода, описанного в разделе 3.4., получим следующие формулы для функций $a_n(\varepsilon\tau)$ и $w_n(\tau)$:

$$a_n(\varepsilon\tau) = \sqrt{1 + \varepsilon\tau}; \quad w_n(\tau) = \frac{\pi n}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau). \quad (7.191)$$

После пренебрежения членами порядка малости ε^2 выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, будет иметь вид

$$A_n^2(\tau) = \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.192)$$

где

$$F_n(\varepsilon\zeta) = 1/(1 + \varepsilon\zeta); \quad \Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\tau).$$

Амплитуда в случае установившегося резонанса имеет вид:

$$A_n(\tau) = \frac{1}{\varepsilon} \ln(1 + \varepsilon\tau).$$

Формула для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.193)$$

Прохождение через резонанс начинается не доходя до точки τ_0 ($\tau_1 < \tau_0$) и заканчивается за этой точкой ($\tau_2 > \tau_0$). Сама точка τ_0 определяется по формуле:

$$\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} (\pi n - 1). \quad (7.194)$$

Равенство (7.193) было исследовано на максимум численно при помощи разработанного программного комплекса.

Зависимость максимальной амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах от ε (соответственно графики 1 и 2), показана на рисунке 7.22.

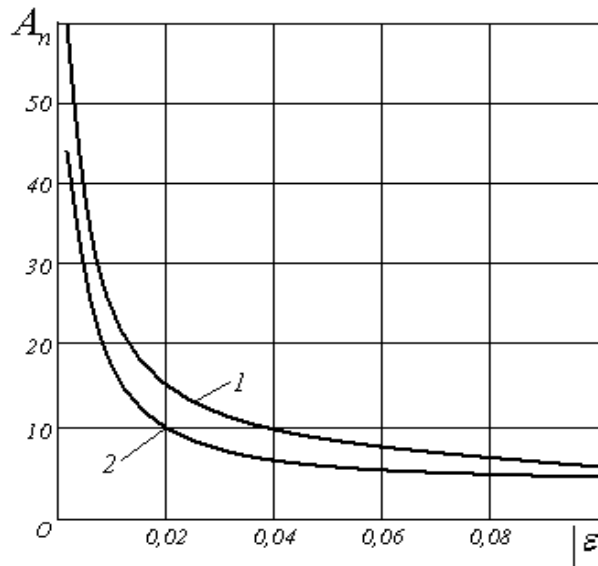


Рис. 7.22. Зависимость максимальной амплитуды колебаний, возникающих при прохождении через резонанс на первой и второй динамических модах от ε

7.5.13. Задача о колебаниях стержня переменной длины при продольном ударе

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня с движущейся границей, где один конец стержня жестко закреплен, а другой, свободный конец, подвергается удару груза. Для случая стержня постоянной длины задача была рассмотрена в работе [85].

Уравнение продольных колебаний однородного стержня имеет вид

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - a^2 U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0. \quad (7.195)$$

Граничные условия

$$U(0, \tau) = 0; \quad (7.196)$$

$$mU_{\tau\tau}(\ell(\tau), \tau) = -a^2 U_{\xi}(\ell(\tau), \tau). \quad (7.197)$$

Начальные условия

$$U(\xi, 0) = 0, \quad \xi \in [0; \ell(0)]; \quad (7.198)$$

$$U_{\tau}(\xi, 0) = \begin{cases} 0, & [0; \ell(0)) \\ -V, & \xi = \ell(0). \end{cases} \quad (7.199)$$

Здесь $m = \frac{M}{\rho S}$; M – масса груза; V – скорость груза в направлении оси стержня; $\ell(\xi)$ – закон движения границы.

Общее решение уравнения (7.195) имеет вид

$$U(\xi, \tau) = \varphi(\tau - \xi) + \psi(\tau + \xi). \quad (7.200)$$

Подставляя решение (7.200) в граничные условия (7.196) – (7.197), нетрудно получить следующую задачу:

$$\begin{cases} \varphi(\tau) + \psi(\tau) = 0; \\ m(\varphi''(\tau - \ell(\tau)) + \psi''(\tau + \ell(\tau))) = \varphi'(\tau - \ell(\tau)) - \psi'(\tau + \ell(\tau)). \end{cases} \quad (7.201)$$

В начальных условиях (7.198) – (7.199) переменная ξ принадлежит отрезку $[0, 1]$, т.к. по предположению $\ell(0)=1$. Подставляя решение (7.200) в начальные условия (7.198) – (7.199), получим:

$$\begin{cases} \varphi(-\xi) + \psi(\xi) = 0; & \xi \in [0; 1]; \\ \varphi'(-\xi) + \psi'(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [0; 1) \\ -V, & \xi = 1. \end{cases} \end{cases} \quad (7.202)$$

Из первого граничного условия (7.201) следует $\varphi(z) = -\psi(z)$. Тогда решение (7.200) имеет вид

$$U(\xi, \tau) = \varphi(\tau - \xi) - \varphi(\tau + \xi). \quad (7.203)$$

Для упрощения задачи введем в систему (7.201) новые функции, согласно методике, описанной в разделе 3.6.:

$$\varphi(z) = r(g(z)); \quad \psi(z) = R(G(z)). \quad (7.204)$$

Тогда решение (7.203) и система уравнений (7.201) примут вид

$$U(\xi, \tau) = r(g(\tau - \xi)) - r(g(\tau + \xi)); \quad (7.205)$$

$$\begin{cases} r(g(\tau)) + R(G(\tau)) = 0; \\ m(r''(g(\tau - \ell(\tau))) + R''(G(\tau + \ell(\tau)))) = r'(g(\tau - \ell(\tau))) - R'(G(\tau + \ell(\tau))). \end{cases} \quad (7.206)$$

Введем обозначения в первом и во втором уравнении системы (7.206) соответственно:

$$\begin{aligned} g(\tau) &= z, \quad G(\tau) = z; \\ g(\tau - \ell(\tau)) &= z, \quad G(\tau + \ell(\tau)) = z - 1. \end{aligned}$$

Граничные условия (7.206) формулируются для движущихся границ, положение которых определяется двумя новыми функциями g и G . Поскольку функции g и G являются произвольными, можно наложить дополнительные требования, чтобы граничные условия были заданы на неподвижных границах, то есть $\ell = \text{const}$ ($\ell > 0$) [38].

Для этого необходимо, чтобы $g(z)$ и $G(z)$ удовлетворяли системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} g(\tau) = G(\tau); \\ g(\tau - \ell(\tau)) = G(\tau + \ell(\tau)) + 1. \end{cases} \quad (7.207)$$

Тогда система (7.206) примет вид

$$\begin{cases} r(z) + R(z) = 0; \\ m(r''(z) + R''(z - 1)) = r'(z) - R'(z - 1). \end{cases} \quad (7.208)$$

Из первого уравнения системы (7.208) получим:

$$R(z) = -r(z). \quad (7.209)$$

Преобразуем начальные условия (7.202)

$$\begin{aligned} r(-z) - r(z) &= 0; \quad z \in [0; 1]; \\ r'(-z) - r'(z) &= \begin{cases} 0, & z \in [0; 1) \\ -V, & z = 1. \end{cases} \end{aligned} \quad (7.210)$$

Из второго уравнения системы (7.210) следует, что

$$r'(z) = 0; \quad z \in (-1; 1).$$

Таким образом, в этом же интервале $r(z)$ – постоянная. Примем

$$r(z) = 0, \quad z \in (-1; 1). \quad (7.211)$$

Определим функцию $r(z)$ вне интервала $(-1;1)$. После подстановки (7.209) во второе уравнение системы (7.208) будем иметь:

$$r''(z) - \frac{1}{m}r'(z) = r''(z-1) + \frac{1}{m}r'(z-1). \quad (7.212)$$

Из (7.211), (7.212) на интервале $z \in (1;2)$ получим

$$r''(z) - \frac{1}{m}r'(z) = 0.$$

Таким образом

$$r'(z) = Ce^{\frac{z}{m}}. \quad (7.213)$$

Второе начальное условие (7.210) при $z = 1$ имеет вид:

$$r'(-1+0) - r'(1+0) = -V$$

или, в силу (7.211),

$$r'(1+0) = V. \quad (7.214)$$

Используя начальное условие (7.214), получим следующее выражение для $r'(z)$:

$$r'(z) = Ve^{\frac{z-1}{m}}, \quad z \in (1;2). \quad (7.215)$$

Функция $r'(z)$ терпит разрыв в точке $z = 1$.

Далее, используя методику, описанную в [85], можно найти $r'(z)$ на интервалах $(2;3)$, $(4;5)$, $(6;7)$...

Функция $r(z)$ определяется интегрированием выражения $r'(z)$ и имеет вид

$$r(z) = mV \left(e^{\frac{z-1}{m}} - 1 \right), \quad 1 < z < 2. \quad (7.216)$$

Из (7.205), (7.211) и (7.216) следует, что на интервале $\tau \in (0;1)$

$$U(\xi, \tau) = -r(g(\tau + \xi)),$$

следовательно, $U(\xi, \tau)$ имеет различные выражения на разных временных интервалах.

Таким образом, применяя численно–аналитический метод замены переменных в системе функционально–разностных уравнений, для заданного временного интервала $\tau \in (0;1)$ удалось построить точное решение задачи, связанной с продольными колебаниями стержня переменной длины в случае, когда свободный движущийся конец стержня подвергается удару груза, перемещающегося вдоль оси стержня. Данная методика, а также подход, описанный в [85], позволяют получить решения для задачи о колебаниях стержня на различных временных промежутках. Рассмотренная модель может быть использована, например, для анализа колебаний стержня твердого топлива, сгорающего с одного конца [22], а также для анализа колебаний бурового инструмента установок ударно–канатного бурения [57].

7.5.14. Вынужденные поперечные колебания вязкоупругой балки переменной длины для различных типов граничных условий

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для вынужденных поперечных колебаний балки переменной длины с учетом вязкоупругости.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, имеет вид:

$$\frac{EI}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + \frac{\mu I}{\rho} U_{xxxx}(x,t) + U_{tt}(x,t) = \omega_0^2 B \cos W_0(\omega_0 t). \quad (7.217)$$

Граничные условия:

$$U(0,t) = 0; U_x(0,t) = 0; \quad (7.218)$$

$$U(l_0(t),t) = 0; U_x(l_0(t),t) = 0. \quad (7.219)$$

Если ввести в задачу (7.217) – (7.219) безразмерные переменные:

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0}{\alpha}} x; \alpha^2 = \frac{EI}{\rho}; \tau = \omega_0 t + \varphi_0; \varphi_0 = \frac{\sqrt{\omega_0 \alpha}}{v_0} - \frac{\omega_0 L_0}{v_0}; U(x,t) = BV(\xi, \tau),$$

то исходная задача примет вид:

$$V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \varepsilon_1 V_{\xi\xi\xi\xi\tau}(\xi, \tau) + V_{\tau\tau}(\xi, \tau) = \varphi(\tau); \quad (7.220)$$

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_\xi(0, \tau) = 0; \quad (7.221)$$

$$V(l(\varepsilon_0\tau), \tau) = 0; \quad V_\xi(l(\varepsilon_0\tau), \tau) = 0, \quad (7.222)$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{\mu}{E} \omega_0; \quad l(\varepsilon_0\tau) = 1 + \varepsilon_0\tau; \quad \varepsilon_0 = -\frac{v_0}{\sqrt{\alpha\omega_0}}; \quad \varphi(\tau) = \cos W(\tau); \quad W(\tau) = W_0(\tau - \varphi_0).$$

Для решения задачи (7.220) – (7.222) воспользуемся методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галеркина (разделы 3.1, 3.8.). Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0\tau). \quad (7.223)$$

Здесь

$$X_n(\xi, \varepsilon_0\tau) = \sin \frac{\pi n \xi}{l(\varepsilon_0\tau)}, \quad (7.224)$$

при этом

$$\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \frac{\pi^2 n^2}{l^2(\varepsilon_0\tau)}. \quad (7.225)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям раздела 3.1., для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде, получим следующее выражение:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^\tau F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}, \quad (7.226)$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{1}{\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau) l(\varepsilon_0\tau)} \exp \left(\frac{\varepsilon_1 \pi^4 n^4}{3\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon_0\tau)^3} - 1 \right) \right);$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad w_n(\tau) = \frac{\pi^2 n^2 \tau}{l(\varepsilon_0\tau)}; \quad a_n(\varepsilon_0\tau) = \frac{l(\varepsilon_0\tau)}{\pi n};$$

$$F_n(\tau) = \frac{(-1)^n}{\pi n A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) a_n(\varepsilon_0 \tau) \omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau)}; A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) = \frac{1}{\sqrt{l(\varepsilon_0 \tau)}} \exp \left[-\frac{1}{2} \varepsilon_1 \int_0^\tau \omega_n^2(\zeta) d\zeta \right].$$

Явление установившегося резонанса в рассматриваемой системе наблюдается если $W(\tau) = \frac{\pi^2 n^2 \tau}{(1 + \varepsilon_0 \tau)}$.

В области, содержащей точку $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\pi n - 1)$ наблюдается явление прохождения через резонанс. Выражение для максимально возможной амплитуды при прохождении через резонанс имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}. \quad (7.227)$$

Решим задачу (7.217) в случае граничных условий вида

$$U(0, t) = 0; \quad U_{xx}(0, t) = 0; \quad (7.228)$$

$$U(l_0(t), t) = 0; \quad U_{xx}(l_0(t), t) = 0. \quad (7.229)$$

Если ввести в задачу (7.217), (7.228), (7.229) безразмерные переменные:

$$U(x, t) = AU(\xi, \tau); \quad \xi = ax; \quad \tau = \omega_0 t; \quad a^4 = \frac{\rho \omega_0^2}{EI}; \quad l(\varepsilon_0 \tau) = \frac{1}{L_0} l_0 \left(\frac{\tau}{\omega_0} \right),$$

то исходная задача примет вид (7.220) с граничными условиями

$$V(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (7.230)$$

$$V(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi}(l(\varepsilon_0 \tau), \tau) = 0, \quad (7.231)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{\nu}{L_0 \omega_0}.$$

Здесь и далее обозначенные функции получены выше, если не указано иное.

Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau). \quad (7.232)$$

В качестве собственных функций $X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau)$ возьмём собственные функции задачи (7.220), (7.230), (7.231) при $\varepsilon_1 = 0$ в виде (7.232).

При этом $X_{n, \xi \xi \xi \xi}(\xi, \varepsilon_0 \tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) X_n(\xi, \varepsilon_0 \tau)$, где $\omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau)$ – собственные частоты задачи, определяемые выражением (7.225).

Следуя методике, описанной в разделе 3.1., получим формулу амплитуды колебаний, соответствующих n -ой динамической моде в виде (7.226), где

$$E_n^2(\varepsilon_0 \tau) = A_{0n}^2(\varepsilon_0 \tau) \cdot a_n^2(\varepsilon_0 \tau);$$

$$F_n(\zeta) = \frac{(-1)^n l(\zeta)}{\pi n A_{0n}(\varepsilon_0 \zeta) A_{1n}(\varepsilon_0 \zeta) a_n(\varepsilon_0 \zeta) \omega_{0n}(\varepsilon_0 \tau)};$$

$$\Phi_n(\zeta) = w(\zeta) - W(\zeta); \quad A_{0n}(\varepsilon_0 \tau) = \frac{1}{\sqrt{l(\varepsilon_0 \tau)}} \exp \left[\frac{\varepsilon_1 \pi^4 n^4}{6 \varepsilon_0} \left(\frac{1}{(1 + \varepsilon_0 \tau)^3} - 1 \right) \right].$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ резонансных свойств систем, колебания в которых описывает задача (7.217) при граничных условиях вида (7.218), (7.219), а также (7.228), (7.229).

7.5.15. Поперечные колебания консоли переменной длины, лежащей на упругом основании

Рассмотрим явление установившегося резонанса и прохождение через резонанс для поперечных колебаний консоли переменной длины на подпружиненной подложке.

Дифференциальное уравнение, описывающее колебания балки, имеет вид [123, 125]:

$$U_{tt}(x, t) + \alpha^2 U_{xxxx}(x, t) + \frac{k_0}{\rho} U(x, t) = 0. \quad (7.233)$$

Граничные условия:

$$U_{xx}(0, t) = 0; \quad U_{xxx}(0, t) = 0; \quad (7.234)$$

$$U(l_0(t), t) = B \cos W_0(\omega_0 t); \quad U_x(l_0(t), t) = 0. \quad (7.235)$$

Если ввести в задачу (7.233) – (7.235) безразмерные переменные вида

$$\xi = \sqrt{\frac{\omega_0}{\alpha}} x; \quad \tau = \omega_0 t + \varphi_0; \quad \varphi_0 = \frac{\sqrt{\omega_0 \alpha}}{v_0} - \frac{\omega_0 L_0}{v_0}; \quad U(x, t) = Bu(\xi, \tau),$$

то исходная задача примет вид:

$$u_{\tau\tau}(\xi, \tau) + u_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \eta u(\xi, \tau) = 0; \quad (7.236)$$

$$u_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad u_{\xi\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (7.237)$$

$$u(l(\varepsilon\tau), \tau) = \cos W(\tau); \quad u_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0, \quad (7.238)$$

где

$$\eta = \frac{k_0}{\rho\omega_0^2}; \quad l(\varepsilon\tau) = 1 + \varepsilon\tau; \quad \varepsilon = -\frac{v_0}{\sqrt{\alpha\omega_0}}; \quad W(\tau) = W_0(\tau - \varphi_0).$$

Для исключения неоднородностей в граничных условиях введем в уравнение (7.236) новую функцию

$$u(\xi, \tau) = V(\xi, \tau) + H(\xi, \tau), \quad (7.239)$$

где

$$H(\xi, \tau) = D_{21}(\xi, \varepsilon\tau) \cos W(\tau), \quad (7.240)$$

при этом функция $D_{21}(\xi, \varepsilon\tau)$ определяются следующим образом:

$$D_{21\xi\xi\xi\xi}(\xi, \varepsilon\tau) = 0;$$

$$D_{21\xi\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0; \quad D_{21}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 1.$$

$$D_{21\xi\xi\xi}(0, \varepsilon\tau) = 0; \quad D_{21\xi}(l(\varepsilon\tau), \varepsilon\tau) = 0.$$

Отсюда

$$D_{21}(\xi, \varepsilon\tau) = 1.$$

Функция $V(\xi, \tau)$ находится как решение следующей задачи:

$$V_{\tau\tau}(\xi, \tau) + V_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) + \eta V(\xi, \tau) = -H_{\tau\tau}(\xi, \tau) - \eta \cos W(\tau); \quad (7.241)$$

$$V_{\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad V_{\xi\xi\xi}(0, \tau) = 0; \quad (7.242)$$

$$V(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0; \quad V_{\xi}(l(\varepsilon\tau), \tau) = 0. \quad (7.243)$$

Для решения задачи (7.241) – (7.243) воспользуемся методом построения решений интегро–дифференциальных уравнений в сочетании с методом Канторовича–Галеркина. Решение будем искать в виде

$$V(\xi, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\tau) X_n(\xi, \varepsilon\tau). \quad (7.244)$$

Выполняя преобразования, аналогичные преобразованиям раздела 3.1. и используя асимптотический метод (раздел 3.4.), получим следующее выражение для амплитуды колебаний, соответствующих n -ной динамической моде:

$$A_n^2(\tau) = E_n^2(\tau) \left\{ \left[\int_0^{\tau} F_n(\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_0^{\tau} F_n(\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\},$$

где

$$E_n^2(\tau) = \frac{0,25}{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l(\varepsilon\tau)}; \quad \Omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) = \omega_{0n}^2(\varepsilon\tau) + \eta; \quad \omega_{0n}(\varepsilon\tau) = \frac{k_n^2}{l^2(\varepsilon\tau)}; \quad k_n = \pi n + \pi/2;$$

$$\Phi_n(\zeta) = w_n(\zeta) - W(\zeta); \quad w_n(\tau) = \int_0^{\tau} \Omega_{0n}(\varepsilon\tau) d\zeta;$$

$$F_n(\tau) = \frac{0,12k_n^3}{\sqrt{\Omega_{0n}(\varepsilon\tau)l^7(\varepsilon\tau)}}.$$

Амплитуда при установившемся резонансе имеет вид

$$A_n(\tau) = E_n(\varepsilon\tau) \int_0^{\tau} F_n(\varepsilon\zeta) d\zeta.$$

В области, содержащей точку $\tau_0 = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{k_n}{\sqrt[4]{1-\eta}} - 1 \right)$ наблюдается явление

прохождения через резонанс. Выражение для максимально возможной амплитуды при этом имеет вид:

$$A_n^2(\tau_1, \tau_2) = E_n^2(\varepsilon\tau_2) \left\{ \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \cos \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 + \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} F_n(\varepsilon\zeta) \sin \Phi_n(\zeta) d\zeta \right]^2 \right\}.$$

В заключении отметим, что приведенные здесь результаты позволяют произвести количественный анализ установившегося резонанса и явления прохождения через резонанс для систем, колебания в которых описывает задача (7.233) – (7.235).

7.6. Выводы по седьмой главе

1. Разработанный в среде MATLAB программный комплекс «ТВ–ANALYSIS–7» представляет собой специализированное программное обеспечение, созданное для моделирования колебательных процессов и анализа резонансных явлений в механических системах с движущимися границами. Ключевая ценность программного комплекса заключается в реализации комбинированного подхода, объединяющего разработанные численно–аналитические, асимптотические и приближённые методы, что позволяет получать высокоточные решения для широкого класса краевых задач с движущимися границами.

2. Программный комплекс детально описан с точки зрения алгоритмической структуры и протестирован, что подтверждает его высокую эффективность в решении поставленных задач.

3. Официальная регистрация программного комплекса в качестве электронного ресурса подтверждает его оригинальность и готовность к практическому применению в научных и инженерных расчетах.

4. Программный комплекс позволяет провести анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, при этом количественные данные могут быть визуализированы в виде графиков и таблиц. Используя разработанный программный комплекс, проведено детальное изучение колебаний и резонансных характеристик пятнадцати механических систем с движущимися границами, которые широко применяются в прикладных задачах: исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании с учетом влияния сил сопротивления среды; математическое моделирование колебаний в передачах с гибкой связью при разгоне; вынужденные поперечные колебания струны переменной длины; математическое моделирование зависимости частоты поперечных колебаний струны от амплитуды; параметрический резонанс нагруженной вязкоупругой нити переменной длины; исследование

продольных колебаний каната с грузом на конце; вычисление собственных частот каната, обладающего изгибной жёсткостью и движущегося в продольном направлении; задача о колебаниях кабеля на участке наложения на него изоляции; вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость; вычисление собственных частот поперечных колебаний каната с учетом сопротивления внешней среды при различных граничных условиях; математическая модель продольных колебаний вязкоупругого стержня переменной длины; крутильные колебания стержня переменной длины с учетом действия гармонических возмущений на границе; задача о колебаниях стержня переменной длины при продольном ударе; вынужденные поперечные колебания вязкоупругой балки переменной длины для различных типов граничных условий; поперечные колебания консоли переменной длины, лежащей на упругом основании.

Заключение

Диссертация является законченной научно–квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований решена научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение для отрасли машиностроения в областях повышения надежности при проектировании широкого круга технических устройств, в которых присутствуют одномерные механические объекты с движущимися границами, заключающаяся в обобщении и развитии фундаментальных приближенных, численно–аналитических и численных методов для решения задач рассматриваемого класса, разработке новых математических моделей, описывающих колебания одномерных объектов переменной длины, и создании не имеющего аналогов алгоритмического и программного обеспечения для анализа резонансных свойств технических объектов с движущимися границами.

1. Анализ научных публикаций показал, что исследования динамики механических систем с подвижными границами, особенно их резонансных характеристик, остаются недостаточно изученными из–за ограниченной применимости существующих методов, которые не учитывают сложные граничные условия, вязкоупругие свойства, жесткостные параметры системы и демпфирующие характеристики. Кроме того, отсутствуют количественные оценки резонансных явлений и строгие математические постановки краевых задач, учитывающие нелинейные деформации, взаимосвязь различных типов колебаний и энергообмен через движущуюся границу.

2. Приведены доказательства эквивалентности формулировок задач динамики объектов переменной длины в дифференциальной и интегро–дифференциальной формах, а также близости решений интегро–дифференциального уравнения колебаний объектов постоянной длины и

соответствующего уравнения колебаний объектов переменной длины. Определено понятие «собственных функций» и «собственных чисел» для краевой задачи в области, ограниченной изменяемыми во времени пределами интегрирования.

3. Проведено обобщение и развитие фундаментальных приближенных и численно–аналитических методов, распространяющее их действие на широкий спектр задач динамики систем с подвижными границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, позволяющих учитывать действие на механическую систему демпфирующих сил, жёсткость основания и жёсткость на изгиб, вязкоупругость объекта, а также слабую нестационарность граничных условий, отличных от условий первого рода. Выполнена оценка погрешности приближенных методов.

4. Построены решения однородных интегро–дифференциальных уравнений описывающих движение объектов переменной длины и систем обыкновенных дифференциальных уравнений с изменяющимися параметрами при помощи асимптотических методов, получены выражения для амплитуд и фаз колебаний.

5. Произведена постановка новых нелинейных краевых задач о колебаниях объектов с движущимися границами в виде математических моделей, позволяющих учитывать большее число факторов, влияющих на динамический процесс. Проведен сравнительный анализ линейных и нелинейных моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами. Выполнено исследование корректности линейной модели.

6. Разработан оригинальный численный метод для решения нелинейных задач, моделирующих продольно–поперечные колебания систем с изменяющимися во времени граничными условиями.

7. Разработаны и теоретически обоснованы алгоритмы приближенного анализа двух ключевых динамических явлений – прохождения через резонанс и установившегося резонанса – для объектов с движущимися границами с

использованием численного метода.

8. Разработан алгоритм получения неравенств, определяющих области, в которых необходимо учитывать подвижность границ и демпфирующие силы при анализе резонансных явлений в механических системах с диссипацией.

9. Создано специализированное программное обеспечение «ТВ–ANALYSIS–7», интегрированное в среду MATLAB и предназначенное для анализа динамического поведения механических систем с подвижными границами посредством реализации разработанных в диссертации численно–аналитических, приближенных и численных методов расчета колебаний и резонансных явлений. Произведена оценка погрешности вычислений.

10. Исследованы колебания и резонансные характеристики пятнадцати механических объектов с движущимися границами, широко распространённых в технике. Используя разработанный программный комплекс проведен анализ новых качественных и количественных свойств разработанных моделей, причём количественные характеристики представлены в виде графиков и таблиц.

11. Полученные в работе теоретические положения и практические результаты использованы в учебном процессе ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» в лекционных курсах, в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» и выпускных квалификационных работах при подготовке диссертаций по направлению 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника», а также в опытно–конструкторской работе ООО «Специальное Конструкторско–Технологическое Бюро «Пластик» и АО «Тяжмаш».

Список литературы

1. Абросимов, Н.А. Нелинейные задачи динамики конструкций [Текст] / Н. А. Абросимов, В. Г. Баженов, А. И. Кибец, А. И. Садырин, Д. Т. Чекмарев // Матем. моделирование. – 2000. – Т. 12. – № 6. – С.47–50.
2. Алиханов, С.В. Схлопывание металлической оболочки под действием магнитного поля [Текст]/ С.В. Алиханов, Г.И. Буднер, Г.Н. Кичилин // Прикладная механика и техническая физика. – 1966. – № 4. – С. 38–41.
3. Андреев, А.А. Граничное управление процессами, описываемыми системами гиперболических уравнений [Текст]/ А. А. Андреев, Е. А. Козлова, С. В. Лексина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1 (30). – 2013. – С. 24–30.
4. Андреев, А.А. Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода [Текст] / А. А. Андреев, С. В. Лексина // Вестник СамГУ – Естественнонаучная серия. – 2008.– № 2(61).– С. 10–21.
5. Анисимов, В.Н. Исследование закономерностей отражения волн от движущихся границ [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2009. – С. 39–43.
6. Анисимов, В.Н. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича–Галеркина [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №1 (18). – 2009. – С. 149–158.
7. Анисимов, В.Н. Анализ влияния движения границ при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного

технического университета. Сер. «Физико–математические науки». №2 (19). – 2009. – С. 147–152.

8. Анисимов, В.Н. Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2009. – 131 с.

9. Анисимов, В.Н. Обоснование граничных условий при взаимодействии струны, обладающей изгибной жесткостью, с роликовой опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов, А.Е. Лукьянов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 5 (21) – 2010. – С. 280–284.

10. Анисимов, В.Н. Применение вариационного принципа Гамильтона для нелинейной постановки задачи о колебаниях балки с движущейся границей [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011.– С. 10–14.

11. Анисимов, В.Н. Резонансные свойства каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью с учетом действия демпфирующих сил [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2011. – С. 15–20.

12. Анисимов, В.Н. Колебания балки переменной длины с учетом действия демпфирующих сил и гармонических возмущений на границе [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Приложение к журналу Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 3 (31) – 2011. – С.14–18.

13. Анисимов, В.Н. Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 3 (28) – 2012. – С. 145–151.

14. Анисимов, В.Н. Резонансная амплитуда колебаний балки переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Третья международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: Материалы конференции под редакцией чл.–корр. РАН И.В. Воловича и д. ф.–м.н., проф. В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2012. – С. 37–38.

15. Анисимов, В.Н. Постановка задачи о колебаниях балки с движущейся подпружиненной опорой [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Технические науки». № 1 (37) – 2013. – С. 93–98.

16. Анисимов, В.Н. Продольные колебания нагруженной вязкоупругой нити переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Общая топология. Проблемы математического образования: тезисы докладов Четвертой международной конференции, посвящённой 90–летию со дня рождения члена–корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л.Д. Кудрявцева. Москва, РУДН, 25–29 марта 2013 г. – М.: РУДН, 2013. – С. 306–308.

17. Анисимов, В.Н. Вынужденные колебания вязкоупругой балки переменной длины [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2013. – С. 17–19.

18. Анисимов, В.Н. Применение метода Галеркина к вычислению собственных частот поперечных колебаний кабеля, обладающего переменной жесткостью [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды девятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2013. – С. 19–24.

19. Анисимов, В.Н. Постановка задач о продольно–поперечных колебаниях объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, И.В. Корпен, В.Л. Литвинов // Четвертая международная конференция «Математическая физика и ее приложения»: материалы конф./ под ред. чл.–корр. РАН И.В. Волевича и д.ф.–м.н., проф. В.П. Радченко.–Самара: СамГТУ, 2014. – С. 56–57.

20. Анисимов, В.Н. Математические модели нелинейных продольно–поперечных колебаний объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Н. Анисимов, В.Л. Литвинов // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия «Физико–математические науки». № 2 (19) – 2015. – С. 382–397.

21. Ануфриев, И. Е. MATLAB 7. Наиболее полное руководство в подлиннике [Текст]/ И. Е. Ануфриев, А.Б. Смирнов, Е.Н. Смирнова. СПб.: БХВ–Петербург, 2005. 1104 с.

22. Асланов, С.К. Теория устойчивости горения твердого топлива как упругого тела [Текст]/ С.К. Асланов // Прикл. механика. – № 2. – 1971.– С. 94–98.

23. Бабаков, И. М. Теория колебаний [Текст]/ И.М. Бабаков. Гостехтеориздат, М., 1958.

24. Баженов, В.Г. Численное моделирование нелинейных задач динамики упругопластических конструкций [Текст]/ В. Г. Баженов, В. К. Ломунов, Д. Т. Чекмарев // Матем. Моделирование. – 2006. – Т. 18. – № 1. – С.10–16.

25. Барсуков, К.А. К теории электромагнитного резонатора с подвижной границей [Текст]/ К.А. Барсуков, Г.А. Григорян // Радиотехника и электроника. – 1976. – Т. 21. – №1. – С. 57–60.
26. Барсуков, К.А. О распространении электромагнитных волн в волноводах с неравномерно движущейся границей [Текст]/ К.А. Барсуков, Г.А. Григорян // Доклады АН Армянской ССР. – 1975. – Т. 61. – №4. – С. 231–235.
27. Белая, Н. М. Канатные лесотранспортные установки [Текст]/ Н.М. Белая, А.Г. Прохоренко. «Лесная промышленность», М., 1964.
28. Белый, В. Д. Динамические усилия в шахтных подъемных канатах [Текст]/ В.Д. Белый. В кн.: Труды Московского НИИ, 9,2. Углетехиздат, М., 1959.
29. Боголюбов, Н.Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний [Текст]/ Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
30. Весницкий, А.И. Неустойчивость крутильных волн в стержнях с подвижными закреплениями [Текст]/ А.И. Весницкий, С.В. Крысов, А.И. Потапов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1978. – №6. – С. 128–136.
31. Весницкий, А.И. Возбуждение колебаний импульсной формы в нити с переменным натяжением и движущимся закреплением [Текст]/ А.И. Весницкий, А.Ф. Ляхов // Прикладная механика. – 1982. – №7. – С. 121–124.
32. Весницкий, А.И. Вынужденные колебания и резонанс в вале с нестационарной нагрузкой [Текст]/ А.И. Весницкий, И.В. Милосердова, А.И. Потапов // Прикладная механика. – 1984. – №9. – С. 103–110.
33. Весницкий, А.И. Волновые явления в одномерных системах с движущимися границами [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз. сб.: Динамика систем. Горьковский ун-т. – 1978. – №3. – С. 38–88.
34. Весницкий, А.И. Качественный метод исследования волновых процессов в системах с изменяющимися во времени размерами [Текст]/ А.И.

Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский ун-т. – 1975. – №7. – С. 79–83.

35. Весницкий, А.И. Переходные процессы в одномерных системах с движущимися границами [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов. // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский университет. – 1982. –№9. – С. 1531–1538.

36. Весницкий, А.И. Поперечные колебания канатов в шахтных подъемниках [Текст]/ А.И. Весницкий, А.И. Потапов // Межвуз.сб.: Динамика систем. Горьковский университет. – 1975. – №7. – С. 84–89.

37. Весницкий, А.И. Частотно–энергетические соотношения для упругих волн в одномерных системах с движущимися объектами [Текст]/ А.И. Весницкий, Е.Е. Лисенкова // Акустический журнал. – 1995. – Т.41. – №2. – С. 209–215.

38. Весницкий, А.И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками [Текст]/ А.И. Весницкий. – М.: Физматлит, 2001. – 320 с.

39. Владимиров, С.А. Колебания круглой пластинки при переменной границе контакта с жестким основанием [Текст]/ С.А. Владимиров, А.В. Стежко // Прикладная механика. – 1971. – Т. 7. – №7. – С. 49–53.

40. Владимиров, С.А. Линеаризация граничных условий динамической системы с переменной зоной контакта [Текст]/ С.А. Владимиров, А.В. Стежко // Сопротивление материалов и теория сооружений: Сб. науч. трудов. – 1971. – В. 15. – С. 98–101.

41. Георгиевская, В. В. Влияние напуска каната на динамические усилия в нем [Текст]/ В.В. Георгиевская // Прикладная механика, 1955, 4; 1956, 2.

42. Глушко, М.Ф. Крутильные колебания шахтных подъемных канатов [Текст]/ М.Ф. Глушко // Изв. вузов, Горный журнал, 1959, 8.

43. Глушко М.Ф. К вопросу о дифференциальных уравнениях статики и динамики подъемных канатов [Текст]/ М.Ф. Глушко. В кн.: Труды Харьковского горного института, 5, 1958.

44. Горбань, В.А. О методе Римана в задачах динамики гибких нитей переменной длины [Текст]/ В.А. Горбань // Математические методы исследования гидродинамических течений: Сб. науч. трудов. – Киев, 1978. – С. 81–88.
45. Горбань, В.А. О колебаниях гибких нитей переменной длины [Текст]/ В.А. Горбань, Н.В. Салтанов // Волны в сплошных средах: Сб. науч. трудов. – Киев, 1978. – С. 92–110.
46. Горбань, В.А. Применение метода Римана к решению некоторых задач динамики гибких нитей в потоках [Текст]/ В.А. Горбань, Н.В. Салтанов // Гидромеханика. – 1977. – №36. – С. 51–58.
47. Горелик, Г.С. Резонансные явления в линейных системах с периодически изменяющимися параметрами [Текст]/ Г.С. Горелик // Журнал технической физики. – 1935. – Т. 5. – В. 7. – С. 501–505.
48. Горошко, О.А. Динамика упругой конструкции в условиях свободного полета [Текст]/ О.А. Горошко // «Наукова думка», К., 1965.
49. Горошко, О.А. Определение критической скорости подъема груза на упруговязкой нити [Текст]/ О.А. Горошко, С.Р. Ильин // Динамика и прочность машин. – Харьков, 1982. – № 5. – С. 9–14.
50. Горошко, О.А. Продольные колебания перематываемой нити в постановке неголономной механики [Текст]/ О.А. Горошко, О.Б. Керимбаева // Динамика систем, несущих подвижную нагрузку. – Харьков, 1982. – №3. – С. 47–54.
51. Горошко, О.А. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины [Текст] О.А. Горошко, Г.Н. Савин. – Киев: Изд-во АН УССР, 1971. – 290 с.
52. Григорян, Г.А. Об электромагнитных процессах в волноводах с равномерно движущейся границей [Текст]/ Г.А. Григорян // Известия Ленингр. электротехн. ин-та. – 1975. – В. 179. – С. 58–61.

53. Григорян, Г.А. Резонаторы и волноводы с движущимися границами: дис. ... канд. физ.-мат. наук [Текст]/ Г.А. Григорян. – Ленинград, 1977.

54. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33. – В. 2. – С. 269–272.

55. Гринберг, Г.А. О решении задач диффузионного типа для расширяющихся или сжимающихся областей, форма которых изменяется во времени без соблюдения подобия [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1969. – Т. 33. – В. 4. – С. 753–756.

56. Гринберг, Г.А. Об одном возможном методе подхода к рассмотрению задач теории теплопроводности, диффузии и им подобных при наличии движущихся границ и о некоторых иных его приложениях [Текст]/ Г.А. Гринберг // Прикладная математика и механика. – 1967. – В. 2. – С. 193–195.

57. Гуляев, В. И. Бифуркации Андронова–Хопфа в волновых моделях торсионных колебаний бурильных колонн [Текст]/ Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Глушакова О. В. // Прикладная механика.– 2010. – № 11.– С. 73–82.

58. Динник, А. Н. Об опасности резонанса в подъемниках с бицилиндро– коническими барабанами [Текст]/ А.Н. Динник // Горный журнал, 1932, 12.

59. Динник, А. Н. О динамических напряжениях в подъемных канатах [Текст]/ А.Н. Динник // Южный инженер, 1916, 11—12.

60. Дукельский, А. И. Подвесные канатные дороги и кабельные краны [Текст]/ А.И. Дукельский. «Машиностроение», М., 1966.

61. Егоров, А.И. Управления колебаниями связанных объектов с распределенными и сосредоточенными параметрами [Текст]/ А. И. Егоров, Л. Н. Знаменская// Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2005. – Т. 45. – №10. –С.1766–1784.

62. Иванов, А.Ф. О законах изменения энергии и импульса для балки с движущимися закреплениями и нагрузками [Текст]/ А.Ф. Иванов, А.И. Потапов, Г.А. Уткин // Прикладная механика. – 1985. – №9. – С. 120–124.

63. Ильин, В.А. Схема оптимизации граничного управления смещениями на двух концах процессом колебаний стержня, состоящего из двух разнородных участков [Текст]/ В. А. Ильин // Докл. РАН, 2011. –Т.441. – №6. – С. 731.

64. Ильин, В.А. Оптимизация граничного управления колебаниями стержня, состоящего из двух разнородных участков [Текст]/ В. А. Ильин // Докл. РАН, 2011. –Т.440. –№2. – С. 159–163.

65. Ильин, В.А. Смешанная задача, описывающая процесс успокоения колебаний стержня, состоящего из двух участков разной плотности и упругости, при условии совпадения времени прохождения волны по каждому из этих участков [Текст]/ В.А. Ильин // Теория функций и дифференциальные уравнения. Сборник статей к 105–летию со дня рождения академика Сергея Михайловича Никольского. Тр. МИАН, 2010. –Т. 269. – С.133–142.

66. Ильин, Р.Ф. О взаимовлиянии частей подъемного каната [Текст]/ Р.Ф. Ильин // ДАН УССР, 1958, 2.

67. Ильин, Р. Ф. О динамике опускающейся и поднимающейся частей подъемного каната [Текст]/ Р.Ф. Ильин // Прикладная механика, 1957, 3.

68. Ишлинский, А. Ю. Об уравнении продольных движений каната (гибкой нити) переменной длины [Текст]/ А.Ю. Ишлинский // ДАН СССР, 1954, 3.

69. Икрамов, М.В. Численное решение основного уравнения колебаний каната переменной длины при помощи ЭВМ [Текст]/ М.В. Икрамов // Распространение упругих и упругопластических волн: Сб. науч. тр. – Ташкент, 1969. – С. 349–354.

70. Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям [Текст]/ Э. Камке. – М.: Наука, 1976. – 576 с.

71. Канторович, Л.В. Приближенные методы высшего анализа [Текст]/ Л.В. Канторович, В.И. Крылов. – М.: Наука, 1962. – 708 с.
72. Карпов, Н.И. Колебания круглого цилиндра, толщина которого изменяется во времени [Текст]/ Н.И. Карпов, Ю.Н. Мыкитюк // Прикладная механика. – 1969. – Т. 5. – №3. – С. 63–66.
73. Качурин, В. К. Гибкие нити с малыми стрелками [Текст]/ В.К. Качурин. Гостехтеориздат, М., 1954.
74. Кечеджиян, Л. О. Об одной задаче математической физики с подвижной границей [Текст] / Л.О. Кечеджиян, Н.А. Пинчук, А.М. Столяр. // Известия вузов. Сев.–Кавк. регион. Естеств. науки, 2008. – № 1. – С. 22–27.
75. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями струны переменной длины [Текст]/ Кобзев Г. К. // Вестн. ИрГТУ.– 2007. – № 1. –С.121–126.
76. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями вязкоупругой струны [Текст]/ Кобзев Г. Труды второй Международной научной конференции, Воронеж. – 2007.– С. 122–124.
77. Кобзев, Г. К. Приближенное решение задачи управления колебаниями вязкоупругой струны. Третья краевая задача [Текст]/ Кобзев Г. К. // Вестн. Тамб. ун–та. Сер. Естеств. и техн. н. – 2007. –С. 466–467.
78. Кожешник, Я. Поперечное колебание напряженных гибких звеньев передач [Текст]/ Я. Кожешник // Теория машин и механизмов: Сб. науч. тр. – М.: Наука, 1976. – С. 170–176.
79. Козлова, Е. А. Задача граничного управления для системы уравнений гиперболического типа [Текст] / Е. А. Козлова // Изв. Саратов. ун–та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2013. – № 1, Ч.2. – С. 51–56.
80. Колосов, Л.В. Исследование совместных продольно–поперечных колебаний шахтного подъемного каната [Текст]/ Л.В. Колосов // Горная электромеханика и автоматика. – 1977. – В. 31. – С. 110–116.

81. Колосов, Л.В. Продольно–поперечные колебания струны каната подъемной установки [Текст]/ Л.В. Колосов // Изв. вузов: Горный журнал. – 1981. – №3. – С. 83–86.
82. Коровин, В.Г. К вопросу минимизации ошибки укладки ленты на поверхности изделия, формируемого методом намотки [Текст]/ В.Г. Коровин, В.Н. Мядзель // Системы управления технологическими процессами: Сборник. – Новочеркасск, 1979. – С. 51–57.
83. Корчинский, В.М. Электромагнитные поля и волны в электродинамических системах с движущимися границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ В.М. Корчинский. – Днепропетровск, 1978. – 180 с.
84. Корн, Г. Справочник по математике [Текст]/ Г. Корн. – М.: Наука, 1973. – 832 с.
85. Кошляков, Н.С. Основные дифференциальные уравнения математической физики [Текст]/ Н.С. Кошляков. Гостехтеориздат, М., 1936.
86. Крылов, Н. М. Введение в нелинейную механику [Текст]/ Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов. Изд–во АН УССР, К., 1937.
87. Кудинов, В.А. Об одном методе получения точного аналитического решения гиперболического уравнения теплопроводности на основе использования ортогональных методов [Текст] / В. А. Кудинов, И. В. Кудинов // Вестн. Сам. гос. техн. ун–та. Сер. Физ.–мат. науки. – № 5(21). – 2010. – С.159–169.
88. Кудинов, В.А. Получение точного аналитического решения гиперболического уравнения колебаний струны с учётом релаксационных свойств материалов. [Текст] / В.А. Кудинов, И.В. Кудинов // Механика твёрдого тела, № 5. – 2014. – С. 63 – 75.
89. Кудинов, В.А. Методы решения параболических и гиперболических уравнений теплопроводности: монография [Текст]/ В.А. Кудинов, И.В. Кудинов. – М.: Книжный дом «Либроком», 2012. –280 с.
90. Кудинов, И.В. Получение приближенного аналитического решения задачи Стефана с удалением расплавляемой среды [Текст] / И.В. Кудинов //

Математическое моделирование и краевые задачи: Труды восьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Часть 2. – Самара: СамГТУ. – 2011. – С. 15–20.

91. Кузьмин, Н.Ю. Колебания днища судоходного шлюза [Текст]/ Н.Ю. Кузьмин Н.Ю., Ю.Э. Сеницкий // Инженерно–строительный журнал. – 2012. – №4(30). – С. 17–24.

92. Культербаев, Х. П. Математическое моделирование колебаний системы: тяжелая нить – сосредоточенная масса [Текст]/ Культербаев Х. П.,Исламова О. В. // Наука, техника и технология XXI века (НТТ–2007) Материалы 3 Международной научно–технической конференции, Нальчик. – 2007. – С. 7–13.

93. Культербаев, Х. П. Математическая модель колебаний тяжелой подвешенной струны с сосредоточенной массой [Текст]/ Культербаев Х. П.,Исламова О. В. // Изв. вузов. Сев.–Кавк. регион. Техн. н. – № 4. – 2007.– С. 41–46.

94. Курант, Р. Уравнения с частными производными [Текст]/ Р. Курант. – М.: Наука, 1964. – 832 с.

95. Курант, Р. Методы математической физики, 1 [Текст]/ Р. Курант, Д. Гильберт. Гостехтеориздат, М., 1933.

96. Курендат, Р.С. Исследование частот собственных колебаний передач с гибкой связью [Текст]/ Р.С. Курендат, А.Л. Пархоменко // Вестник Львовск. политехн. ин–та. – 1978. – №6. – С. 9–12.

97. Курилко, В.И. Об отражении электромагнитных волн от движущейся поверхности [Текст]/ В.И. Курилко // Журнал технической физики. – 1960. – №5. – С. 504–507.

98. Курильская, Н. Ф. Колебания проводящей струны с подвижной нагрузкой в магнитном поле [Текст]/ Н.Ф. Курильская // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. Международный сборник. – № 2.– 2008. –С. 100–114.

99. Ланцош, К. Вариационные принципы механики [Текст]/ К. Ланцош. Физматгиз, М., 1965.
100. Лежнева, А.А. Изгибные колебания балки переменной длины [Текст]/ А.А. Лежнева // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – №1. – С. 159–161.
101. Лежнева, А.А. Свободные изгибные колебания балки переменной длины: Ученые записки [Текст]/ А.А. Лежнева. – Пермь: Пермск. ун–т, 1966. – № 156. – С. 143–150.
102. Лексина, С.В. Задача граничного управления для системы волновых уравнений [Текст]/ А.А. Андреев, С.В. Лексина // Вестник СамГТУ. Серия «Физико–математические науки». – 2008.– № 1(16),– С. 5–10.
103. Лексина, С.В. Система волновых уравнений с граничным управлением первого рода [Текст]/ С.В. Лексина // Тезисы докладов международной конференции по математической физике и ее приложениям. Самара, 2008. – С. 114–115.
104. Литвинов, В.Л. Параметрический резонанс груза на резиновом шнуре [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Второй Всероссийской научной конференции. Ч. 1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2005. – С. 32–34.
105. Литвинов, В.Л. Резонансные свойства каната переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Третьей Всероссийской научной конференции. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций.–Самара: СамГТУ, 2006. – С. 17–19.
106. Литвинов, В.Л. Продольные колебания вязкоупругого каната переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Четвертой Всероссийской научной конференции. Ч.1: Математические модели механики,

прочности и надежности элементов конструкций.–Самара: СамГТУ, 2007. – С. 25–27.

107. Литвинов, В.Л. Учет влияния демпфирующих сил на резонансные свойства струны с движущейся границей [Текст]/ В.Л. Литвинов. В сб.: Научно–техническое творчество: проблемы и перспективы. Сборник статей 3 Всероссийской научно–технической конференции–семинара. – Самара, 2008. – С. 31–36.

108. Литвинов, В.Л. Прохождение через резонанс каната, обладающего изгибной жесткостью [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 33–37.

109. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний вязкоупругого каната, движущегося в продольном направлении и имеющего изгибную жесткость [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Пятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2008. – С. 38–42.

110. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания и явление установившегося резонанса каната переменной длины, обладающего изгибной жесткостью [Текст]/ В.Л. Литвинов // Современные методы теории краевых задач: Материалы Воронежской весенней математической школы «Понтрягинские чтения – XX». – Воронеж: ВГУ, 2009. – С. 109–110.

111. Литвинов, В.Л. Исследование зависимости частоты поперечных колебаний струны от амплитуды [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов, А.Е. Лукьянов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием.

Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 24–27.

112. Литвинов, В.Л. Обоснование граничных условий при взаимодействии струны с роликовой опорой [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов, А.Е. Лукьянов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2010. – С. 27–32.

113. Литвинов, В.Л. Крутильные колебания стержня переменной длины с учетом действия гармонических возмущений на границе [Текст]/ В.Л. Литвинов // XX Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 10–12 апреля 2012 г.: сборник материалов. – Ч. 2. – СПб., 2012. – С. 194–197.

114. Литвинов, В.Л. Свидетельство о регистрации электронного ресурса «Автоматизированный исследовательский комплекс «ТВ–ANALISYS» [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов, Н.С. Яшагин. ОФЭРНиО № 19517 от 26.09.2013 г. и ФГАНУ ЦИТиС № 130912114653 от 30.09.2013 г.

115. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 15, № 3. 2013. – С. 112–119.

116. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование. Т.9 №1 (2), 2013. – С. 85–92.

117. Литвинов, В.Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Средневолжского математического общества. Т. 16, № 1. 2014. – С. 83–88.

118. Литвинов, В.Л. Решение функционального уравнения для систем с медленно движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов // Международная конференция «Функциональные пространства и теория приближения функций» посвященная 110-летию со дня рождения академика С.М. Никольского (25–29 мая 2015 г., МИАН, г.Москва): Тезисы докладов – М.: МИАН, 2015. – С. 169–170.

119. Литвинов, В.Л. Исследование резонансных свойств струны переменной длины, лежащей на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник научно–технического развития. № 11 (99), 2015. – С. 38–43.

120. Литвинов, В.Л. Расчет колебаний стержня переменной длины приближенным и аналитическим методами [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды десятой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2016. С. 14–19.

121. Литвинов, В.Л. Исследование корректности описания колебаний объектов с движущимися границами волновым уравнением [Текст]/ В.Л. Литвинов // Труды X Всероссийской научной конференции «Нелинейные колебания механических систем» (Нижний Новгород, 26–29 сентября 2016 г.) / Нижний Новгород: Издательский дом «Наш дом», 2016. – 867 с.

122. Литвинов, В.Л. Точное и приближенное решения задачи о вынужденных колебаниях струны переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник научно–технического развития. № 11 (111), 2016. – С.10–18.

123. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование колебаний механических систем с движущимися границами: дис. ... канд. техн. наук: 05.13.18: защищена 01.07.16: утв. 12.12.16 [Текст]/ В.Л. Литвинов. — М., 2016. — 158 с.

124. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича–Галеркина при исследовании резонансных свойств систем с демпфированием [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 2 (114), 2017. – С. 37–46.

125. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами: монография [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. – Самара: Самар. гос. техн. ун–т, 2017. – 149 с.

126. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средневолжского математического общества. — 2017. — Т. 19, № 1. — С. 130–139.

127. Литвинов, В.Л. Сравнительный анализ линейной и нелинейной моделей, описывающих колебания систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Материалы X Всероссийской конференции по механике деформируемого твердого тела (18 – 22 сентября 2017 г., Самара, Россия): в 2–х томах. Т.1. / под ред. Н.Ф. Морозова, А.В. Манжирова, В.П. Радченко. – Самара: СамГТУ, 2017. – С.35–39.

128. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19. № 4. – С.161–165.

129. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания вязкоупругой балки переменной длины на упругом основании с учетом действия сил сопротивления среды [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Вестник научно–технического развития. № 3 (115), 2017. – С. 15–21.

130. Литвинов, В.Л. Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 9 (121), 2017. – С. 46–57.

131. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. №2. С. 70–77.

132. Литвинов, В.Л. Вычисление собственных частот поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средневолжского математического общества. — 2019. — Т. 21, № 1. — С. 70–77.

133. Литвинов, В.Л. Применение метода Дюамеля и метода Канторовича–Галеркина для описания колебаний механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно–технического развития. № 1 (137), 2019. – С. 14–22.

134. Литвинов, В.Л. Исследование поперечных колебаний кабеля на участке наложения на него изоляции [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. В сб.: Математическое моделирование и краевые задачи: Труды одиннадцатой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч.1: Математические модели механики, прочности и надежности элементов конструкций. – Самара: СамГТУ, 2019. С. 201–207.

135. Литвинов, В.Л. Нелинейные математические модели продольно–поперечных колебаний одномерных механических объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов. В сб.: Современные проблемы математики и механики. Материалы международной конференции, посвященной 80–летию академика РАН В. А. Садовниченко, (Москва, 12–16 мая 2019 г.), М.: МАКС Пресс, 2019. С. 739–742.

136. Литвинов, В.Л. Решение модельных краевых задач о колебаниях механических систем с движущимися границами методом Дюамеля [Текст]/ В.Л. Литвинов. IV Международная конференция «Суперкомпьютерные технологии математического моделирования» (СКТеММ19), МИАН, Москва, 19–21 июня 2019. – С.28–29.

137. Литвинов, В.Л. Solution of model boundary value problems on oscillations of mechanical systems with moving boundaries by the Duhamel method [Текст]/ В.Л. Литвинов // Journal of Physics: Conference Series, 2019, № 1392 012015.

138. Литвинов, В.Л. Исследование продольных колебаний каната грузоподъемной установки [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Актуальные проблемы математики и информационных технологий. Материалы I Всероссийской конференции (г. Махачкала, 3–5 февраля 2020 г.). – Махачкала: Издательство ДГУ, 2020. – С.107–112.

139. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с изменяющейся границей: монография [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. СамГТУ, Самара, 2020. 118 с.

140. Литвинов, В.Л. Задача о продольном ударе груза по стержню с движущейся границей [Текст]/ В.Л. Литвинов // Вестник научно-технического развития, 2020, № 4(152). – С. 20–25.

141. Литвинов, В.Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи приближенного метода построения решений интегро-дифференциальных уравнений [Текст]/ В.Л. Литвинов // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН, 26:2 (2020). – С.188–199.

142. Литвинов, В.Л. Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов // Журнал Средне-Волжского математического общества, 22:2 (2020). – С. 188–199.

143. Литвинов, В.Л. Свободные продольные колебания стержня переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, А.А. Чабанюк. Молодежная наука: вызовы и перспективы: [Электронный ресурс]: Материалы III Всероссийской научно-практической конференции, СамГТУ, 2020. – С.160–165.

144. Литвинов, В.Л. Применение вариационного принципа Гамильтона для постановки задачи о продольных колебаниях конического стержня

переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, С.А. Галактионов. Молодежная наука: вызовы и перспективы: [Электронный ресурс]: Материалы III Всероссийской научно–практической конференции, СамГТУ, 2020. – С.155–159.

145. Литвинов, В.Л. Исследование продольных колебаний каната грузоподъемной установки [Текст]/ В.Л. Литвинов. Материалы Международного молодежного научного форума «ЛОМОНОСОВ–2020», секция Математика и механика, подсекция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление» [Электронный ресурс] / Отв.ред. И.А. Алешковский, А.В. Андриянов, Е.А. Антипов. – Электрон. текстовые дан. (1500 Мб.) – М.: МАКС Пресс, 2020. –С.163–167.

146. Литвинов, В.Л. Вынужденные колебания струны с подвижными границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, А.А. Чабанюк // Научный поиск, № 3, 2020. – С.70–75.

147. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование колебаний неограниченной струны с движущейся границей в нелинейной постановке [Текст]/ В.Л. Литвинов. XXII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 22 – 26 марта 2021г. Тезисы докладов /ПФИЦ УрО РАН. – Электронные данные. – Пермь, 2021. – С.198–199.

148. Litvinov, V. L. Investigations of oscillations rope of capacity plants / V. L. Litvinov, A.V. Tarakanov. Proceedings of the 6th International Conference on Industrial Engineering (ICIE 2020). ICIE 2021. Volume I. Lecture Notes in Mechanical Engineering. Springer, Cham., 2021.

149. Литвинов, В.Л. Нелинейная математическая модель продольно–поперечных колебаний струны с движущейся границей [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского. Т.60 // Материалы Международной конференции по алгебре, анализу и геометрии 2021. – Казань: Изд–во Академии наук РТ, 2021.– С.242–244.

150. Литвинов, В.Л. Нелинейные математические модели продольно–поперечных колебаний одномерных механических объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов. Технологии разработки и отладки сложных технических систем. Сборник материалов VII Всероссийской научно–практической конференции. Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана, Центр инженерных технологий и моделирования Экспонента. Москва, 2020. 2021. – С. 277–291.

151. Литвинов, В.Л. Nonlinear mathematical modeling oscillations of a rope with a moving boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Всероссийская научная конференция (с международным участием) «Математика и математическое моделирование», Самара, Россия, НИУ СамГУ, 10–12 ноября 2021г.: тезисы докладов. – Самара: Самара, 2021. –С.97–98.

152. Литвинов, В.Л. Mathematical modeling of nonlinear vibrations of a rope with a moving boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы : сборник материалов международной конференции, Белгород, 25–29 октября 2021 г. / под ред. В.Б. Васильева, И.С. Ломова. – Белгород: ИД «БелГУ» НИУ «БелГУ», 2021. –С.297–298.

153. Литвинов, В.Л. Нелинейная математическая модель продольно–поперечных колебаний струны с движущейся границей [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. VI Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики» (В&НАК 2021) (5–9 декабря 2021 г., Кабардино–Балкарская Республика, Нальчик — Эльбрус). 2021. –С.122–123.

154. Литвинов, В.Л. Solution of boundary value problems with moving boundaries by using an approximate method for constructing solutions of integro – differential equations [Текст]/ В.Л. Литвинов, А.В. Тараканов // Journal of Physics: Conference Series, 2131 022080 (2021).

155. Литвинов, В.Л. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами в разработанном программном комплексе ТВ-

Analysys [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ–образование». 2021. Т. 17, № 2.

156. Литвинов, В.Л. Численная схема решения задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : межвуз. сб. науч. тр. / отв. ред. С. С. Мамонов. – Вып. 3. – Рязань: Ряз. гос. ун–т имени С. А. Есенина, 2022. –С.15–20.

157. Литвинов, В.Л. Numerical Study of Longitudinal–Transverse Vibrations of Objects with a Moving Boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, В.Н. Анисимов. Mathematics and its Applications in New Computer Systems. MANCS 2021. Lecture Notes in Networks and Systems, vol 424. Springer, Cham., 2022. Pp. 59–69.

158. Литвинов, В.Л. Research of transverse rope oscillations moving in the longitudinal direction [Текст]/ В.Л. Литвинов. AIP Conference Proceedings 2383, 020004 (2022).

159. Литвинов, В.Л. Приближенный метод решения краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегродифференциальным уравнениям [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Журнал вычислительной математики и математической физики, 62:6 (2022), –С.977–986.

160. Литвинов, В.Л. Исследование влияния движения границ на колебательные и резонансные свойства механических систем переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов, А.Л. Семенов, М.В. Шамолин// Computational Mathematics and Information Technologies. 2025; 9(2):34-43.

161. Литвинов, В.Л. Application of the Kantorovich–Galerkin method for the analysis of resonant systems [Текст]/ В.Л. Литвинов. Дифференциальные уравнения и оптимальное управление: Материалы Международной конференции, посвященной 100–летию со дня рождения академика Евгения

Фроловича Мищенко, Москва, 7–9 июня 2022 г. / Отв. ред. К.О. Бесов. — М.: Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, 2022. (МИАН, Москва), 2022. —С.86–87.

162. Литвинов, В.Л. Mathematical modeling of string vibrations with a movable boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. V Международная конференция Суперкомпьютерные технологии математического моделирования, 27 – 30 июня, Москва, Россия, 2022. —С.21–22.

163. Литвинов, В.Л. Резонансная амплитуда нелинейных колебаний балки с движущейся границей [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Теория оптимального управления и приложения (ОСТА 2022) : материалы Международной конференции, (Екатеринбург, 27 июня–1 июля 2022 г.); — Екатеринбург : ИММ УрО РАН, ООО «Издательство УМЦ УПИ», 2022.— С.144–147.

164. Litvinov, V. L. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reduction to integro–differential equations / V. L. Litvinov, K. V. Litvinova // Comput. Math. Math. Phys., 62:6 (2022), 945–954.

165. Литвинов, В.Л. Nonlinear mathematical models of longitudinal and transversal oscillations of one–dimensional mechanical objects with moving boundaries [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Неклассические уравнения математической физики и их приложения. Международная научная конференция, 6 – 8 октября 2022 года. – Ташкент. “Университет”, 2022. —С.46–47.

166. Литвинов, В.Л. Поперечные колебания консоли с движущейся границей, лежащей на упругом основании [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Тезисы Конференции–конкурса молодых учёных Научно–исследовательского института механики МГУ имени М.В. Ломоносова, 19–20 октября 2022 года., 2022. —С.15–16.

167. Литвинов, В.Л. Стохастические продольные колебания вязкоупругого каната с движущимися границами с учетом действия

демпфирующих сил [Текст]/ В.Л. Литвинов // Теория вероятностей и ее применения, 67, № 4, 2022. –С.835–836

168. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование и исследование явлений резонанса в механических системах переменной длины [Текст]/ В.Л. Литвинов. Вторая конференция Математических центров России (7–11 ноября 2022г.): сборник тезисов.– Москва: Издательство Московского университета, 2022. Секция «Прикладная математика и математическое моделирование», 2022. –С.144–147.

169. Литвинов, В.Л. Численная схема решения задач, описывающих продольно–поперечные колебания объектов с движущимися границами в разработанном программном комплексе ТВ–Analysis [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Международный научный журнал «Современные информационные технологии и ИТ– образование». 2022. Т. 18, № 3.

170. Литвинов, В.Л. Application of the Kantorovich–Galerkin method for analysis of resonant systems [Текст]/ В.Л. Литвинов. Всероссийская научно–техническая конференция по строительной механике корабля «БУБНОВСКИЕ ЧТЕНИЯ – 2022», посвященная 150–летию создателя СМК, генерал–майора корпуса корабельных инженеров, профессора И.Г. Бубнова, Санкт–Петербург, 2022 г., 2022.–С.48–51.

171. Литвинов, В.Л. Применение приближенного метода Канторовича–Галеркина для анализа колебаний механических систем с подвижными границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. XXIII Зимняя школа по механике сплошных сред Пермь, 13 – 17 февраля 2023г. Тезисы докладов. – Пермь: ПФИЦ УрО РАН, 2023г., 2023. –С.199–201.

172. Литвинов, В.Л. Вариационная постановка задачи о колебаниях балки с подвижной подпружиненной опорой [Текст]/ В.Л. Литвинов // Журнал Теоретическая и математическая физика. –2023. –Т.215.–№2.–С. 289–296.

173. Литвинов, В.Л. Mathematical modeling of oscillations of mechanical systems with moving boundaries [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. II

Международный семинар «Вычислительные технологии и прикладная математика» (ВТПМ – 2023), 12–16 июня 2023 г., г. Благовещенск, 2023.

174. Литвинов, В.Л. Mathematical modeling of stochastic vibrations of a string with moving border [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. III Международная конференция «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ», посвященная 100-летию В.С. Владимирова, 100-летию Л.Д. Кудрявцева и 85-летию О.Г. Смолянова (5–13 июля 2023 г., Московская область, г. Долгопрудный), 2023. –С.124–126.

175. Литвинов, В.Л. Variational statement of the problem of vibrations of a beam with a moving boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании [Электронный ресурс]: Сборник материалов XVI Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (Саранск, 17–20 августа 2023 г.) /редкол.: В.Ф. Тишкин (отв. ред.) [и др.]. – Саранск: СВМО, 2023.–С.283–286.

176. Литвинов, В.Л. Стохастические продольные колебания вязкоупругого каната с подвижными границами с учетом демпфирующих сил [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт–Петербург, 21–25 августа 2023 года. 2023. –С.315–317.

177. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича – Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. XIII Всероссийский съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт–Петербург, 21–25 августа 2023 года. 2023. –С.318–320.

178. Литвинов, В.Л. Применение дискретного преобразования Фурье для вычисления частот поперечных колебаний каната, движущегося в продольном направлении [Текст]/ В.Л. Литвинов // Проблемы механики, журнал АН РУз, 2023, № 3, с.28–35.

179. Литвинов, В.Л. Stochastic longitudinal oscillations viscoelastic rope with moving boundaries, taking into account damping forces [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Всероссийская конференция по математике и механике. Посвящается 145-летию Томского государственного университета и 75-летию механико-математического факультета: 2– 5 октября, 2023 г., г. Томск: сборник материалов конференции. – Томск: STT, 2023. –С.114–117.

180. Литвинов, В.Л. Резонансные свойства одномерных механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Третья конференция Математических центров России (РНОМЦ «Кавказский математический центр Адыгейского государственного университета» в г. Майкоп, Республика Адыгея), 2023. –С.87–89.

181. Литвинов, В.Л. Exact solution of the problem on forced vibrations of a string of variable length [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Differential and Difference Equations. Russian–Chinese Conference (Novosibirsk, Russia, November 2–6, 2023): Abstracts / G. V. Demidenko (editor–in–chief). Novosibirsk: Novosibirsk State University, 2023, 89–90.

182. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича–Галёркина к задаче о продольных колебаниях каната грузоподъемной установки [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Всероссийская научно-техническая конференция по строительной механике корабля «Памяти академиков-кораблестроителей», посвященная 160-летию академика А.Н. Крылова и 140-летию академика Ю.А. Шиманского, Санкт-Петербург, 20–21 декабря 2023 г., 2023. –С.62–63.

183. Литвинов, В.Л. An approximate method for solving boundary value problems with moving boundaries by reducing to integrodifferential equations [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // AIP Conference Proceedings, 2023, 2833(1), 020030.

184. Литвинов, В.Л. On One Solution of the Problem of Vibrations of Mechanical Systems with Moving Boundaries/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова, А.В. Тараканов. 7th International Conference on Information, Control, and

Communication Technologies (ICCT), Astrakhan, Russian Federation, 2023, Publisher: IEEE.

185. Литвинов, В.Л. Application of the Kantorovich–Galerkin Method to the Problem of Longitudinal Vibrational Rope with Moving Boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Международная конференция, посвященная памяти академика А.В. Кряжимского «Системный анализ: моделирование и управление», Россия, Москва, Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, Московский центр фундаментальной и прикладной математики, 23–24 января 2024 года, 2024. –С.19–21.

186. Литвинов, В.Л. Vibrations of a console with a moving boundary laying on an elastic base [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Современные методы теории краевых задач. Понтрягинские чтения — XXXV : материалы Международной Воронежской весенней математической школы (26 – 30 апреля 2024 г.) / Воронежский государственный университет ; Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова ; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН ; НОМЦ СОГУ им. К. Л. Хетагурова; АО «Концерн «Созвездие». — Воронеж : Издательский дом ВГУ, 2024. –С.399–401.

187. Литвинов, В.Л. On one solution of the vibration problem of mechanical systems with moving boundaries [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Вестник Самарского университета. Естественнаучная серия, 30:1 (2024), с.40–49.

188. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича–Галеркина для анализа явлений резонанса в механических системах с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Международная конференция «Математика в созвездии наук». К юбилею ректора МГУ академика Виктора Антоновича Садовниченко: Тезисы докладов / Орг. комитет: В. А. Садовничий, А. И. Шафаревич, И. А. Соколов [и др.]. — Москва :

Издательство Московского университета, 2024 (Москва), МГУ, 2024. –С.414–415.

189. Литвинов, В.Л. Об одном обратном методе решения задач о колебаниях механических систем с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Вестник Московского Университета. Серия 1: Математика. Механика, 2024, № 3, с.53–59.

190. Литвинов, В.Л. Statement of the problem on vibrations of a beam with a moving spring support [Текст]/ В.Л. Литвинов. AIP Conference Proceedings, 3119, 050004 (2024), 2024, 050004.

191. Литвинов, В.Л. Математическое моделирование колебаний и решение краевых задач с подвижными границами путем сведения к интегро–дифференциальным уравнениям [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. IV Конференция математических центров России, 6–11 августа Санкт–Петербург 2024.

192. Литвинов, В.Л. Application of the Kantorovich –Galerkin method to the problem of vibrations of mechanical objects of variable length [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // 33rd St.Petersburg Summer Meeting in Mathematical Analysis (12–17 августа 2024 г., Международный математический институт им. Л. Эйлера, г. Санкт–Петербург), 2024. –С.15–17.

193. Литвинов, В.Л. Resonance properties of a beam with a moving boundary lying on an elastic foundation [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Всероссийская конференция «Математическое моделирование в механике», посвящённая 50–летию ИВМ СО РАН. – Электронные данные. – Красноярск : ИВМ СО РАН, 2024. – 20 Мб, 2024. –С.246–247.

194. Литвинов, В.Л. Mathematical modeling of stochastic oscillations of a viscoelastic rope with a moving boundary [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова. Материалы XII Всероссийской научной конференции с международным участием «Математическое моделирование и краевые задачи» (ММиКЗ, 17–19 сентября 2024 г., Самара, Россия), 2024. –С.201–201.

195. Литвинов, В.Л. Применение метода Канторовича–Галеркина для анализа резонансных характеристик систем с затуханием [Текст]/ В.Л. Литвинов, К.В. Литвинова // Теоретическая и математическая физика. –2025. –Т.224.–№1.–С. 95–104.

196. Литвинов, В.Л. Об одном асимптотическом методе решений однородных интегро–дифференциальных уравнений, описывающих колебания объектов с движущимися границами [Текст]/ В.Л. Литвинов, М.В. Шамолин // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2025. – Т. 28. – № 2. – С. 39–54.

197. Литвинов, В.Л. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ. Автоматизированный программный комплекс для исследования колебаний и резонансных явлений в механических системах с движущимися границами «ТВ–Analysis–7» [Текст]/ В.Л. Литвинов. № 2025613649, опубли. 13.02.2025 (Рос. Федерация).

198. Локшин, А. С. О динамических напряжениях в подъемных канатах [Текст]/ А.С. Лошкин.— Горный журнал, Приложение, 1929, 12.

199. Мангова, В.Н. О поперечных колебаниях стержня с движущимся жестким закреплением [Текст]/ В.Н. Мангова // Прикладная механика. – 1981. – №12. – С. 126–129.

200. Минаков, А. П. Основы механики нити [Текст]/ А.П. Минаков. — В кн.: Научно–исследовательские труды Московского текстильного института, 9, 1. Гизлегпром, М., 1941.

201. Митропольский, Ю.А. Проблемы асимптотической теории нестационарных колебаний [Текст]/ Ю.А. Митропольский. – М.: Наука. – 1964. – 432 с.

202. Митропольский, Ю.А. Нестационарные процессы в нелинейных колебательных системах [Текст]/ Ю.А. Митропольский. Изд–во АН УССР, К., 1955.

203. Митропольский, Ю.А. Исследование колебаний в системах с распределенными параметрами [Текст]/ Ю.А. Митропольский, Б.И. Мосеенков. Изд-во Киевского ун-та, К., 1961.

204. Михлин, С.Г. Интегральные уравнения [Текст]/ С.Г. Михлин. Гостехтеориздат, М., 1949.

205. Мовсисян, Л. А. Колебания балки с периодически изменяющейся длиной [Текст]/ Л.А. Мовсисян.—ДАН АрмССР, 1965, 41, 1.

206. Мовсисян, Л.А. Колебания полубесконечной балки с перемещающимся концом [Текст]/ Л.А. Мовсисян.— Механика твердого тела, 1966, 1.

207. Моисеев, Е.И. Оптимальное граничное управление смещением на одном конце струны при заданной упругой силе на другом конце [Текст]/ Е. И. Моисеев, А. А. Холомеева // Труды Института математики и механики УрО РАН. – Т.17.–№2. – 2011. – С.151–158.

208. Мосеенков, Б. И. О построении формальных решений для квази-волнового уравнения с нелинейными краевыми условиями и о возможности применения асимптотических методов Крылова — Боголюбова для исследования одночастотных колебаний [Текст]/ Б.И. Мосеенков. Изд. Ин-та математики АН УССР, К., 1964.

209. Мосеенков, Б. И. Об алгоритмической возможности построения формальных решений некоторых нелинейных смешанных краевых задач [Текст]/ Б.И. Мосеенков. — В кн.: Труды семинара по математической физике и нелинейным колебаниям Института математики АН УССР, 1, 1963.

210. Моут, С. Теоретическое и экспериментальное исследование вибраций ленточных пил [Текст]/ С. Моут. В кн.: Конструирование и технология машиностроения. – М.: Мир, 1966. – №2. – С. 27–30.

211. Мулухов, К.К. Особенности динамического расчета ленточно-колесных конвейеров [Текст]/ Мулухов К.К. // Труды Северо-Кавказского государственного технологического университета – 2000. – № 7. –С. 266–269.

212. Мышкис, А.Д. Прикладная математика для инженеров. Специальные курсы [Текст]/ А.Д. Мышкис. – 3-е изд., доп., – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 688 с.

213. Неронов, Н. П. О максимальных натяжениях в подъемном шахтном канате при нормальном режиме подъема [Текст]/ Н.П. Неронов.— Изв. вузов, Горный журнал, 1959, 10.

214. Николаи, Е.Л. О поперечных колебаниях участка струны, длина которого равномерно изменяется: Труды по механике [Текст]/ Е.Л. Николаи. – М.: Гостехиздат, 1955. – С. 328–331.

215. Пеньков, А.М. Боковые колебания и резонанс подъемных канатов [Текст]/ А.М. Пеньков. — ДАН УССР, 1947, 1.

216. Островский, Л.А. Нерезонансные параметрические явления в распределенных системах (обзор) [Текст]/ Л.А. Островский, Н.С. Степанов // Изв. вузов. Радиотехника. – 1971. – №4. – С. 489–504.

217. Пинчук, Н.А. Об одной начально–краевой задаче с подвижной границей [Текст]/ Н.А. Пинчук, А.М. Столяр // Математическое моделирование и краевые задачи: Труды Шестой Всероссийской научной конференции с международным участием. Ч. 3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ, 2009. – 250 с.

218. Пироженко, А. В. Анализ частот колебаний космической тросовой системы со сферическим шарниром [Текст]/ А.В. Пироженко, Д.А. Храмов// Техническая механика. – 2004.– №1. –С. 24–30.

219. Потапов, А.И. Волновые явления в одномерных механических системах с нестационарными границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ А.И. Потапов. – Горький, 1976.

220. Пустовойт, С.П. Метод несимметричных продолжений решения краевых задач с подвижными концами для уравнения колебаний [Текст]/ С.П. Пустовойт // В сб.: Краевые задачи. – Изд–во Пермск. ун–та, 1977. – С. 120–124.

221. Пустовойт, С.П. Метод несимметричных продолжений и решение второй краевой задачи для уравнения колебаний ограниченной струны переменной длины [Текст]/ С.П. Пустовойт // В сб.: Краевые задачи. – Пермь: Изд-во Пермск. ун-та, 1982. – С. 136–140.

222. Рагульский, К.И. Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов [Текст]/ К.И. Рагульский // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1971. – С. 169–177.

223. Раздольский, А.Г. К исследованию переходных процессов одномерных механических систем переменной длины [Текст]/ А.Г. Раздольский, Ю.В. Заболотный // В сб.: Динамика машин. – М.: Наука, 1974. – С. 175–181.

224. Рахматулин, Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках [Текст]/ Х.А. Рахматулин, Ю.А. Демьянов. Физматгиз, М., 1961.

225. Риска, Я., Шауэр, Ф. Неустановившиеся горизонтальные движения ракеты, увлекающей гибкую нить [Текст]/ Я. Риска, Ф. Шауэр.— В кн.: Сборник Военной акад. А. Запотоцкого, 15, 3, 1967.

226. Рушкевич, И.М. Электромагнитное поле в сжимающейся полости [Текст]/ И.М. Рушкевич // Прикладная математика и механика. – 1967. – Т. 31. – №3. – С. 552–555.

227. Савин, Г.Н. Динамика нити переменной длины [Текст]/ Г.Н. Савин, О.А. Горошко. – Киев: Изд-во АН УССР, 1962. – 327 с.

228. Савин, Г.Н. Об основных уравнениях шахтного подъемного каната [Текст]/ Г.Н. Савин.— Прикладная механика, 1955, 1, 1.

229. Самарин, Ю.П. О волновых явлениях в областях с подвижными границами [Текст]/ Ю.П. Самарин // Волжский математический сборник. – Куйбышев, 1967. – В. 5. – С. 337–340.

230. Самарин, Ю.П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве [Текст]/ Ю.П. Самарин // Прикладная математика и механика. – 1964. – Т. 26. – В. 3. – С. 77–80.

231. Самарин, Ю.П. Применение автомоделных решений к задаче о колебаниях круглой мембраны, расширяющейся из точки [Текст]/ Ю.П. Самарин // В сб.: Механика. – Куйбышев: КПТИ, 1967. – С. 35–38.

232. Самарин, Ю.П. Решение некоторых задач математической физики, связанных с колебаниями тел с подвижными границами: дис. ... канд. физ.–мат. наук [Текст]/ Ю.П. Самарин. – Куйбышев, 1964. – 160 с.

233. Светлицкий, В.А. Передачи с гибкой связью [Текст]/ В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1967. – 155 с.

234. Светлицкий, В.А. Механика гибких стержней и нитей [Текст]/ В.А. Светлицкий. – М.: Машиностроение, 1978. – 167 с.

235. Сергеев, А. Д. Автоколебания пантографа и контактной сети при высоких скоростях движения поезда [Текст]/ А.Д. Сергеев, Д.А. Сергеев// 9 Всероссийский съезд по теоретической и прикладной механике, Нижний Новгород, 22–28 авг., 2006. Аннотации докладов. Т. 1. – 2006. – С. 104.

236. Смирнов, В. И. Курс высшей математики, 4 [Текст]/ В.И. Смирнов. Физматгиз, М., 1958.

237. Стеценко, О.А. Нестационарный процесс в волновых резонаторах с движущейся стенкой [Текст]/ О.А. Стеценко // Изв. вузов. Радиотехника. – 1964. – Т. 7. – №1. – С. 71–74.

238. Толстов, Г. П. Ряды Фурье [Текст]/ Г.П. Толстов. Физматгиз, М., 1960.

239. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения [Текст]/ Ф. Трикоми. ИЛ, М., 1960.

240. Фирсанов, В. В. Динамическое состояние системы балок с переменными параметрами при действии подвижной нагрузки [Текст]/ В.В. Фирсанов, Доан Чан Нгок // Вестн. Моск. авиац. ин–та. – 2009.– №3. –С. 138–144.

241. Хосаев, Х.С. Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера [Текст]/ Х.С. Хосаев, Л.Т. Вазиева // Тр. Сев.–Кавк. гос. технол. ун–та. – 2001. –№8. –С. 234–239.

242. Шумлянский, И. Ф. Вторая задача динамики нити переменной длины при линейной механической характеристике электродвигателя [Текст]/ И.Ф. Шумлянский. — ДАН УССР, 1966, 12.

243. Щедров, В. С. Основы механики гибкой нити [Текст]/ В.С. Щедров. Машгиз, М., 1961.

244. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление [Текст]/ Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – 424 с.

245. Юлдашев, Ш.С. Решение несимметричной задачи о распространении вибрации, возникающей при движении поездов по одному пути двухпутного тоннеля метрополитена как суперпозиции симметричной и кососимметричной задачи [Текст] / Ш.С. Юлдашев, З.С. Махмудов, Ш.Р. Жумабоева // Проблемы механики. – 2005. №4. –С. 37–40.

246. Якубовский, Ю.В. Основы механики нити [Текст]/ Ю.В. Якубовский. – М.: Легкая индустрия, 1973. – 231 с.

247. Ястребов, В.П. Автомодельные задачи динамического изгиба балок [Текст]/ В.П. Ястребов // Прикладная механика и техническая физика. – 1981. – №1. – С. 158–164.

248. Aboshi, Mitsuo. Анализ движения кольцевого пролета подвесной системы контактного провода на базе модели троса с упругими опорами [Текст]/ Aboshi, Mitsuo // Nihonikai gakkai ronbunshu. // Transactions of the Japan Society of Mechanical Engineers. – 2009. – №755. –Р. 1950–1956.

249. Boyle, John M. (Jr). Vibration modeling of magnetic tape with vibro–impact of tape–guide contact / Boyle, John M. (Jr), Bhushan Bharat // J. Sound and Vibr. № 3. – 2006 . –Р. 632–655.

250. Brake, M. R. Frictional vibration transmission from a laterally moving surface to a traveling beam / Brake M. R., Wickert J. A. // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. –Р. 663–675 .

251. Cho, Yong Hyeon. Numerical simulation of the dynamic responses of railway overhead contact lines to a moving pantograph, considering a nonlinear dropper / Cho Yong Hyeon // J. Sound and Vibr. № 3. – 2008. – P.433–454.

252. Ding, Hu. Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams / Ding Hu, Chen Li-Qun // *J. Sound and Vibr.* № 17.– 2010. –P. 3484–3494 .

253. Engel, Zbigniew W. Problemy drgan mechanicznych w pracach uczonych krakowskich / Engel Zbigniew W., Niziom Jozef. – Akademia Groniczo–Hutnicza w Krakowie, Polska // *Czas. techn. M.* № 1. – 2008. –P.77–85.

254. Guo, Xajuan. Анализ динамических характеристик плавающей постели рельсового пути, опирающейся на стальные пружины [Текст]/ Guo Xajuan, Yang Shaopu, Guo Wenwu // *Journal of Vibration, Measurement and Diagnosis.* № 2. – 2006. –P.146–150.

255. Inacio, O. Computational modelling of string–body interaction for the violin family and simulation of wolf notes / Inacio O., Antunes J., Wright M. C. M. // *J. Sound and Vibr.* № 1–2. – 2008. –P. 260–286.

256. Kawai, Riozi, Langs–oder Drillungsschwingunger eines Stables mit der zeitlich veranderlichen Langenmenge / Kawai Riozi. – Proc. 7— ht Japan Nat. Congs. Appl. Mech., 1957, Tokio. Jakujutsu hiorken fukyukai, 1958.

257. Kotera, Tadashi. Vibration of a string with time–varying length / Kotera Tadashi // *Bulleten Japan Society of Mechanical Engineers.* – 1978. – Vol. 21. – №162. – P.1677–1684.

258. Lei, Xiao–yan. Влияние резких изменений жесткости основания железнодорожного полотна на его вибрацию при движущейся нагрузке [Текст]/ Lei Xiao–yan // *Journal of Vibration Engineering.* N 2.– 2006. – P.195–199.

259. Li, Ming–an. Активное управление вибрацией балок под действием подвижных нагрузок [Текст]/ Li Ming–an, Lei Shuang, Xu Jing–wen // *Journal of Xi'an University of Technology.* № 3. – 2010. – P.351–356.

260. Li, Weiming. Влияние скорости подвижной массы на динамические реакции шарнирно опертой балки [Текст]/ Li Weiming, Luo Hanbin, Zhu Hongping, Xia Yong // *Journal of Huazhong University of Science and Technology. Nature Science.* № 9. – 2008. – P.117–120.

261. Liu, Zhi-jun. Анализ плоских нелинейных свободных колебаний несущего каната с учетом влияния изгибной жесткости [Текст]/ Liu Zhi-jun, Chen Guo-ping // Journal of Vibration Engineering. № 1. – 2007. – P.57–60.

262. Nakagawa, Chizuru. Fundamental study on the effect of high-frequency vibration in the vertical and lateral directions on ride comfort / Nakagawa Chizuru, Shimamune Ryohei, Watanabe Ken, Suzuki Erimitsu // Quart. Repts Railway Techn. Res. Inst. № 2.– 2010. – P.101–105.

263. Pascal, M. New events in stick slip oscillators behavior / Pascal M. // Международная конференция по прикладной математике и информатике, посвященная 100-летию со дня рождения академика А. А. Дородницына, Москва, 7–11 дек., 2010. Тезисы докладов. – 2010. – P.71–72.

264. Ragulskis, K. Investigation of vibrations of a tape in the printing device / Ragulskis K., Kibirktis E., Zubavicius L., Ragulskis L. // J. Vibroeng. № 1. – 2007. – P.10–14.

265. Rusin, Jaroslaw. Vibrations of double-string complex system under moving forces. Closed solutions / Rusin Jaroslaw, Sniady Pawem, Sniady Piotr // J. Sound and Vibr. № 3. – 2011. –P. 404–415.

266. Ryue, J. Decay rates of propagating waves in railway tracks at high frequencies / Ryue J., Thompson D.J., White P. R., Thomspom D.R. // J. Sound and Vibr. . № 4–5. – 2009. – P.955–976.

267. Sahebkar, S. M. Nonlinear vibration analysis of an axially moving drillstring system with time dependent axial load and axial velocity in inclined well / Sahebkar S. M., Ghazavi M. R., Khadem S. E., Ghayesh M. H. // Mech. and Mach. Theory. № 5. – 2011. – P.743–760.

268. Shi, Yong-jiu. Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы [Текст]/ Shi Yong-jiu, Wu Li-li, Wang Yuan-qing // Journal of Vibration Engineering. № 2. – 2006. – P.173–178.

269. Shin, L.Y. Motion of elliptic ballooning for a traveling string/ Shin L.Y. // International Journal of Non-Linear Mechanical. – 1975. – Vol. 10. – №3. – P.183–191.

270. Stancioiu, Dan. Experimental investigations of a multi-span flexible structure subjected to moving masses / Stancioiu Dan, Ouyang Huajiang, Mottershead John E., James Simon // J. Sound and Vibr. № 9. – 2011. – P.2004–2016.

271. Sun, Lu. Steady-state dynamic response of a Bernoulli–Euler beam on a viscoelastic foundation subject to a platoon of moving dynamic loads / Sun Lu, Luo Feiquan // Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust. № 5. – 2008. – P.051002/1–051002/19.

272. Tanaka, C. Experimental studies on bond saw blade vibration/ Tanaka C., Shiota Y. // Wood Sci. and Technol. – 1981. – Vol. 15. – №2. – P.145–159.

273. Teng, Yan-feng. Vibration analysis of maglev three-span continuous guideway considering control system / Teng Yan-feng, Teng Nian-guan, Kou Xin-jian // J. Zhejiang Univ. Sci. A An International Applied Physics and Engineering Journal. № 1.– 2008.–P. 8–14.

274. Wang, Lianhua. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations / Wang Lianhua, Zhao Yueyu // J. Sound and Vibr. № 1–2. – 2008. –P. 1–14.

275. Wang, Ling-bo. Метод тестирования состояния моста, основанный на анализе взаимосвязанных колебаний системы "мост – транспортное средство " [Текст]/ Wang Ling-bo, He Shuan-hai, Jiang Pei-wen // Journal of Zhengzhou University. Engineering Science. № 1. – 2011. –P. 26–29.

276. Yagci, Baris. A spectral–Tchebychev technique for solving linear and nonlinear beam equations / Yagci Baris, Filiz Sinan, Romero Louis L., Ozdoganlar O. Burak // J. Sound and Vibr. № 1–2.– 2009. – P. 375–404.

277. Zhao, Yueyu. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to-one internal resonance/ Zhao Yueyu, Wang Lianhua // J. Sound and Vibr. № 4–5.– 2006. – P.1073–1093.

278. Zhou, Jinson. Анализ явления геометрической фильтрации и резонансных колебаний гибких элементов конструкции рельсового

транспортного средства [Текст]/ Zhou Jinson, Sun Wenjing, Gong Dao // Journal of Tongji University. Natural Science. № 12. – 2009. – P.1653–1657.

279. Zhu, W.D. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control / Zhu W. D., Chen Y. // Trans. ASME. J. Vibr. and Acoust. № 1.– 2006. – P. 66–78.

280. Zhu, W.D. Exact response of a translating string with arbitrarily varying length under general excitation / Zhu W.D., Zheng N.A. // Trans. ASME. J. Appl. Mech. № 3. – 2008. – P. 031003/4–031003/14.

Приложение А

**Свидетельство о государственной регистрации программы для
ЭВМ № 2025613649**

РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



СВИДЕТЕЛЬСТВО
о государственной регистрации программы для ЭВМ
№ 2025613649

**Автоматизированный программный комплекс для
исследования колебаний и резонансных явлений в
механических системах с движущимися границами «ТВ-
ANALYSIS-7»**

Правообладатель: *Литвинов Владислав Львович (RU)*

Автор(ы): *Литвинов Владислав Львович (RU)*

Заявка № **2025612074**
Дата поступления **06 февраля 2025 г.**
Дата государственной регистрации
в Реестре программ для ЭВМ **13 февраля 2025 г.**



Руководитель Федеральной службы
по интеллектуальной собственности

Ю.С. Зубов

Приложение Б

Свидетельство о регистрации электронного ресурса № 19517


 ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
 РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ ОБРАЗОВАНИЯ
 ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
 ОБЪЕДИНЕННЫЙ ФОНД ЭЛЕКТРОННЫХ РЕСУРСОВ "НАУКА И ОБРАЗОВАНИЕ"

**СВИДЕТЕЛЬСТВО О РЕГИСТРАЦИИ
 ЭЛЕКТРОННОГО РЕСУРСА**

№ 19517



Настоящее свидетельство выдано на электронный ресурс, отвечающий требованиям новизны и приоритетности.

**Автоматизированный исследовательский комплекс
 «TB-ANALISYS»**

Дата регистрации: 26 сентября 2013 года

Авторы: Литвинов В.Л., Яшагин Н.С., Анисимов В.Н.

Организация-разработчик: **Филиал ФГБОУ ВПО Самарский
 государственный технический университет
 в г. Сызрани**

Директор ИНИПИ РАО,
 академик РАО, д.ю.н., проф.  В.Е. Усанов

Руководитель ОФЭРНиО, почетный
 работник науки и техники РФ  А.И. Галкина

Дата выдачи 26.09.2013



Приложение В

Акт об использовании результатов диссертационной работы в учебном процессе



СВЕРЖДАЮ

Директор по учебной работе

Федерального государственного технического университета

д.т.н., профессор

О.В. Юсупова

«16» августа 2025 г.

АКТ

об использовании результатов диссертационной работы В.Л. Литвинова «Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с движущейся границей», представленной на соискание учёной степени доктора физико-математических наук, в учебном процессе Самарского государственного технического университета.

Комиссия в составе начальника учебного управления университета к.э.н., доцента Е.А. Алонцевой, заведующего кафедрой «Прикладная математика и информатика» д.ф.-м.н., профессора В.П. Радченко и председателя методического совета Института автоматизации и информационных технологий, к.п.н.; доцента Я.Г. Стельмах, составила настоящий акт о том, что в учебном процессе Самарского государственного технического университета использованы следующие результаты докторской диссертации В.Л. Литвинова «Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с движущейся границей».

1. Приближенный, аналитический и численный методы решения краевых задач о колебаниях систем с движущимися границами используются в лекционных курсах по дисциплинам «Уравнения математической физики» и «Численные методы решения краевых задач» а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах магистров по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».

2. Программный комплекс, предназначенный для решения класса краевых задач с движущимися границами, численная методика и алгоритмы исследования резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами, используются в лекционных курсах по дисциплинам «Математическое моделирование и компьютерные технологии в науке» и «Нелинейное моделирование материалов и механических систем», а также в лабораторных, курсовых и выпускных квалификационных работах магистров по направлению подготовки 01.04.02 «Прикладная математика и информатика».

3. Численная методика и алгоритмы исследования резонансных явлений, имеющих место в объектах с движущимися границами, линейные и нелинейные математические модели для моделирования и анализа продольно-поперечных колебаний одномерных объектов с движущимися границами, используются в лекционных курсах по дисциплине «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» для аспирантов направления 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» и выполнении выпускных квалификационных работ при подготовке диссертаций.

Начальник Учебного управления СамГТУ
к.э.н., доцент

Е.А. Алонцева Е.А. Алонцева

Зав.кафедрой «Прикладная математика и информатика»
д.ф.-м.н., профессор

В.П. Радченко В.П. Радченко


Председатель Методического совета Института автоматизации
и информационных технологий
к.п.н., доцент

Я.Г. Стельмах Я.Г. Стельмах

Приложение Г

Акты о внедрении результатов диссертационной работы

УТВЕРЖДАЮ
 Генеральный директор
 ООО «СКТБ «Пластик»
 С.А. Савин
 2025 г.



АКТ
 о внедрении результатов
 диссертационной работы
 Литвинова Владислава Львовича
 на тему «Математическое моделирование и исследование резонансных
 свойств механических объектов с движущейся границей»

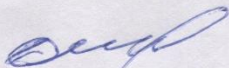
Настоящим актом подтверждается внедрение результатов диссертационного исследования Литвинова Владислава Львовича на тему «Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с движущейся границей» в опытно-конструкторские работы, выполняемые ООО «Специальное Конструкторско-Технологическое Бюро «Пластик», г. Сызрань.

Полученные Литвиновым В.Л. и использованные отделом проектных разработок и опытно-конструкторских работ ООО «СКТБ «Пластик» научные результаты в виде разработанных приближенных и численно-аналитических методов решения краевых задач с движущимися границами, линейных и нелинейных математических моделей, а также специализированного программного обеспечения позволили решить ряд вопросов прогнозирования резонансных эффектов и повышения надежности размеростабильных несущих конструкций оптико-электронных комплексов из волокнистых композиционных материалов с учетом динамических явлений, имеющих место в проектируемых объектах.


Представленные в диссертации количественные и качественные результаты исследования резонансных свойств позволили на этапе проектирования снизить риск возникновения нежелательных резонансных явлений в указанных объектах с подвижными закреплениями.

Члены комиссии:

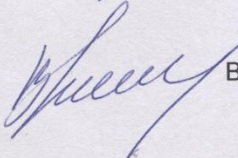
Главный конструктор-
 Начальник отдела проектных
 разработок и опытно-конструкторских
 работ ООО «СКТБ «Пластик»

 А.В. Денисов

Заместитель главного конструктора
 по научной работе
 ООО «СКТБ «Пластик», к.т.н.

 О.Г. Лайкова

Зав. кафедрой «Прикладная
 математика и информатика»
 ФГБОУ ВО СамГТУ, д.ф.-м.н., профессор

 В.П. Радченко

УТВЕРЖДАЮ



Генеральный директор АО «Тяжмаш»

Ларионов Р.М.

января 2025 г.

АКТ


о внедрении результатов диссертационной работы
Литвинова Владислава Львовича
«Математическое моделирование и исследование резонансных свойств
механических объектов с движущейся границей»

Результаты диссертационной работы Литвинова Владислава Львовича на тему «Математическое моделирование и исследование резонансных свойств механических объектов с движущейся границей» использованы при:

- решении краевых задач для случая, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями при проектировании ленточных катушек реверсивных конвейеров и ленточных транспортеров;
- исследовании собственных частот и форм колебаний выдвижных направляющих антенн подвижного радиотелескопа переменного профиля, предназначенного для приема радиоизлучения космических источников естественного и искусственного происхождения, на стадии проектирования;
- предотвращении резонансных явлений в грузоподъемных канатах при проектировании мостовых кранов для судостроительной верфи, центра строительства крупнотоннажных морских сооружений и другого производимого грузоподъемного оборудования для ГЭС.

Разработанные в рамках диссертационного исследования приближенные, численно-аналитические и численные методы решения задач о колебаниях систем с движущимися границами применительно к анализу резонансных свойств одномерных объектов переменной длины, а также методика моделирования и нахождения собственных частот объекта для случая, когда границы движутся равномерно с одинаковыми скоростями, внедрены в расчетную практику АО «Тяжмаш» на стадии проектирования производимого оборудования.

Технический директор
АО «Тяжмаш»


В.В. Абыденников