

*На правах рукописи*



ЯНОВСКАЯ ЕЛЕНА АЛЕКСАНДРОВНА

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО  
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ТОНКИХ ПЛАСТИЧЕСКИХ  
СЛОЕВ В НЕКАНОНИЧЕСКИХ ОБЛАСТЯХ**

Специальность: 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора физико-математических наук

Москва – 2025

Работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН».

**Научный консультант:** **Сосенушкин Евгений Николаевич**  
доктор технических наук, профессор, профессор кафедры систем пластичного деформирования, ФГАОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН», г. Москва

**Официальные оппоненты:** **Георгиевский Дмитрий Владимирович**  
член–корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории упругости, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова», г. Москва

**Петров Игорь Борисович**  
член–корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры вычислительной физики, ФГАОУ ВО «Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет)», г. Долгопрудный

**Марчевский Илья Константинович**  
доктор физико-математических наук, доцент, профессор научно-учебного комплекса «Фундаментальные науки», ФГАОУ ВО «Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет)», г. Москва


**Ведущая организация:** Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого», г. Санкт-Петербург

Защита состоится «9» апреля 2026 г. в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.332.02 при ФГАОУ ВО «Московский государственный технологический университет «СТАНКИН» по адресу: 127005, г. Москва, Вадковский пер., д. 1.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», [www.stankin.ru](http://www.stankin.ru)

Автореферат разослан «\_\_\_» \_\_\_\_\_ 2026 г.

Ученый секретарь  
диссертационного совета 24.2.332.02,  
к.т.н., доцент

 Тюрбеева Татьяна Борисовна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность исследования.** Математическое моделирование позволяет классифицировать объекты сплошной среды по топологии, влияющей на общность технологии изготовления и выбор достоверных моделей течения среды, участвующих в расчете технологических режимов в процессах пластического деформирования и оценке напряженно-деформированного состояния с использованием теории нестационарного течения тонких пластических слоев в многосвязных неканонических областях.

**Научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение,** состоит в создании математических моделей и комплексов программ для анализа нестационарного течения тонких пластических слоев в неканонических областях. Сложность проблемы не дает возможности инженерам и технологам воспользоваться научными исследованиями, проведенными в области механики деформируемого твердого тела (МДТТ) и вообще в области механики сплошной среды (МСС). По запросу промышленности возникает необходимость адаптировать математические модели и вычислительные процедуры для конкретных условий и процессов без потери точности. Предлагаемые математические модели уменьшают количество уравнений в постановках задач и, как следствие количество начальных и граничных условий, по сравнению с точными математическими постановками МСС. При этом сохраняется адекватность предложенных моделей применительно к исходной задаче. В случае невозможности существенного упрощения постановок следует использовать имеющиеся проблемно-ориентированные программные комплексы для численного моделирования процессов МСС. Развитие имеющихся и создание новых математических методов и моделей исследования нестационарных течений тонких пластических слоев в неканонических областях – **значимая проблема** математического моделирования и современных численных методов, являющихся основой создания проблемно-ориентированных комплексов программ для ЭВМ.

Практические приложения взаимосвязанных моделей течения сплошной среды в тонких слоях приводят к нестандартным краевым квазистатическим, эволюционным и смешанным задачам, которые формулируются для однородных и неоднородных сред. Тем самым обоснована **актуальность** темы диссертационного исследования.

**Степень разработанности темы исследования.** На сегодняшний день отечественными и зарубежными учеными предложены многочисленные математические модели МСС, термомеханики, кинетической теории и т.п. в однородных и кусочно-однородных средах, среди которых работы Г. Л. Бровко, Д. В. Георгиевского, В. М. Грешнова, А. А. Ильюшина, В. А. Кадымова, Э. М. Карташова, И. А. Кийко, И. В. Костарева, А. И. Кузнецова, А. И. Леонтьева, И. К. Марчевского, П. М. Огибалова, Б. Е. Победря, В. Прагера, Ю. Н. Работнова, С. П. Тимошенко, О. Л. Толоконникова, П. В. Трусова, А. А. Самарского, Л. А. Уваровой, Е. Ли, Л. Мизеса, А. Надаи, Л. Прандтля, Д. Уэрмера, Р. Хилла и многих других.

**Цель работы:** создание новых математических, физических и компьютерных моделей теории нестационарного течения тонких пластических слоев в

однородных и кусочно-однородных многосвязных областях для их исследования аналитическими, численными и экспериментальными методами.

Для достижения поставленной цели сформулированы следующие **научные задачи**:

– проведение комплексных исследований научных и технических проблем, связанных с течением тонких слоев пластической среды по поверхностям, включая разработку новых математических методов и моделей, постановку и численно-аналитическое решение задач теории пластичности на их основе определить силовые параметры при нагружении и компоненты тензора напряжений, проанализировать деформированное состояние слоев сплошной среды, включая кинематику течения: компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и скоростей деформаций;

– адаптация метода характеристик для решения контактных задач нестационарного течения в сравнительно тонком слое с помощью модели «идеальной жидкости» в неканонических областях, в научном обосновании ограниченности области применения модели «идеальной жидкости» для свободного растекания слоев по поверхностям и затекания материала среды в пазы, а также математической постановке задач течения пластических слоев в областях неканонической формы;

– научное обоснование области применения модели «вязкой жидкости» для решения задач о свободном растекании слоев по поверхностям и затекания металла в пазы, с учетом касательных напряжений, в том числе при затрудненном течении, а также решение контактной задачи при сложном нагружении слоя в виде полосы с определением критической силы пластического течения при растяжении ее средней части и отсутствии пластической деформации под захватами;

– разработка на основе базовых и производных инвариантных характеристик новых математических моделей напряженного и деформированного состояний, отображающихся на девиаторной плоскости траекториями главных напряжений и деформаций, функционально связанных с механическими схемами напряжений и деформаций при реализации большинства формоизменяющих операций пластической обработки;

– разработка алгоритмов, представленных в виде комплекса программ для вычисления параметров течения сплошной среды в виде тонких слоев, занимающих односвязные и многосвязные области неканонической формы, которые позволяют наряду с вычислением силовых параметров процессов сжатия, анализировать кинематику течения;

– создание методологии и построение классификационных систем тонкопалочных и тонкостенных объектов, формализация которых проведена с помощью разработанных алгоритмов, которые реализуют разноплановые математические методы распознавания объектов неканонической формы: экспертная классификация на основе теоретико-множественного подхода; решение распознавательных задач, построенных на разделении признакового гиперпространства дискриминантными функциями; использование нейронных сетей с процедурами глубокого обучения, сведенных в комплекс программ, осуществляющих выбор математических моделей пластического течения,

связанный со сложной геометрической формой пластических областей.

**Объектом исследования** являлись течения относительно тонких слоев  $\frac{h}{L} \ll 1,0$  ( $h$  – толщина;  $L$  – максимальный размер в плане) из жесткопластических и вязкопластических сред в неканонических областях.

**Предметом разработки и исследования** являлись математические методы и аналитические модели нестационарных течений сплошных сред, в том числе неоднородных композиционных, а также численные методы, позволяющие расширить число расчетных характеристик течений.

**Научная новизна** диссертации основывается на новых нестандартных постановках задач исследования и на полученных основных результатах, которые заключаются в следующем:

1. Установлены связи между различными математическими моделями течения тонкого пластического слоя для обобщения методов решения краевых задач течения с исследованием возможности введения малого параметра при переходе к безразмерным величинам в дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа.

2. Поставлена задача и получено точное аналитическое решение в задаче о течении тонкого слоя, расположенного между наклонными плитами, занимающего круговую область, с установлением следа ребра давлений и кинематики течения. Для численного исследования задачи Коши разработан математический метод сведения уравнения эволюции границы растекающейся области дивергентного вида в частных производных (как частный вид уравнения нелинейной теплопроводности) к обыкновенному дифференциальному уравнению, что позволило получить новые точные решения частных случаев выпуклых границ (эллиптических, параболических, гиперболических, а также границ, заданных в виде эллиптического интеграла), описываемых кривыми высших порядков.

3. Поставлена и решена контактная задача о пластическом растяжении полосы из однородного металла силами, которые приложены на зажатых ее торцах, для использования в практических целях при правке листов и полос с помощью одноосного растяжения за пределом упругости.

4. Для тонкого слоя односвязной области в виде полосы с неоднородными свойствами по толщине построена математическая модель для анализа напряжений, возникающих в композите, и сил сжатия, достаточных для пластического деформирования только мягкой компоненты слоя, а также силовых параметров в момент, когда пластической деформацией будет подвержена более твердая компонента. Область применения теории течения тонкого слоя дополнена анализом течения односвязной области в виде клина с малым углом в плане.

5. Для обобщенной постановки краевой задачи о свободно растекающемся пластическом слое между жесткими поверхностями получены точные решения эволюционного нелинейного дифференциального уравнения для восстановления контуров односвязных областей с линейными и нелинейными границами.

6. Разработан метод распознавания объектов неканонической формы по топологическим характеристикам, влияющим на выбор математической модели пластического течения, включая алгоритмизацию этапов отбора информативных

признаков с использованием математического аппарата, основой которого является концепция дивергенции; разработаны правила классификации деталей (продукционная система) с использованием теоретико-множественного подхода к экспертной классификации; построены разделяющие поверхности в информативном признаковом пространстве с использованием метода математической статистики, метода потенциальных функций, а также получено решение классификационных задач с использованием нейронных сетей с разработкой алгоритмов глубокого обучения.

7. На основе базовых и производных инвариантных характеристик построены математические модели напряженного и деформированного состояний, отображающиеся сечениями предельных поверхностей текучести девиаторной плоскостью.

8. Установлено, что полученные аналитические данные удовлетворительно коррелируют с результатами экспериментов по стесненному пластическому течению слоев в виде прямоугольника и кругового сектора в плане для обоснованного выбора математических моделей, которые дают более точные решения. Результаты теоретического анализа с достаточной точностью совпадают с результатами, полученными численными методами и результатами, полученными при проведении физических экспериментов по пластическому деформированию тонкоплатных объектов или имеющих ребра жесткости и занимающих односвязные и многосвязные области.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** В рамках общего подхода к решению краевой задачи Коши применительно к нестационарному течению тонкого слоя по поверхностям получил дальнейшее развитие математический аппарат анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) растекающейся по поверхностям сплошной среды в виде тонкого слоя, занимающего многосвязные области, ограниченные контурами, составленными из кусочно-линейных или нелинейных функций.

Для объектов исследования различной формы, занимающих многосвязные области, на основе общих принципов, построен алгоритм определения линий тока, линий уровня и проведено построение линий ветвления течения (ребер давления) для различных областей с характерным течением и формулируются краевые условия на границах областей.

Работоспособность всех разработанных математических моделей нестационарного течения пластических слоев проверена и подтверждена экспериментальными исследованиями применительно к разным маркам металлов и сплавов, деформируемых в различных условиях.

**Методология и методы исследования.** Для решения поставленных задач были использованы методы МДТТ, методы математической физики и математической статистики, а также численные методы. Для оценки достоверности результатов теоретических исследований ставились физические эксперименты по формоизменению реальных объектов на прессах и испытательных машинах, координатные сетки на образцах воспроизводились и считывались на инструментальном микроскопе УИМ-21 с точностью 0,01 мм. Разработана методология решения классификационных задач, для реализации этапов которой

использованы методы теории вероятности и математической статистики, экспертной классификации, принципы построения и обучения нейронных сетей на базе языка *Python*. Часть разработанных математических методов и алгоритмов реализована в виде 10 программ для ЭВМ, на которые получены свидетельства о регистрации Роспатента и которые включены в программный комплекс. Вычисления численным методом и визуализация процесса течения металла поддерживались *Web* технологиями с помощью *Google* браузера с применением языка разметки *HTML*, формального языка *CSS* для описания внешнего вида интерфейса и языка программирования *Javascript*.

**Основные положения и научные результаты, выносимые на защиту,** полученные автором лично или вклад автора в которые был определяющим:

1. Метод характеристик, адаптированный для решения задач пластического течения тонких слоев в ортогональных прямоугольной и криволинейной системах координат.

2. Новые математические модели нестационарных течений тонких слоев по недеформируемым и упруго-деформируемым поверхностям, включая новые постановки краевых задач течения пластического слоя и, в зависимости от используемых гипотез, приближенные или точные методы аналитических решений в моделях «идеальной» и «вязкой» жидкостей.

3. Метод решения задач пластического течения в слое, составленном из различных сред, как по толщине, так и в плане, в модели «вязкой» жидкости, новизна которого состоит в анализе изменения границы между компонентами композита.

4. Алгоритмы вычисления параметров течения сплошной среды в виде тонких слоев, занимающих односвязные и многосвязные области неканонической формы, которые позволяют наряду с вычислением силовых параметров процессов сжатия, анализировать кинематику течения.

5. Эволюционное уравнение, описывающее изменение границ неканонических областей, на различных этапах течения.

6. На основе базовых и производных инвариантных характеристик сплошной среды новые математические модели НДС, представляющие собой проекции на девиаторную плоскость траекторий главных напряжений и деформаций, и функционально связанные с видами механических схем напряжений и деформаций на конкретных операциях обработки металлов давлением.

7. Комплекс программ, содержащий процедуры поддержки и принятия решений на всех этапах предпроектных исследований, среди которых несколько дополняющих друг друга программных кодов, реализующих анализ информативности различительных признаков, распознавание и классификацию сложных геометрических областей, логику выбора математических моделей для решения задач пластического течения слоев по поверхностям, решения эволюционных уравнений восстановления изменяющихся границ растекающейся пластической области, определение динамических и кинематических параметров течения сплошной среды.

**Степень достоверности результатов работы** подтверждена корректными постановками задач для исследования, алгоритмами их решения и результатами

сравнения с задачами, и данными, полученными по методикам независимых исследователей. Полученные автором результаты согласуются с известными результатами в предельных случаях.

**Апробация диссертации.** Основные результаты диссертации докладывались на международных конгрессах и симпозиумах, всероссийских конференциях и научных семинарах, в том числе: Математика. Экономика. Образование. Ряды Фурье и их приложения. Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий. 2012; Фундаментальные проблемы. Инновационные материалы и технологии. Международный научно-технический конгресс. М., 2014; 11 международная научно-техническая конференция «Современные металлические материалы и технологии (СММТ '2015)». СПб., 2015; Современная металлургия нового тысячелетия. Липецк, 2015; Международная научно-техническая конференция «Проблемы и перспективы развития машиностроения», посвящённая 60-летию Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2016; Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста: матер. Всероссийской н.-техн. конф. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019; XII общероссийская н.-практ. конференция «Инновационные технологии и технические средства специального назначения», Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 21-23 ноября 2019; Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечно-прессового машиностроения. Рязань: ОАО «Тяжпрессмаш», 2019; Теоретическая и прикладная механика межд. научно-техн. конференция. Минск: БНТУ, 2019, 2022; Двадцать седьмая международная научная конференция "Математика. Компьютер. Образование", XI Общероссийский симпозиум с международным участием "Биофизика сложных систем: вычислительная и системная биология, молекулярное моделирование", 2020; Международный симпозиум по проблемам механики деформированного твердого тела, посвященный 110-летию А. А. Ильюшина. М.: МГУ им М.В. Ломоносова, 20-21 января 2021; Самарские чтения (в память об академике А. А. Самарском). Материалы международной конференции. М., 2022; Созвездие Роскосмоса: траектория науки. Материалы докладов отраслевой научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 2023; I Международная научно-практическая конференция (в рамках Международного кузнечного фестиваля «Секреты средневековых кузнецов»). М., 2023; Международные научные конференции по моделированию нелинейных процессов и систем, МГТУ «СТАНКИН», г. М., 2019, 2021, 2023, 2024 г.;

– доложены на научных семинарах: кафедры теории упругости МГУ им. М. В. Ломоносова «Проблемы геометрии и механики» научные руководители: Чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н, проф. РАН, зав. каф. теории упругости ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова» Георгиевский Д. В., Чл.-корр. РАН, д. ф.-м. н., проф. РАН, Шамолин М. В. (2019, 2022, 2024); каф. прикладной математики «МГТУ «СТАНКИН», зав. каф. д.ф.-м.н., проф. Л. А. Уварова, (2024, 2025).

**Соответствие диссертации паспорту научной специальности.** Диссертационная работа соответствует паспорту научной специальности 1.2.2

«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) в направлениях исследований пунктов; 2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента. 4. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели. 5. Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей. 8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

**Публикации:** Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 67 печатных работах: из них 25 работ в ведущих рецензируемых научных журналах, которые входят в утвержденный ВАК Минобрнауки Российской Федерации по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ», и 10 статей в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных *Web of Science* и *Scopus*. 3 рецензируемые монографии, 8 работ опубликованы в других рецензируемых периодических изданиях, 21 публикация в трудах конференций. Также получено 10 свидетельств на программы ЭВМ, 16 патентов, из которых 10 на изобретения и 6 на полезные модели.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка, включающего в себя 319 наименований, и 3 приложения. Работа содержит 336 страниц машинописного текста основной части, включающей 81 рисунок, 16 таблиц и 33 страницы библиографии. Приложение содержит 5 страниц машинописного текста.

### **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ**

**Во введении** обоснована актуальность темы диссертационного исследования, сформулирована его цель, определены задачи, научная новизна, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, сформулированы положения, выносимые на защиту.

**В первой главе** проведены обзор и анализ современного состояния теории течения тонкого пластического слоя по поверхностям. Приводится постановка классической задачи Л. Прандтля, полученное им аналитическое решение, а также ряд следствий и гипотез, сформулированных последователями: В. Прагером, А. Надаи, А. А. Ильюшиным. Физическая неоднородность тел привлекает внимание исследователей к линейным и нелинейным задачам теории упругости (С. П. Тимошенко), пластичности (А. А. Ильюшин) и ползучести (Ю. Н. Работнов), тепломассопереноса (А. И. Леонтьев), термоупругости (Э. М. Карташов), теории потенциалов (Д. Уэрмер) и других задач математической физики. В работах И. А. Кийко теория течения тонкого пластического слоя (ТТПС) получила обоснование на случай пластического течения по упруго-деформируемым поверхностям. А. И. Александровичем предложен новый закон контактного трения в исследованиях пластических течений по поверхностям, обладающих анизотропными свойствами.

Получены решения задач сжатия пластических слоев с заданной неоднородностью свойств по толщине (А. И. Кузнецов), и в плане (В. А. Кадымов). В. Н. Безуховым предложено дифференциальное уравнение, позволяющее восстановить контур свободно растекающегося слоя по известной области. И. В. Костаревым, В. А. Кадымовым, Е. Н. Сосенушкиным на основе теории течения тонких пластических слоев разработаны методы и алгоритмы расчета технологических параметров течения областей сложной конфигурации, имеющих контурные и продольные ребра. На основе асимптотического анализа с естественным малым геометрическим параметром Д. В. Георгиевским единственным образом было получено точное решение (в смысле конечности членов асимптотических разложений), совпадающее с обобщенным решением Л. Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Решение задач пластического течения в тонком слое, может быть осуществлено численными методами, например методом конечных элементов, являющимся основой многих программных комплексов, ориентированных на исследование процессов обработки давлением.

**Во второй главе** сформулированы новые постановки задач течения в тонком пластическом слое и методы решения в моделях «идеальной» и «вязкой» жидкостей. **Метод характеристик решения задач нестационарного течения в тонком слое со свободным и затрудненным растеканием дополнен возможностью определения кинематических характеристик.** В рамках общей математической модели «вязкой жидкости» получено приближенное аналитическое решение. Приведенные различные обобщения классической задачи Л. Прандтля представляют интерес для теоретического анализа сжатия тонкого слоя и при исследовании практических задач о правке плоских заготовок с наложением одноосного растяжения за пределом упругости. Задача описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных:

$$\operatorname{grad} p = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|\vec{v}'|} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0; \quad (2)$$

с условием на границе слоя в общем случае затрудненного растекания, где  $p_\Gamma(\mu)$  – заданная функция от параметра  $\mu$  на границе области, образованной пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает материал слоя:

$$p \Big|_{\partial S} = p_\Gamma(\mu), \quad \text{или} \quad p(\alpha, \beta, t) \Big|_{\partial S_t} = k\sigma_s \quad (k = 1, 2). \quad (3)$$

Упругими деформациями воздействующих на слой тел можно пренебречь ( $h(\alpha, \beta, t) \equiv h_1$ ). Линии скольжения  $\alpha$  и  $\beta$  взяты за оси криволинейной системы координат, из векторного уравнения следует, что линии уровня  $p(\alpha, \beta) = \text{const}$  ортогональны линиям тока, т. е. вектор скорости течения коллинеарен вектору  $\operatorname{grad} p$ . Это условие позволяет перейти к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно  $p(\alpha, \beta, t)$  и модуля вектора скорости  $V$ :

$$\operatorname{grad}^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2(\alpha, \beta, t)}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hBV \cos \gamma)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hAV \sin \gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad (5)$$

где  $\vec{V} = -V(\cos \gamma \vec{i} + \sin \gamma \vec{j})$ ;  $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$  – угол между касательной к линии тока в рассматриваемой точке области течения и осью  $\alpha$ . В уравнении (4) считаем  $\mu_1 = \mu_2 = 1$ ; предложенный ниже метод остается верным для любой пары допустимых значений факторов трения  $\mu_1, \mu_2$ . Из уравнения (4):

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{где} \quad (6)$$

$$\Omega(\alpha, \beta) = \frac{2\tau_s}{h} > 0, \quad p = \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial P}{\partial \beta},$$

$t$ , как независимый параметр, опускается. Для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (6) каждая совокупность функций

$$\alpha = \alpha(S'), \beta = \beta(S'), P = P(S'), p = p(S'), q = q(S'), \quad (7)$$

удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dS'} &= F_p, & \frac{d\beta}{dS'} &= F_q, & \frac{dP}{dS'} &= pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{dS'} &= -(pF_p + F_\alpha), & \frac{dq}{dS'} &= -(qF_q + F_\beta) \end{aligned} \quad (8)$$

описывает вместе с уравнением (6) характеристическую полосу:

$$dS = \sqrt{A^2 F_p^2 + B^2 F_q^2} dS'. \quad (9)$$

Характеристическая система (8) примет вид задачи Коши с граничными условиями на контуре области  $s_t$ .

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{A^2} \frac{p}{\Omega} & , \frac{d\beta}{ds} &= \frac{1}{B^2} \frac{q}{\Omega} & , \frac{dP}{ds} &= \Omega \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\alpha + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\alpha + \Omega_\alpha \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\beta + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\beta + \Omega_\beta \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Решение системы (10), удовлетворяющее (6), является характеристической полосой, а несущая эту полосу кривая  $(\alpha(s), \beta(s), P(s))$  – характеристической кривой. Связь между решениями (6) и (10) и их эквивалентность при выполнении определенных условий, обосновывается теоремами 1 и 2.

**Теорема 1.** Если характеристическая полоса имеет общий элемент (т. е.  $(\alpha, \beta, P, p, q)$ ) с интегральной поверхностью  $P = P(\alpha, \beta)$ , то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.

Пусть дана пространственная кривая  $C$ :

$$\alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu),$$

которую можно дополнить функциями  $p = p(\mu), q = q(\mu)$ , до начальной полосы  $C_1: \alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu), p = p(\mu), q = q(\mu)$ . Имеет место следующая теорема.

**Теорема 2.** Если  $C_1$  удовлетворяет соотношению полосы

$$P'_\mu = p\alpha'_\mu + q\beta'_\mu \neq 0 \quad (11)$$

и уравнению (6) или вдоль полосы  $C_1$ :

$$\Delta \equiv F_p\beta'_\mu - F_q\alpha'_\mu \neq 0, \quad (12)$$

то в окрестности  $C_1$  существует одна и только одна интегральная поверхность, проходящая через эту полосу.

В качестве пространственной кривой  $C(\alpha(\mu), \beta(\mu), P(\mu))$  выбрана регулярная часть контура  $\partial S_t$  области течения в рассматриваемый момент времени  $\alpha(\mu), \beta(\mu) \in C^2, (\alpha'_\mu)^2 + (\beta'_\mu)^2 \neq 0$  и на ней  $P(\mu) = k\sigma_s$ . Частные производные  $p(\mu), q(\mu)$  определены таким образом, чтобы выполнялись условия (6) и (11). Тогда в окрестности гладких точек контура области течения, все условия теоремы 2 выполнены, т. е. существует единственная интегральная поверхность  $P = P(\alpha, \beta)$ , проходящая через выбранную часть контура. Задача Коши для системы (6) при выполнении условий типа Липшица для правых частей  $\alpha, \beta, P, p, q$  имеет единственную характеристическую полосу, которая имеет общий элемент (в точках контура) с интегральной поверхностью. Следовательно, по теореме 1 решения (10) и (6) совпадают. Носители характеристик  $\alpha(s), \beta(s)$  системы (10) совпадают с линиями тока, и система (10) оказывается эквивалентной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\cos\gamma}{A}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\cos\gamma}{B}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{1}{\Omega} \left( -\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B} \cos\gamma \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos\gamma - B_\alpha \sin\gamma) \end{aligned} \quad (13)$$

Учитывая, что вдоль характеристик системы (13)

$$\frac{dP}{dS} = \Omega > 0,$$

последняя система представлена в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dP} &= \frac{\cos\gamma}{A\Omega}, \quad \frac{d\beta}{dP} = \frac{\sin\gamma}{B\Omega}, \quad \frac{dS}{dP} = \frac{1}{\Omega}, \\ \frac{d\gamma}{dP} &= \frac{1}{\Omega^2} \left( -\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B} \cos\gamma \right) + \frac{1}{AB\Omega} (A_\beta \cos\gamma - B_\alpha \sin\gamma). \end{aligned} \quad (14)$$

Решения системы (13) или (14) с граничными условиями в точках контура области определяют Риманову поверхность  $(\alpha, \beta, P)$ , из которой из принципа единственности давления составлено покрытие области из частей характеристических кривых, заключенных между границей контура области и ребром, соответствующих минимальным значениям контактного давления. Для анализа кинематики течения уравнение (5) записано в эквивалентной форме и проинтегрировано:

$$\frac{\partial W}{A\partial\alpha} \cos\gamma + \frac{\partial W}{B\partial\beta} \sin\gamma + W\Psi + \bar{\omega} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial s} = -W\Psi - \bar{\omega}, \quad \text{где} \quad (15)$$

$$W(s) = h(\alpha(s), \beta(s))V(s), \quad \bar{\omega}(s) = -\frac{\partial h}{\partial t}, \quad \Psi = \frac{1}{AB} \left[ \frac{\partial(B\cos\gamma)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(A\sin\gamma)}{\partial\beta} \right].$$

Если вычислить значения функции  $\Psi$  вдоль носителей характеристик

$\alpha(S), \beta(S)$ , т. е. найти зависимость  $\Psi = \Psi(S)$ , то (15) неоднородное линейное обыкновенное дифференциальное уравнение. Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.** Если значения функции  $\Psi$  вдоль носителей характеристик  $\alpha(S), \beta(S)$  имеют вид:

$$\Psi = -\frac{1}{R(S)} + \frac{1}{R_\beta} \cos\gamma + \frac{1}{R_\alpha} \sin\gamma, R_\alpha = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta}\right)^{-1}, R_\beta = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha}\right)^{-1} \quad (16)$$

касательные радиусы кривизны линий  $\alpha, \beta$  на основной поверхности; тогда

$\frac{1}{R(s)} = \chi(s) = \frac{\partial \gamma}{A \partial \alpha} \sin\gamma + \frac{\partial \gamma}{B \partial \beta} \cos\gamma = \frac{\partial \gamma}{\partial \eta}$  – касательная (геодезическая) кривизна линий уравнений  $P(\alpha, \beta) = const$  в рассматриваемой точке области течения.

В некоторых частных задачах течения тонких пластических слоев величина радиуса кривизны  $R = R(s)$  линии уровня находится точно (течение плоских пластических слоев постоянной толщины  $h = h(t)$ ), когда линии тока являются прямыми, ортогональными к контуру области, для  $\Psi$  получено:

$$\Psi = -\frac{1}{R(s) - s + s_0},$$

где  $R(s)$  – радиус кривизны начального уровня (контур области). При условии, что  $\Psi = \Psi(S)$  известная функция, уравнение (15) проинтегрировано:

$$W(s) = h(\alpha(s), \beta(s))V(s) = \bar{A}J_1(s) - J_2(s), \text{ где} \quad (17)$$

$$J_1(S) = e^{-\int_{s_0}^S \Psi(s') ds'}, J_2(S) = \int_{s_0}^S \bar{\omega}(s'') e^{-\int_{s''}^S \Psi(s') ds'} ds''.$$

Для определения постоянной интегрирования  $\bar{A}$  использовано условие ветвления течения  $W(s = s_{\text{ребра}}) = 0$  в неизвестных, но определяемых в ходе решения системы (14) точках следа ребра поверхности давления. Исходная задача (4), (5) решена интегрированием системы (10) с начальными условиями в точках контура области (угловые точки контура принадлежат следу ребра давлений), представляющего линию начального уровня, с одновременным вычислением двух квадратур  $J_1(s(P)), J_2(s(P))$ . При заданном шаге  $\Delta P$ , поточечно строится очередная линия уровня и на ней определяются значения  $J_1(s(P)), J_2(s(P))$ . Процесс продолжается до тех пор, пока вся область покрывается ортогональной сеткой линий уровня и линий тока, которая определяет след ребра поверхности давлений, т. е. установлена кинематика течения: определено положение контура  $\partial s_t$  области течения и нормальная к ней компонента вектора скорости течения:

$$V(s_0) = \frac{1}{h(s_0)} [\bar{A}J_1(s_0) - J_2(s_0)], \text{ где } \bar{A} = \frac{J_2(s_{\text{ребра}})}{J_1(s_{\text{ребра}})}.$$

Следовательно, определена форма контура свободно растекающейся области в момент  $t + dt$ . Если граница области является пазом, куда свободно затекает металл, то устанавливается расход металла  $Vh$  при затекании в ребро и, тем самым, определяется высота ребра.

На основе метода характеристик решен ряд нестационарных задач пластического течения тонких слоев: задача о течении пластического слоя материала между наклонными плитами в фиксированной круговой области,

граница которой образована пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает пластический материал (рис. 1):

$$s_t \equiv s_0: x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, h(x, t) = h_0(t) + \alpha_1(t)x.$$

Новым в предложенном решении является построение кинематики течения. Все линии тока собираются в одной точке  $(x_p(t), 0)$  и представляют собой эллиптический пучок окружностей; линии уровня изображаются гиперболическим пучком окружностей. Ребро вырождается в единственную точку с координатой:

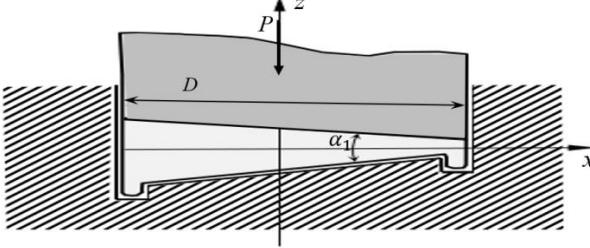


Рис. 1. Течение слоя переменной толщины, с круговой границей и затеканием в контурное ребро

$$x_p(t) = \frac{\sqrt{h_0^2(t) - \alpha_1^2(t)R^2} - h_0}{\alpha_1(t)}.$$

Интегралы  $J_1(s(x)), J_2(s(x))$  для определения скоростей вдоль известных линий тока берутся точно. Для линии тока, исходящей из точки контура  $M_0(x_0, y_0)$ , при этом  $x_0 > 0, y_0 > 0$ , они имеют вид:

$$J_1(s(x)) = \frac{y_0}{y(x)}, J_2(s(x)) = \frac{1}{y(x)} \int_{x_0}^x (h_0 + \alpha x) y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

где траектория движения:

$$y(x, t) = y_0 + \frac{h_0(t) + \alpha_1(t)x_0}{\alpha_1(t)} \cdot \frac{x_0}{y_0} - \frac{R(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)}{\alpha_1(t)y_0} \left[ 1 - \frac{y_0^2}{(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2 R^2} \cdot (h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда скорость вычислена

$$V(x) = \frac{1}{h(x)} (\bar{A}J_1(x) - J_2(x)),$$

где постоянная интегрирования

$$\bar{A} = \frac{1}{y_0} \int_{x_0}^{x_p(t)} \left( \frac{dh_0(t)}{dt} + \frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right) y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны и исследованы в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости». Для корректного описания задач, учитывающих наличие касательных напряжений, анизотропию в процессах течения и другие факторы, необходимо использовать более общую математическую модель «вязкой жидкости»:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (20)$$

где  $p, u, v$  – контактное давление и компоненты скорости течения;  $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$  – напряжения течения пластического материала в рассматриваемой области;

$h = h(t)$  – заданный закон изменения толщины слоя;  $\lambda(t) = \ln \frac{h_0}{h(t)}$  – степень деформации;  $t_0$  – начальный момент времени. На заранее неизвестной свободной границе  $\Gamma_\sigma: F(x, y, t) = 0$  задаются краевые условия: два динамических:

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \vec{\sigma} \vec{n} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y; \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x) = \vec{0} \quad (21)$$

и одно кинематическое:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\text{grad}F|}, \quad (22)$$

из которого определяется сама граница  $\Gamma_\sigma$ . На поверхности контакта с инструментом  $\Gamma_c: G(x, y, t) = 0$ , как правило, известной, задаются два условия: одно динамическое относительно касательного напряжения:

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}| = |\sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y| = \mu\tau_s, \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (23)$$

и одно кинематическое в виде условия непроницаемости:

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = -\frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\text{grad}F|}, \quad (24)$$

где  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  – единичные векторы касательной и нормали к границе  $\Gamma_c$ . В частности, на неподвижной границе нормальная скорость равна нулю. Пусть

$$\sigma_s, p_0, L_0, h_0, \frac{dh(t_0)}{dt}$$

– характерные значения предела текучести материала, контактного давления, линейного размера и толщины слоя, а также скорости сближения деформирующих инструментов. Относительная толщина пластического слоя  $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0} \ll 1$  – малый параметр. При оценке порядка слагаемых в условии несжимаемости (22) получено, что

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0}; \quad v_0 = -\frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon},$$

а из квазистатических уравнений равновесия (20) и (21), что  $p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}$ , тогда характерная величина скорости течения вдоль слоя намного больше скорости сближения инструментов и характерная величина контактного давления намного превышает предел текучести материала слоя. Рассмотрена в натуральных величинах задача течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (рис. 2 а). В плоскости  $Oxy$  это будет двумерная область течения с подвижными и непроницаемыми ( $y = \pm b_0$ ) границами (рис. 2 б). Используя симметрию пластической области, рассмотрен элемент слоя, расположенного в первом квадранте системы координат. У неподвижной стенки инструмента при  $G(x, y) \equiv y - b_0 = 0$ :

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \quad (26)$$

Граничные условия:

$$y = 0: v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0, \quad (27)$$

$$x = 0: u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0. \quad (28)$$

На неизвестной свободной границе  $F(x, y, t) = 0$ , в начальный момент имеющей параметры  $x = l_0 (n_x = 1, n_y = 0)$ , краевые условия определяются:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0, \sigma_{xy} = 0, \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0 \quad (29)$$

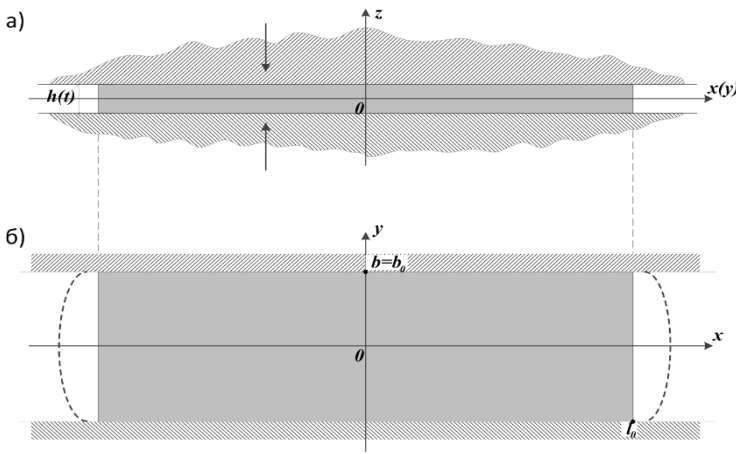


Рис. 2. Схема течения осаживаемого пластического слоя с ограничением по боковым поверхностям: а – в поперечном сечении (плоскость  $Oxz$ ); б – в сечении (плоскость  $Oxy$ )

Для исключения влияния краевых эффектов аналитическое решение задачи находится вдали от оси  $x = 0$  и свободной границы  $x = 0,5l_0$ , т.к. протяженность области течения в направлении  $x$  позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения  $v(x, y) = 0$ . После интегрирования уравнения несжимаемости (20) получено:

$$u(x, y) = \lambda'[x + g(y)],$$

где функция  $g(y)$  определяется далее. Считаем, что  $p = p(x)$ , тогда из (18 – 20) следует:

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \text{ где} \quad (30)$$

в левой части стоит функция аргумента  $x$ , а в правой - функция  $y$  и параметра  $h(t)$ . В итоге получена система с произвольной постоянной (функцией времени)  $k$ :

$$g''(y) = k = const; \quad p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \Rightarrow \quad (31)$$

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0}y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}, \quad (32)$$

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0}y^2 + c \right]. \quad (33)$$

Первое слагаемое в правой части уравнения (33) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на

неподвижной границе и на других границах, отсутствует. Полагается, что сечение  $x = x_f$  представляет собой условную свободную границу ( $x_f h = x_0 h_0$ ). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала  $-x_f(t) \frac{dh}{dt} b_0 = \int_0^{b_0} h u(x_f, y) dy$  определяется произвольная постоянная  $c = \frac{\sqrt{3}}{6} \mu b_0$  и формула для скорости течения:

$$u(x, y) = \lambda' \left[ x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (34)$$

Сопоставление найденной скорости (34) и граничного условия (30) при значении  $x = 0$  показывает, что оно выполняется в интегральном виде:

$$\int_0^{b_0} u(0, y) dy = \frac{\lambda' \sqrt{3}}{6b_0} \int_0^{b_0} (b_0^2 - 3y^2) dy = 0.$$

Интегрирование второго уравнения системы (31) дает:

$$p(x) = p_0 - \frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right), \quad (35)$$

с постоянной интегрирования  $p_0$ , не зависящей от координаты  $y$ . На свободной границе нормальное напряжение равно нулю:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0, \quad p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left( \frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \sigma_s.$$

При достаточно большом  $x_f$ , третьим слагаемым в прав. части можно пренебречь

$$p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right),$$

искомое давление будет иметь более простой вид:

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left( \frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right) (x_f - x), \quad (36)$$

функция тока:

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 y - 3y^3) + c_1.$$

В рамках общей модели «вязкой жидкости» получено аналитическое решение. На границе  $x = 0$ , а также на свободной границе  $x = x_f(t)$  оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ( $x = const$ ) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы.

Рассмотрена задача Коши течения пластического слоя, ограниченного односвязным выпуклым контуром, расположенном на абсолютно жесткой поверхности. Область из идеально жесткопластических сред, представляющих собой относительно тонкие слои, имеющие разные механические характеристики подвергается деформированию (рис. 3). Задача Коши течения пластического слоя,

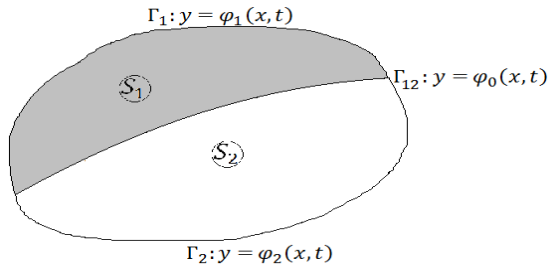


Рис. 3. Двуслойная область из разнородных сред

ограниченного односвязным выпуклым контуром, описана системой (18 – 20), где  $\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk}$  ( $k = 1, 2$ ) – предел текучести сжимаемого материала в областях  $S_1$  и  $S_2$  соответственно;  $h = h(t)$  - закон изменения толщины слоя. На линии раздела двух сред  $y = \varphi_0(x, t)$  выполняются граничные условия:

$$\sigma_{11}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(2)}, \quad (37)$$

$$\sigma_{12}^{(1)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)} \left( -\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(2)},$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v_k. \quad (38)$$

На контуре  $\Gamma_k: y = \varphi_k(x, t)$ , ( $k = 1, 2$ ), ограничивающим пластическую область:

$$\sigma_{11}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{12}^{(k)} = 0, \sigma_{12}^{(k)} \left( -\frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) + \sigma_{22}^{(k)} = 0,$$

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} = v_k, \text{ где } \sigma_{11}^{(k)} = -p + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u_k}{\partial x};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \left( \frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right); \sigma_{22}^{(k)} = -p + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v_k}{\partial x}.$$

Эти решения не удовлетворяют одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред в виде (37), (38). Решена краевая задача течения

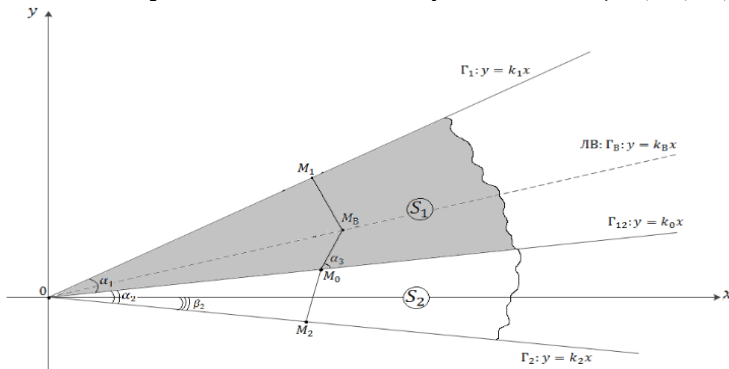


Рис. 4. К задаче о свободном растекании пластических подобластей в форме клина из разных сред

тонкого пластического слоя в области, составленной из двух разнородных сред (рис.4), границы которых образованы лучами, выходящими из начала прямоугольной системы координат  $Oxy$ , в которой в начальный момент времени  $t = t_0$  указанная область задается углом  $\beta_2 \geq 0$ . Пластический слой имеет постоянную толщину в начальный момент

времени. Под действием внешней нагрузки, - идеально жесткопластический слой переходит в пластическое состояние. Найдено распределение  $p, u, v$  (давления и скоростей) в начальный момент во всей области течения. Найдено вид линий  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$  границ, получено точное решение несимметричной задачи растекания пластического слоя, образованного двумя клиньями, с помощью модели течения «идеальной жидкости». Получено условие, при котором границы рассмотренных областей в процессе растекания остаются прямыми линиями и эволюционное

уравнение для восстановления границ. Доказано, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания, а координаты ее точек могут быть вычислены по полученной формуле.

Разработанные математические модели использованы при решении задач, имеющих практическое значение. Поставлена и решена контактная задача о пластическом растяжении полосы из однородного металла силами, которые приложены на зажатых ее торцах. (рис. 5). Для тонкого слоя односвязной области

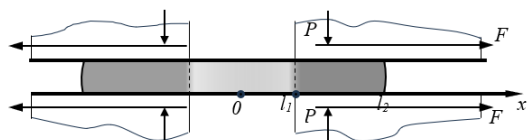


Рис. 5. Сложное нагружение слоя

в виде полосы с неоднородными свойствами по толщине построена математическая модель для анализа напряжений, возникающих в композите, и сил сжатия, достаточных для пластического деформирования только мягкой компоненты слоя и силовых параметров в момент, когда пластической деформацией будет подвержена более твердая компонента. Для выполнения условий статической определимости считается, что: сжатие биметаллической полосы осуществляется в условиях плоского деформированного состояния; металлы композита, имеющие различные свойства, аппроксимируются моделью изотропного жесткопластического тела (рис. 6). Система уравнений краевой задачи имеет вид:

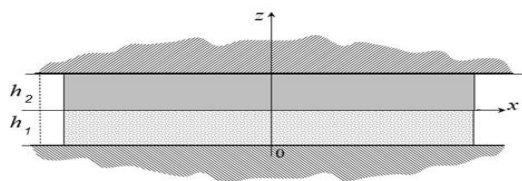


Рис.6. Пластическая осадка биметаллической полосы

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \quad (39)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \quad (40)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (42)$$

В постановке для упрощения известного решения Л. Прандтля, использованы выводы А. А. Ильюшина. Пластическое течение распространяется только в слое с меньшим напряжением текучести («мягком»), второй слой находится в упругом состоянии («жестком»).

**Утверждение.** Расположение границы течения неоднородного по толщине пластического слоя в таком состоянии соответствует минимуму мощности, которой достаточно для протекания процесса. Минимуму мощности пластической деформации в случае заданного закона изменения толщины должно соответствовать условие минимума внешних сил. Для доказательства утверждения достаточно вычислить силу сжатия полосы, при которой все сечение биметаллической полосы охвачено пластической деформацией:

$$P_2 = 2\bar{l} \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l} \left( 1 + O \left( \frac{h}{\bar{l}} \right) \right) - 2\bar{l} \left( \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l}, \quad (43)$$

где  $O \left( \frac{h}{\bar{l}} \right)$  бесконечно малая, порядка малости  $\frac{h}{\bar{l}}$ . Условие (43) совпадает с условием минимума внешних сил. В программной реализации на языке *Python* решается

краевая задача при известных граничных условиях на контуре. В качестве обобщения свободного растекания пластического слоя на плоскости рассмотрено квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (44)$$

При  $K(w) = cw^m$ , уравнение используется для описания нестационарного теплообмена в стационарной среде при условии, что коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. Задача о свободном растекании пластического слоя по плоскости сводится к исследованию уравнения (44), в котором  $K(w) = \frac{1}{2}w^2$ . Предполагается, что тонкий слой пластического материала в начальный момент времени  $t_0$  занимает плоскую область. По мере сближения плоскостей инструмента материал слоя будет занимать все новые и новые области. В данной постановке задача заключается в восстановлении контура области течения в любой момент времени  $t > t_0$ . Уравнение контура:

$$F(x, y, t) = 0. \quad (45)$$

В момент времени  $t+dt$  уравнение (45) должно быть справедливо, поэтому уравнение для определения границы контура:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (46)$$

в котором  $v_x$  и  $v_y$  скорости частиц, расположенных на контуре, в момент времени  $t$ . Если  $v_n$  - скорость частицы в направлении нормали к контуру,  $\theta$  – угол наклона между касательной к контуру и осью  $x$ , то из уравнения (46) получено:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\theta \right) = 0. \quad (47)$$

Рассмотрен криволинейный участок контура области течения  $MN$  и соответствующий участок проекции ребра давления  $mn$ , где  $a$  длина линии тока между контуром и проекцией ребра давления (рис.9). Объем металла, который протекает через часть границы  $ds$  за время  $dt$ :

$$dV = -dh \left( ads - \frac{1}{2} a^2 d\theta \right). \quad (48)$$

$$\text{Перетекающий объем: } dV = v_n h dt ds. \quad (49)$$

$$v_n = a \frac{d\lambda}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} a \frac{d\theta}{ds} \right), \quad (50)$$

$$\lambda(t) = \ln \left( \frac{h(t_0)}{h(t)} \right); \quad (51)$$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} > 0 \quad (52)$$

безразмерное модифицированное время;

$h = h(t)$  - заданное изменение толщины слоя.

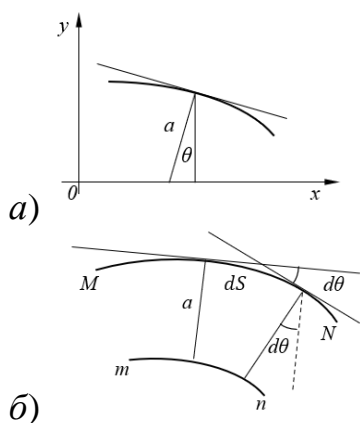


Рис. 9. Восстановление границы области течения

Пусть контур, описан симметричной относительно оси  $x$  кривой, при этом длина линии тока  $a = \frac{y}{\cos\theta}$ . Тогда:

$$v_n = \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\lambda}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (53)$$

После подстановки (53) в (50), получено:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\lambda}{dt} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos\theta} \frac{d\theta}{ds} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\theta \right) = 0. \quad (54)$$

Функция (45) задана в виде  $F(x, y, t) = y - \varphi(x, t) = 0$ , где  $y = \varphi(x, t)$  – кусочно-гладкий выпуклый контур симметричный относительно оси  $x$ .

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1;$$

$$\cos\theta = -\left[ 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \sin\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Кривизна определяется отношением:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[ 1 + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (55)$$

Известные функции подставлены в (54):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \varphi \left[ 1 + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (56)$$

Поскольку при  $t = 0$   $h = h_0$  и  $\lambda = 0$ , начальным условием для  $\varphi(x, \lambda)$  будет  $\lambda = 0, \quad \varphi = \varphi_0(x).$  (57)

Получено эволюционное уравнение для нахождения контура пластической области (56) и начальные условия (57). Алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ, где контур, ограничивающий пластическую область, задан кусочно-гладкими функциями, при этом контур должен быть выпуклым. Границы контура разбиваются на участки малой длины, точки стыкующихся концов участков задаются на плоскости координатами  $(x, y)$ . Начальные координаты этих узловых точек контура известны и образуют массив координат. Предполагается, что гипотеза перемещения точек по кратчайшей нормали к границам области выполняется, а нормальная составляющая скорости известна. При сжатии пластического слоя отслеживаются перемещения узловых точек контура по линиям тока, вычисляется объем металла, проходящий через участки контура (расход). После заданного количества итераций, связанных с изменением толщины деформируемого слоя и координат узловых точек, можно визуализировать подвижную границу контура растекающейся области в фиксированный момент времени.

Материалы **третьей главы** содержат варианты постановок и решения задач пластического течения в тонком слое определяются конфигурацией внешних и внутренних границ области, занятой деформируемой средой слоя, которые позволяют выбрать математическую постановку задачи. Аналитическое решение позволяет определить важные параметры процесса течения сплошной среды при деформировании объектов необходимых конфигурации и размеров. Однако не во всех случаях возможно полное аналитическое решение сложных задач МСС. Адекватному выбору математической модели для решения задачи МДТТ в конкретном случае при известной топологии объекта и размерных характеристиках

предшествует необходимость классифицировать анализируемые объекты. На принципе совпадения отдельных признаков построено большинство классификаторов. Классификационные процессы представляют собой постановку оптимизационных задач, решением которых является наполнение конечного числа  $m$  классов, объединяемых общностью, например, геометрической формы, отобранными из общего числа объектов,  $n$  наименованиями, отвечающими выбранному критерию полезного эффекта. Разработан **метод экспертного опроса для создания производственной системы**. При реализации алгоритма классификации объектов моделирования не исключены ошибки эксперта, связанные с неправильным определением принадлежности образов к конкретному классу, что противоречит внесенному в базу знаний правилу, являющемуся частью производственной системы. Подобная ситуация может возникнуть при отказе отнесения представленного объекта, который описывается образом с более характерными значениями признаков, классу, к которому принадлежит образ с менее характерными значениями признаков для этого класса. Ошибки при классификации могут быть выявлены в диалоговом режиме при организации оперативной проверки создаваемого классификатора на непротиворечивость.

Опираясь на классификационные схемы, рис. 10, укрупненно по общности геометрии анализируемые объекты объединены в три кластера: не обладающие симметрией, являющиеся осесимметричными и относящиеся к группе комбинированных. Предполагается, что классификация объектов осуществляется в несколько этапов, тогда обсуждаемая схема относится к первому уровню иерархической классификационной модели. Второму уровню иерархической классификации соответствует объединение в группы плоскостных и пространственных объектов. Независимо от масштабного фактора на этом этапе

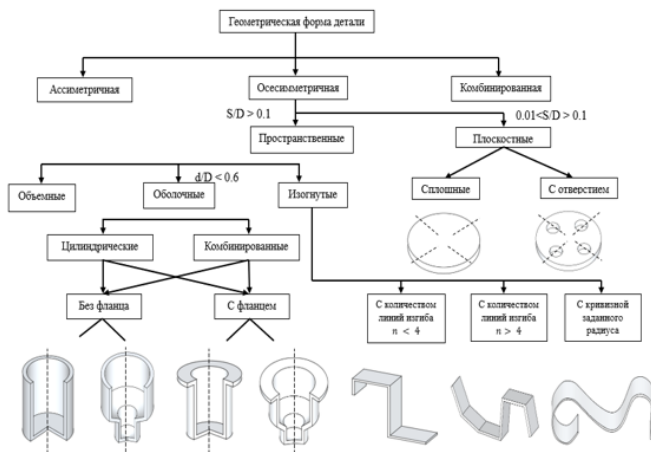


Рис.10. Классификация оболочек и поверхностей односвязных и многосвязных по признакам геометрической формы

Рассматриваемые объекты можно разделить на цилиндрические и объекты, имеющие комбинированную форму. Отдельное множество составляют пространственные детали с незамкнутым контуром и которые разделены по количеству линий изгиба и наличию криволинейных участков. Рассмотренный многоуровневый, иерархически выстроенный классификатор позволяет с помощью экспертного опроса упорядочить отнесение объектов к конечному числу кластеров.

классификации используют набор признаков, являющихся относительными размерными характеристиками. В соответствии с третьим уровнем пространственные объекты объединяют в группы объемных, оболочечных и изогнутых, занимающих многосвязные области, границы которых могут быть прямолинейными, криволинейными или комбинированными. Оболочочковые объекты представляют отдельную группу.

Создана методология распознавания объектов неканонической формы, в основе которой лежат методы дискриминантных функций, кластерного анализа, математической статистики, а также нейросетевые алгоритмы, которые использованы на разных этапах решения классификационных задач. Составлен пошаговый алгоритм, обеспечивающий формализацию и выполнение этапов минимизации количества признаков и классификации объектов со сложной топологией. Исходными данными для расчетов являются бинарные значения логических переменных, а также абсолютные значения конструктивно-технологических признаков. Численные значения относительных признаков априорного набора определяются в процессе вычислений. Для оптимизации построения компьютерной классификации и для возможности автоматического распознавания задаваемых объектов принято решение использовать методы искусственного интеллекта для формирования базы данных объектов и построения единого классификатора, который в дальнейшем может быть использован для решения различных задач математического моделирования.

Для решения задач распознавания с применением машинного обучения был использован язык программирования *Python*. В качестве основного инструмента выбран фреймворк *TensorFlow*, объединяющий множество моделей и алгоритмов глубокого обучения. Библиотека предназначена для работы с числами и создания моделей машинного обучения. Выбор данного фреймворка был обусловлен широким спектром его возможностей, в том числе гибкостью в изменении архитектуры. Нейросетевая модель многослойной структуры использована для генерации новых данных, с точки зрения вероятностного подхода. В рассматриваемой задаче архитектура модели представляет собой одноточечное кодирование для целевых данных. Результатом являются три выходных нейрона. В качестве функции потерь была выбрана перекрестная энтропия для количественной оценки разницы между двумя распределениями вероятностей. Эта функция позволяет оценить, насколько хорошо функционирует модель классификации, сравнивая фактический и ожидаемый результаты. Математически функция представлена в виде:

$$C(p_t, p_p) = \sum_{i=1}^k p_t[i] \cdot \ln(p_p[i]), \quad (58)$$

где  $C$  – перекрестная энтропия,  $p_t$  – эталонная вероятность,  $p_p$  – вероятность каждого кластера,  $k$  – количество кластеров. В предложенной модели классификации значение перекрестной энтропии составляет порядка 0,007, что свидетельствует о схожести распределения друг относительно друга. В некоторых случаях образуются расхождения с заранее заданной эталонной моделью, что усложняет определение кластера. Математически эта задача представлена как существование некоторого набора данных из пар  $(x_i, y_i)$ , в котором задан эталонный ответ  $y_i$ , являющийся неточным значением признака  $Y$ , а распределением вероятностей на множестве  $Y$  и осуществляется прогнозирование с вероятностью  $p(y_i|x_i, \theta)$ , которое уточняется до эталонного значения распределения  $p_t(y_i|x_i)$ . Если множество  $Y$  непрерывно, то задача приближения, прогнозируемого заранее распределения, к эталонному виду

означает задачу сближения функций плотности вероятностей. Представленная постановка задачи рассматривается, в зависимости от того, принимается за меру сходства (метрику) между функциями. Например, расхождение Кульбака-Лейблера, описывающее относительную энтропию, т. е. несимметричную метрику сходства между двумя вероятностями. Описанную величину рассматривается как в дискретном, так и в непрерывном виде, в зависимости от постановки задачи:

$$D(P||Q) = \mathbb{E}(x \sim p) \lg \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{x \in X} P(x) \lg \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (59)$$

где  $P(x), Q(x)$  – функции вероятности.

$$D(p||q) = \mathbb{E}(x \sim p) \lg \frac{p(x)}{q(x)} = \int_{x \in X} p(x) \lg \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (60)$$

где  $p(x), q(x)$  – функции плотности вероятности.

$$D(P||Q) = \sum_{x \in X} P(x) \lg P(x) - \sum_{x \in X} P(x) \lg Q(x). \quad (61)$$

Первое слагаемое является дифференциальной энтропией случайной величины в непрерывном случае, а второе, упрощенно описанной ранее перекрестной энтропией. Так как классификатор основывается на обучении нейросетевой модели, имеется некоторое количество обучающих пар  $(x_i, y_i)$ , известно, что  $y_i \in Y$ , следовательно его можно представить, как вырожденное распределение вероятностей на множестве  $Y$ , т. е. имеющее только одно возможное значение  $y_i$  с вероятностью равной единице. Тогда для вычисления перекрестной энтропии между эталонным и спрогнозированным распределением

$$C(\delta((y - y_t), p(y_i|x_i, \theta))) = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta((y - y_t) \lg p(y_i|x_i, \theta)) dy = - \lg p(y_i|x_i, \theta), \quad (62)$$

где  $\delta(y - y_t)$  – дельта-функция Дирака, выражающая эталонное распределение,  $p(y_i|x_i, \theta)$  – нормальное распределение. Полученное значение выражения (62) используется для минимизации перекрестной энтропии между эталонным и прогнозируемым распределением. Т.к. оба аргумента в формуле (62) являются функциями от  $y$  и подынтегральное выражение не равно нулю лишь в одной точке  $y_t$ , то минимизация  $-\lg p(y_i|x_i, \theta)$  равнозначна максимизации  $p(y_i|x_i, \theta)$ . Модель обучается с помощью перекрестной энтропии, которая с помощью преобразований по формуле (62) приводит к минимизации значений среднеквадратического отклонения, если в модели принимаем нормальное распределение  $y$ . Из раздела *Images* в *TensorBoard* можно отследить эволюцию распознаваемой модели объекта во время процесса обучения, этапы которого визуализированы на рис. 11.

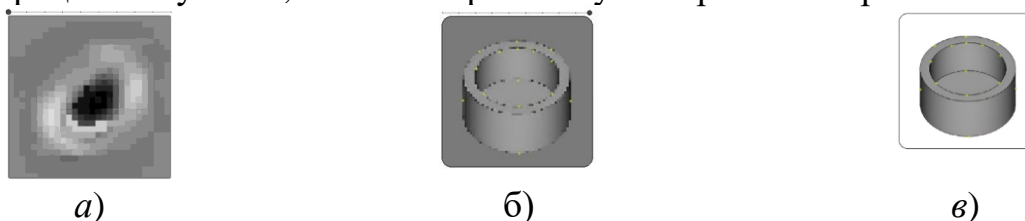


Рис. 11. Этапы процесса обучения в *TensorFlow*

В ходе машинного обучения достигнута высокая точность распознавания и классификации деталей до 99,1%. На рис. 12 представлен график изменения точности в виде скалярной величины. Разработанный алгоритм классификации позволяет распознать задаваемую на вход трехмерную модель и распределить ее в нужный кластер.

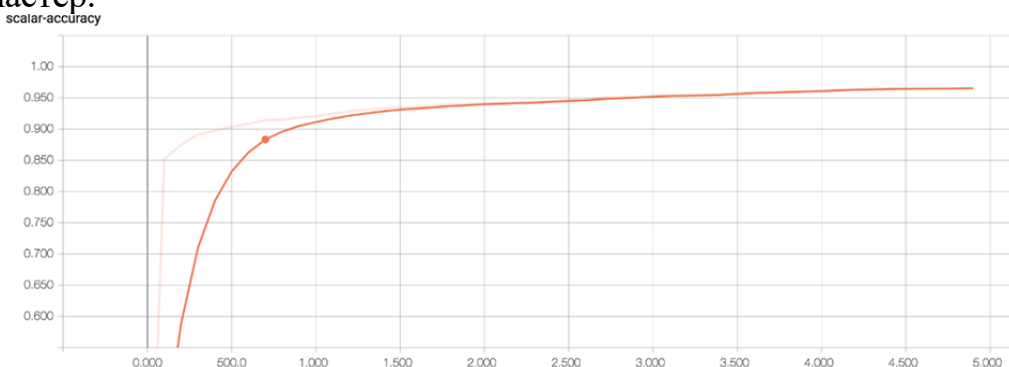


Рис. 12. Точность машинного обучения

В четвертой главе предложено численно-аналитический метод решения задач нестационарного течения в тонком пластическом слое для стесненного формоизменения. Рассмотрена новая математическая модель течения с образованием тонких стенок в виде контурных ребер при затекании деформируемой среды в пазы инструмента. Упругие деформации инструмента не учитываются ввиду их малости. Двумерная математическая модель описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения. В случае плоского деформированного состояния принимается условие полной пластичности. Касательные напряжения в данной модели течения не учитываются ввиду малости. На контуре, ограничивающим область течения (рис. 13), достаточно задать одно краевое условие, внешние границы выделенных подобластей считаются

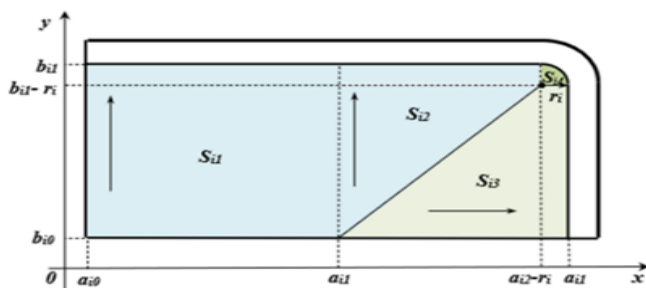


Рис. 13. Расчетная схема части односвязной области

неизменными в процессе деформирования. Уравнения краевой задачи для модели «идеальной жидкости» имеют вид системы (18) – (20). Суммарная сила деформирования в рассмотренной области:

$$P_{\Sigma} = \sum_{i,j}^n P_{S_{i,j}} \quad (63)$$

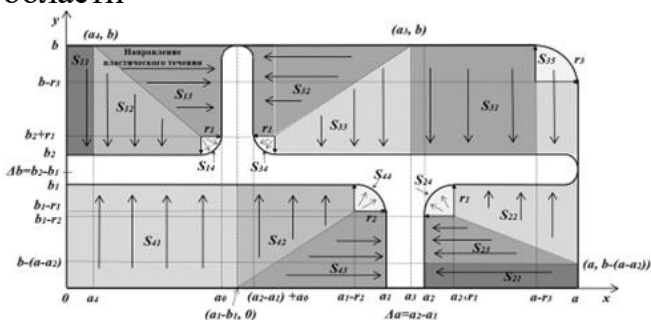


Рис. 14. Схема части многосвязной области течения

Разработанный численно-аналитический метод был использован в задачах с границами более сложной геометрической формы двусвязных и многосвязных областей (рис. 14).

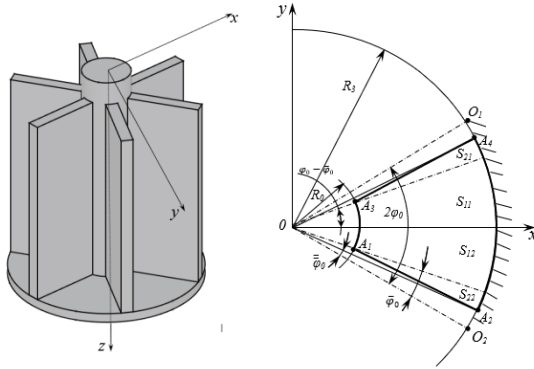


Рис. 15. Объект с продольными ребрами

Задача для многосвязных областей приведена для декартовой и криволинейной систем координат. На основе общего подхода к аналитическому решению задач течения тонкого слоя по поверхностям со свободным затеканием в пазы матрицы, которые формируют контурные или продольные ребра (рис. 15) конкретных изделий, разработана

программная реализация представленного алгоритма на языке *Python*. В качестве исходных данных задаются геометрические параметры, механические характеристики деформируемого материала, условия трения на контактных поверхностях.

**В пятой главе** описано математическое моделирование задач прикладной теории пластичности применительно к тонколистовым и тонкостенным объектам. В главе приведены полученные инвариантные характеристики напряженно-деформированного состояния для тригонометрического вида напряжений и деформаций; построены их обобщенные модели на девиаторной плоскости (рис. 16, а, б).

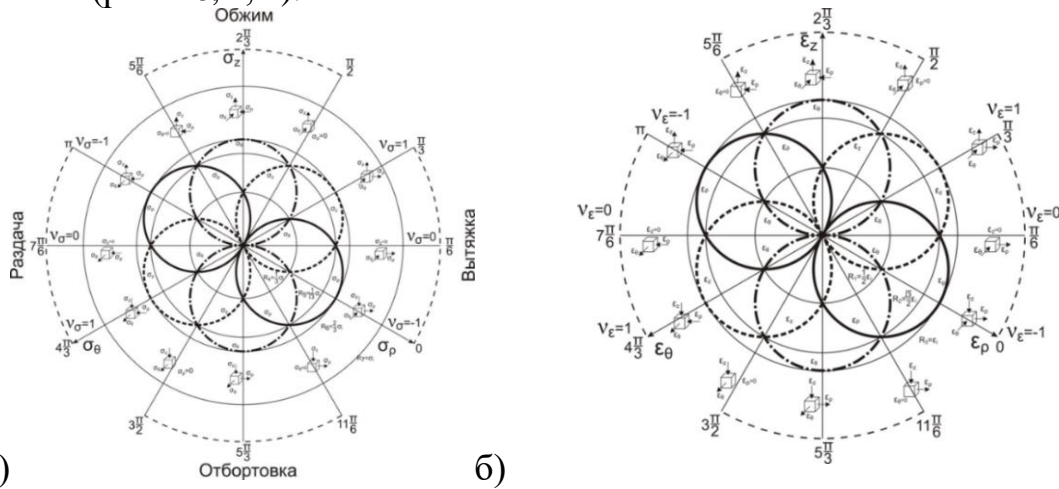


Рис. 16. Геометрическая интерпретация моделей НДС

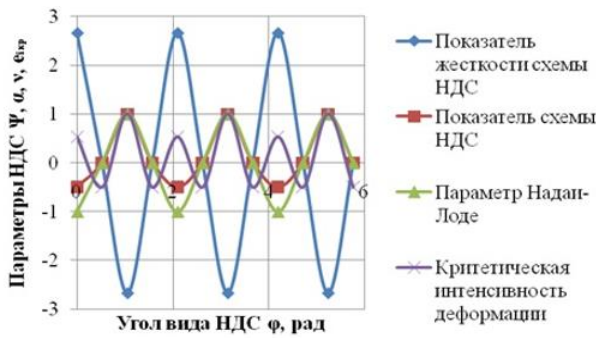


Рис. 17. Изменение параметров напряженно-деформированного состояния

Изменение инвариантных характеристик НДС в зависимости от углов вида напряженного  $\varphi_\sigma$  и деформированного  $\varphi_\epsilon$  состояний представлены на рис. 17.

**В шестой главе** анализируются результаты физических и численных экспериментов по сжатию между сближающимися жесткими плитами тонких пластических образцов, ограниченных неподвижными стенками и первоначально имеющих форму прямоугольника, и кругового сектора в

плане. Проведено сравнение с аналитическими решениями, полученными в главе два и четыре. Течение ограничено неподвижными стенками инструмента, расположенными вдоль длинных сторон прямоугольника и вдоль радиальных границ сектора. Рассмотрены течения пластического слоя, которые невозможно описать в рамках модели «идеальной жидкости», и в частности, растекание слоя, составленного из разных сред. Для их корректного описания необходимо использовать более общую модель «вязкой жидкости», описанной в главе 2. С целью выяснения влияния касательных напряжений (осредненных по толщине слоя) на кинематику течения, и в особенности, вблизи неподвижных границ, были проведены следующие эксперименты: 1) пластическая осадка слоя прямоугольной формы в плане между неподвижными (по ширине прямоугольника) границами (рис. 18); 2) пластическая осадка слоя формы кругового сектора в плане между неподвижными радиальными границами (рис. 19). Образец в виде полосы деформировался в оснастке так, что в процессе осаживания размер  $b_0$  (ширина) оставался неизменным и в результате эксперимента в каждом отмеченном рисками сечении  $X = const$  отслеживали поле перемещений. Проводены измерения минимального значения перемещения  $u_b(X) = u; \left(X; Y = \frac{b_0}{2}\right)$  вблизи неподвижной границы  $\left(Y = \frac{b_0}{2}\right)$ , максимального значения  $u_m(X) = u(X; Y = 0)$  и в средней по ширине в точке  $(Y = 0)$  для образцов с разной степенью деформации. Для кругового сектора (рис. 19) определены

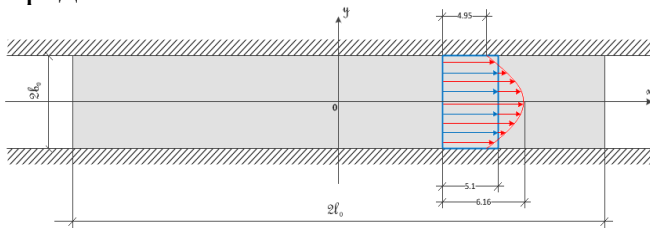


Рис. 18. Распределение перемещений по ширине срединной плоскости в задаче о стесненной осадке плоского слоя прямоугольной формы для моделей «вязкой» (красный цвет) и «идеальной» (синий цвет) жидкостей

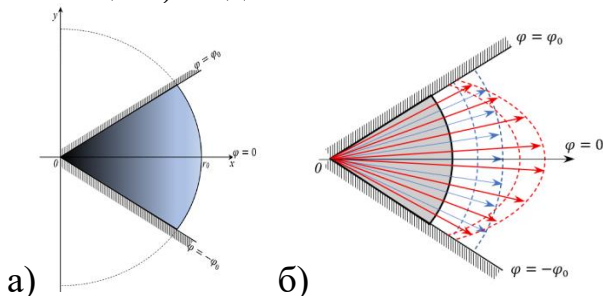


Рис. 19. а) Схема пластической области  $S$  в виде кругового сектора в плоскости  $Or\varphi$  в цилиндрической системе координат; б) Распределение перемещений по ширине срединной плоскости в задаче о стесненной осадке плоского слоя в виде сектора

абсолютная  $\Delta u(R) = u_m - u_b$  и относительная  $\frac{\Delta u}{u_m}$  величины отклонения перемещения в сечении  $R = const$  для образцов с разной степенью деформации. Анализ экспериментальных результатов подтверждает заметное отставание продольного: перемещения частиц вблизи неподвижной границы: вертикальные в начальном состоянии риски ( $X = const$ ) перестают быть вертикальными в процессе осадки полосы. В случае кругового сектора окружные в начальном состоянии риски ( $R = const$ ) перестают быть дугами окружностей в процессе сжатия.

В теории получено одномерное течение с постоянным перемещением по ширине (распределение перемещений отмечено синим цветом на рис. 18, 19), а в эксперименте - двумерное течение, которое приводит

к искривлению линий координатной сетки (распределение перемещений отмечено красным цветом на рис. 18, 19). Полученные экспериментальные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости». Установлено, что продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на линии симметрии образца относительно неподвижных стенок. Этот факт говорит о наличии ненулевых сдвиговых напряжений и угловых скоростей деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. Представленные экспериментальные результаты показывают, что корректное описание рассматриваемых течений возможно только в рамках более общей модели «вязкой жидкости». Для течения в средней части области, вдали от центра и свободной границы, было найдено аналитическое решение задачи, которое достаточно точно описывает течение пластического слоя, а расчетные перемещения близки не только качественно, но и количественно к данным экспериментов.

Представлена программная реализация численных методов расчета и анализа кинематических и динамических параметров деформируемого твердого тела. Вместо общего решения частной задачи получаем общий подход, так как общим является алгоритм численного решения практически любой обсуждаемой задачи. Программными средствами определены кинематические параметры течения тонкого слоя, в частности, по расходу перетекающего металла прогнозируется качество заполнения пазов инструмента.

### **ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ**

Диссертация на тему «Математические модели нестационарного вязкопластического течения тонких пластических слоев в неканонических областях», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, является научной квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований решена научная проблема, заключающаяся в обобщении научных положений теории течения тонких пластических слоев с границами неканонической формы, что позволило применительно к моделям «идеальной» и «вязкой» жидкости разработать новые методы решения ряда задач, имеющих важное значение, как для развития положений прикладной теории пластичности, так и для практических целей производства объектов машиностроения.

1. Математические модели и подходы к теоретическому анализу течения пластических слоев основаны на нелинейных уравнениях параболического типа. Разработанные математические модели «идеальной жидкости» в приложении к различным условиям течения позволили получить полного вида точные аналитические решения следующих задач:

- нестационарного течения методом характеристик интегрированием характеристической системы уравнений с начальными условиями в точках контура области, определив след ребра давлений и установив кинематику течения;

- течения слоя между наклонными плитами для круговой области с фиксированной границей переменной толщины слоя, которая образована пазами в одном из инструментов для свободно затекания металла. Решение задачи удалось получить аналитически (без применения приближенных вычислений);

– несимметричные течения по шероховатым плоскостям пластического слоя, составленного из разнородных сред в форме клина, которые имеют общую прямолинейную границу. Получены эволюционные уравнения для восстановления подвижных границ рассматриваемой области и уравнение для нахождения координат точек линии ветвления течения.

В результате обобщения полученных результатов **разработан метод, проведения теоретического анализа комбинированного нагружения тонкого слоя в плоской постановке.**

2. В рамках общей математической модели «вязкой жидкости» **разработан метод получения аналитических решений краевых задач свободного течения слоя, составленного из разнородных сред в плане, в размерном и безразмерном виде.**

3. Для расчета значений различных параметров пластического формоизменения разработан **метод перехода от визуального отображения объектов, к их абстрактным образам**, описываемым наборами различительных логических и детерминированных признаков, участвующих в дальнейшем в разработке технологических процессов пластического деформирования. С помощью созданного метода **минимизации численности признаков** для классификации объектов, в том числе с тонкими полотнами, которые подлежат изготовлению методами пластического деформирования, осуществлен отбор наиболее информативных признаков, для снижения размерности признакового гиперпространства и упрощения подготовки исходных данных об объектах, сокращения времени расчетов и объема необходимой оперативной памяти ЭВМ.

4. Создан альтернативный **метод распознавания объектов неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов.** Для обучения нейросети использован алгоритм глубокого обучения. Алгоритмы распознавания в соответствии с набором информативных признаков и нейросетевые алгоритмы доведены до программных реализаций, зарегистрированных Роспатентом с выдачей свидетельств, которые вошли в комплекс программ, разработанный в диссертации. В результате исследований созданы кластеры (укрупненные группы) объектов согласно имеющимся и разработанным классификаторам. С помощью разработанной методологии осуществляется поэтапный выбор математической модели для расчета важных параметров оценки напряженно-деформированного состояния материала и прочностных расчетов. Аналитические расчеты проводятся по выбранной математической модели из возможных вариантов, разработанных и представленных в главе 2.

5. Получено полное аналитическое решение задач, основанных на теории течения А.А. Ильюшина в модели «идеальной жидкости». Разработан алгоритм расчета силовых, кинематических и деформационных параметров процесса сжатия относительно тонкого пластического слоя. Представленные результаты доказывают, что можно строить области сложной неканонической формы и применять единый теоретический метод получения полных аналитических решений краевых задач в трехмерной постановке, при этом используются разработанные универсальные математические модели и алгоритмы их реализации. Сравнение полученных теоретическим анализом численных оценок НДС, силовых,

кинематических и деформационных параметров реальных процессов изготовления объектов конкретных форм и размеров с экспериментальными результатами независимых исследователей показало удовлетворительное совпадение результатов с расхождением не более 17%.

6. Разработанные динамическая и кинематическая модели напряженно-деформированного состояния позволяют оценить величины напряжений и деформаций в различных механических схемах, которые сопровождают конкретные операции пластического деформирования, а также анализировать траектории напряжений и деформаций, имеющие вид дуг окружностей, что свидетельствует о немонотонности рассматриваемых процессов деформирования. В результате исследования на основе моделей напряженного и деформированного состояний сделано обобщение полной группы операций листовой штамповки, которые, попадая в соответствующий интервал изменения угла вида НДС, однозначно характеризуются механическими схемами напряжений и деформаций с учетом их знаков.

7. Поставлены эксперименты и проведен анализ результатов по сжатию между сближающимися жесткими плитами тонких пластических образцов, ограниченных неподвижными стенками и, первоначально имеющих форму прямоугольника и кругового сектора в плане. Проведено сравнение результатов эксперимента и аналитических результатов полученных при использовании математических моделей. Установлены следующие экспериментальные закономерности: корректное описание течения удастся выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости». а расчетные перемещения близки не только качественно, но и количественно к данным экспериментов. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая дает более точные результаты при описании течений.

8. Численное моделирование кинематических параметров рассматриваемых процессов течения тонкого слоя металла по поверхностям проводилось с помощью *Web* технологии, что позволило реализовать интерфейс, первая часть которого представляет собой визуализацию полей окна для ввода параметров объекта, с помощью которых производятся все построения и вычисления. Для всех полей создан фильтр по вводимым значениям, который срабатывает при неверно заполненных полях входных данных тонкого слоя. Вторая часть интерфейса прогнозирует перемещение частиц слоя металла с определенными скоростями, что соответствует постадийным формоизменениям, которым подвергается слой. Анализ различных разработок в области компьютерного моделирования для задач механики деформируемого твердого тела позволил создать оригинальный комплекс программ для реализации моделирования различных процессов нестационарного пластического течения тонких пластических слоев в неканонических областях.

9. Созданные математические модели течения вязкопластического материала в неканонических областях и разработанные комплексы программ можно применять не только в области механики деформируемого твердого тела и теории пластичности. Разработанные методы и модели являются универсальными. Эти модели можно использовать при исследованиях в области медицины, в области

робототехники. Модели нестационарного вязкопластического течения в многосвязных областях можно использовать для создания новых композиционных материалов и изделий из них. Научные результаты диссертации внедрены в учебный процесс и нашли применение в промышленности, о чем свидетельствуют соответствующие Акты.

### СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

#### *Статьи в изданиях, рекомендованных перечнем ВАК РФ*

1. **Яновская, Е. А.** Правка листовых заготовок пластическим растяжением с учетом сжатия в области захватов/ Е. А. Яновская// Изв. Самар. н. ц. РАН. 2025. Т. 27. № 1. С.155 – 165.
2. Сосенушкин, Е. Н. Классификация деталей методами искусственного интеллекта при выборе математической модели решения задач пластического течения / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. С. Желнов // Изв. Самар. н. ц. РАН., т. 27, № 2, 2025. С. 170 – 179.
3. Сосенушкин, Е. Н. Применение методов искусственного интеллекта для компьютерного моделирования фрактальных поверхностей/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. С. Желнов// Изв. Самар. н. ц. РАН. 2024. Т. 26. № 1 (117). С. 109 – 115.
4. Кадымов, В. А. К задаче о комбинированном нагружении полосы/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**// Изв. Сам. н. ц. РАН. Т.26. №3. 2024. С. 140 – 146.
5. Сосенушкин, Е. Н. Компьютерное моделирование фрактальных поверхностей, построенных с использованием методов искусственного интеллекта для прогнозирования износа/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. С. Желнов // Изв. Самарского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 143 – 149.
6. **Яновская, Е. А.** Моделирование и сравнение результатов точного аналитического решения краевой задачи течения в тонком слое с экспериментальными данными/ Е. А. Яновская// Изв. Сам. н. ц. РАН. 2023. Т. 25. № 3 (113). С. 130 – 139.
7. **Яновская, Е. А.** К выбору математической модели для корректного решения краевой задачи течения тонкого слоя пластического материала при сжатии образца в виде кругового сектора/ Е. А. Яновская// Изв. Сам. н. ц. РАН. 2023. Т. 25. № 3 (113). С. 140 – 146.
8. **Яновская, Е. А.** Использование характеристик в нестационарных задачах пластического течения тонкого слоя по плоскостям/ Е. А. Яновская// Изв. Самар. н. ц. РАН. Т.25. №4. 2023. С. 139 – 144.
9. **Яновская, Е. А.** Моделирование задачи о свободном растекании пластического слоя, состоящего из разных сред, в постановке модели «идеальной жидкости»/ Е. А. Яновская// Изв. Самар. н. ц.РАН. 2023. Т. 25. № 4. С.132 – 138.
10. **Яновская, Е. А.** Аппроксимация течения слоя ограниченной толщины многосвязного контура совокупностью течений односвязных областей/ Е. А. Яновская// Изв. Самар. н. ц. РАН., т. 25, № 6, 2023. С. 139 – 147.
11. Сосенушкин, Е. Н. К вопросу о моделировании напряженнодеформированн

ого состояния при обработке давлением/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др.// Изв. ТулГУ. Техн.н. 2017. №11 – 1. С.82 – 100.

12.Кадымов, В. А. Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**// Вестник М. ун-та. Сер. 1. Матем. Механика. 2016. №3. С. 61 – 65.

13.Сосенушкин, Е. Н. Кинематическая и динамическая модели механики деформируемого твердого тела/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др.//Изв. Самарского научного центра РАН. 2016. Т.18. №1(2). С. 300 – 308.

14.Сосенушкин, Е. Н. Неравномерная раздача трубных заготовок/Е. Н. Сосенушкин, И. Е. Смолович, **Е. А. Яновская**, В. Ю. Киндеров// Вестник МГТУ "СТАНКИН". 2015. № 4 (35). С. 15 – 21.

15.Сосенушкин, Е. Н. Механика немонотонных процессов пластического деформирования/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, и др.// Вестник машиностроения. 2015. №9. С. 29 – 33.

16.Сосенушкин Е.Н. Теоретические и технологические аспекты обжима трубных заготовок / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, Д. В. Хачатрян, В. Ю. Киндеров // Известия МГТУ МАМИ, 2013. Т.2. №2(16). С. 139 –145.

17.**Яновская, Е. А.** Гносеологический аспект создания математической модели в технике / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2014. №1 (28). С. 131 – 134

18.Сосенушкин, Е. Н. Технологические процессы штамповки изделий из толстостенных труб/ Е. Н. Сосенушкин, В. В. Третьюхин, **Е. А. Яновская**. КШП. ОМД. 2013. № 2. С. 25 – 29.

19.Пузырь, Р. Г. Установление поля напряжений при радиально-ротационном профилировании цилиндрической заготовки без учета радиусов закругления деформирующего инструмента / Р. Г. Пузырь, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** // Вестник МГТУ "Станкин". 2013. № 4 (27). С. 42 – 47.

20.Сосенушкин, Е. Н. Моделирование операции раздачи трубных заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, Д. В. Хачатрян и др.// Изв. ТулГУ. Техн. н. 2013. №3. С.618 – 631.

21.Сосенушкин, Е. Н. Определение полей напряжений при пластическом деформировании элементов оболочек / Сосенушкин Е. Н., Третьякова Е. Н., **Яновская Е. А.**// КШП. ОМД. 2010. № 1 (22). С. 49 – 54

22.Сосенушкин, Е. Н. Экспериментальные исследования формоизменения стальных труб/ Е. Н. Сосенушкин, В. Н. Климов, **Е. А. Яновская** и др. // КШП. ОМД. 2010. №6. С.39 – 43.

23.Сосенушкин, Е. Н. Трубные заготовки: технологический аспект раздачи и обжима/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, **Е. А. Яновская** и др.// Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2010. №4. С.36 – 41.

24.Сосенушкин, Е. Н. Штамповка сферических и конических деталей из трубных заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, Е. И. Третьякова и др. // Заготовительные производства в машиностроении. 2010. №11. С.18 – 21.

25. Сосенушкин, Е. Н., Математическая модель управления распределением деталей по технологическим группам/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, Е. И. Третьякова и др.// Изв. ТулГУ. Техн. науки. 2009. №3. С.47 – 53.

**Статьи в изданиях, индексируемых Web of Science и SCOPUS**

26. Kadymov, V. A. Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, **Е. А. Yanovskaya**// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. Т. 51. № 3. С. 206 – 215.

27. Sosenushkin, E. N. Improving the reliability of a punched casting from a liquid alloy by process mode control/ E. N. Sosenushkin, **Е. А. Yanovskaya**, Т. А. Kinzhaev// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. Т. 50. № 6. С. 489 – 498.

28. Kadymov, V. A. Modeling of the stamping process of box-type forging/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, **Е. А. Yanovskaya**/ Web of Conf. ICSSMSTE 2020, № 315, Yalta, 01 July, 2020 // <https://www.matec-conferences.org/articles/matecconf/abs/2020/11/contents/contents.html>.

29. Kadymov, V. A. Flow in a thin plastic layer: generalizations of the L. Prandtl's problem/ V. Kadymov, **Е. Yanovskaya**/ EPJ Web Conf. Vol.224, 2019, 4p. //IV Intern. Conf. «Modeling of Nonlinear Processes and Systems (MNPS-2019)» // [https://www.epjconferences.org/articles/epjconf/abs/2019/29/epjconf\\_mnps2018\\_01002/epjconf\\_mnps2018\\_01002.html](https://www.epjconferences.org/articles/epjconf/abs/2019/29/epjconf_mnps2018_01002/epjconf_mnps2018_01002.html).

30. Кадымов, В. А. Математическое моделирование процесса затекания пластически деформируемого слоя в ребра/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** и др./ Сборник «Теорет. и прикл. механика». междунар. научно-техн. конф. (Белорусский нац. техн. ун-т). Минск: БНТУ, 2019. Вып. 34. С.184 – 189.

31. Sosenushkin, E. N. The mathematical and Physical Modeling of Distributions Operations in Crimp Conical Shells / E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, **Е. А. Yanovskaya**/ «Nonlinearity. Problems, Solutions and Applications» – Nova Science Publishers. New – York. 2017. Vol.1. Pp.499 – 518.

32. Sosenushkin, E. N. The parameters of the stress state in the operations of plastic deformation / E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, **Е. А. Yanovskaya**, А. А. Tatarencev, А. Е. Sosenushkin // Key Engineering Materials. 2016. Т. 684. С. 57 – 66.

33. Sosenushkin, E. N. Mechanics of nonmonotonic plastic deformation E. N. Sosenushkin, **Е. А. Yanovskaya**, А. Е. Sosenushkin, V. V. Emel'yanov// Russian Engineering Research. 2015. Т. 35. № 12. С. 902 – 906.

34. Sosenushkin, E. N. Stress state and deformability of metall in axisymmetric extension/ E. N. Sosenushkin, **Е. А. Yanovskaya**, V. V. Emel'yanov Russian Engineering Research. 2015. Т. 35. № 6. С. 462 – 465.

35. Сосенушкин, Е. Н. Напряженное состояние и деформируемость металла при осесимметричной вытяжке/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. В. Емельянов// СТИН. 2014. № 12. С. 21 – 25.

**Свидетельства о регистрации программ для ЭВМ**

36. Свидетельство №2019660522 о гос. Рег. программы ОВОЛОСНКА для ЭВМ/ Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. ФГБОУ ВО «МГТУ

«СТАНКИН». Оpubл. 07.08.2019. Реестр программ для ЭВМ, 2019. 1 с. <https://www.fips.ru/registers-doc>

[view/fips\\_servlet?DB=EVM&DocNumber=2019660522&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2019660522&TypeFile=html)

37. Свидетельство №2021618779 о гос. Рег. программы GRGUP для ЭВМ/ Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Священко. М., ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 01.06.2021. Реестр программ для ЭВМ, 2021. 1с. [https://www.fips.ru/registers-doc-](https://www.fips.ru/registers-doc)

[view/fips\\_servlet?DB=EVM&DocNumber=2021618779&TypeFile=html.](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2021618779&TypeFile=html)

38. Свидетельство № 2021618781 о гос. Рег. программы SOVM для ЭВМ/ Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская. М., ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 01.06.2021. Реестр программ для ЭВМ, 2021. 1с. [https://www.fips.ru/registers-doc-](https://www.fips.ru/registers-doc)

[view/fips\\_servlet?DB=EVM&DocNumber=2021618781&TypeFile=html.](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2021618781&TypeFile=html)

39. Свидетельство № 2025613740 о гос. рег программы построения случайных профилей поверхностей / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. С. Желнов / Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 14.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. [https://www.fips.ru/registers-](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613740&TypeFile=html)

[doc-view/fips\\_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613740&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613740&TypeFile=html)

40. Свидетельство № 2025613949 о гос. Рег. программы нейросетевой модели для обработки больших данных / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. А. Баданов // Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 18.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. [https://www.fips.ru/registers-](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613949&TypeFile=html)

[doc-view/fips\\_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613949&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613949&TypeFile=html)

41. Свидетельство № 2025613950 о гос. рег. программы реализации метода случайного смещения средних точек/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. С. Желнов/ Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 14.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. [https://www.fips.ru/registers-](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613950&TypeFile=html)

[doc-view/fips\\_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613950&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613950&TypeFile=html)

42. Свидетельство №2025613951 о го. рег. программы для ЭВМ. Динамическое нагружение полого стержня / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Баданов // Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 18.02.2025. Бюл. №2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. [https:// www.fips.ru/registers-](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2025613951&TypeFile=html)

[doc-view/fips\\_servlet?DB=EVM&DocNumber=2025613951&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&DocNumber=2025613951&TypeFile=html)

43. Свидетельство № 2025614054 о гос. рег. программы сжатия биметаллического кольца / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, В. С. Дрякина // М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 18.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. [https://www.fips.ru/registers-](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025614054&TypeFile=html)

[doc-view/fips\\_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025614054&TypeFile=html](https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025614054&TypeFile=html)

44. Свидетельство № 2025614081 о гос. рег. программы для ЭВМ. Прогнозирование силовых параметров выдавливания оребренных деталей/ Е. Н. Сосенушкин, Т. В. Гуреева, В. О. Грибанова, **Е. А. Яновская**// Москва: ФГБОУ ВО

«МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 18.02.2025. Бюл. №2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. <https://www.fips.ru/registersweb/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>

45. Свидетельство № 2025660663 о гос. рег. программы сжатия биметаллической полосы/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, В. С. Дрякина // Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 25.04.2025. Бюл. № Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. <https://www.fips.ru/registersweb/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>

### **Патенты**

46. Патент на изобретение №2460604 Штамп совмещенного действия для получения преимущественно трубных изделий с плоским фланцем. МПК В21D 22/02. Е. Н. Сосенушкин, И. Е. Смолевич, Д. В. Хачатрян, **Е. А. Яновская**. Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 07.04.2011; опубл. 10.09.2012, бюл. №25. 10 с.

47. Патент на изобретение RUS №2519697 МПК В21J 5/06 Способ углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, Г. М. Цфас, А. Е. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** и др. / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013112791/02 от 22.03.2013; опубл. 20.06.2014; бюл. №17.

48. Патент на изобретение RUS №2509621 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, Г. М. Цфас, Е. А. Яновская и др. / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 201215457/02 от 17.12.2012; опубл. 20.03.2014; бюл. №8.

49. Патент на изобретение RU 2824551 С1, 12.08.2024. Способ профилирования фигурного контура плоскостной заготовки для штамповки гаечного ключа / Сосенушкин Е.Н., Гусев Д.С., Яновская Е.А. // Патент на изобретение RU 2824551 С1, 12.08.2024. Патентообл. ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»; Заявка № 2023123381 от 08.09.2023. Оpubл. 12.08.2024; бюл. №23.

50. Патент на изобретение RU 2724235 С2 МПК В21К 1/76 Способ формообразования тонкопалотной поковки [текст] / Российская Федерация/ Сосенушкин Е. Н., Иванов К. Н., Сосенушкин А. Е., **Яновская Е. А.**, Кинжаев Т. А.; Патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН".; заявка № 2018125281 от 10.07.2018; опубл. 22.06.2020 бюл. № 18.

51. Патент на изобретение RU 2725541 С2 МПК В22D 18/02 Способ формообразования тонкопалотной поковки [текст] / РФ, Сосенушкин Е. Н., Иванов К. Н., Сосенушкин А. Е., **Яновская Е. А.**, Кинжаев Т. А., Тимохина А. М.; патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН". Заявка № 2018125280 от 10.07.2018; опубл. 02.07.2020 бюл. № 19.

52. Патент на изобретение RU 2781825С1 РФ, МПК В21К5/16. Способ изготовления гаечных ключей пластическим деформированием [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., **Яновская Е. А.**, Гусев Д. С., Рогулин С. А., Хохлова Н. Г.; патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН". – N 2021136351; заявл. 09.12.2021; опубл. 18.10.2022, бюл. № 29.

53. Патент на изобретение RU 2781826C1 РФ, МПК В21К5/16. Способ штамповки гаечных ключей [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., **Яновская Е. А.**, Гусев Д. С., Рогулин С. А., Хохлова Н. Г.; патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН". – № 2021136348; заявл. 09.12.2021; опубл. 18.10.2022, бюл. № 29.

54. Патент на изобретение RU 2784307C1 РФ, МПК В21К5/16. Способ изготовления гаечных ключей пластическим дефор-мированием [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., **Яновская Е. А.**, Гусев Д. С., Шарыкин М. В., Хохлова Н. Г.; патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ"СТАНКИН". – № 2021136355; заявл. 09.12.2021; опубл. 23.11.2022, бюл. N 33.

55. Патент на изобретение RU 2784309C1 Российская Федерация, МПК В21К5/16. Способ штамповки гаечных ключей [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., **Яновская Е. А.**, Гусев Д. С., Шарыкин М. В., Хохлова Н. Г.; патентообл. ФГБОУ ВО "МГТУ "СТАНКИН". – № 2021136354; заявл. 09.12.2021; опубл. 23.11.2022, бюл. № 33.

56. Патент на полезную модель №100928 Пуансон для неравномерной раздачи трубных заготовок/ И. Е. Смолович, Е. Н. Сосенушкин, Д. В. Хачатрян, **Е. А. Яновская**. Патентообл. ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заявл. № 2010125846, 24.06.2010; опубл. 10.01.2011. 3 с.

57. Патент на полезную модель RUS №133440 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. № 2013115205; опубл. 05.04.2013; опубл. 20.10.2013.

58. Патент на полезную модель RUS №141441 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, А. Е. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013158670; 30.12.2013; опубл. 28.04.2014.

59. Патент на полезную модель RUS №144975 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, А. Е. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013123620; 23.05.2013; опубл. 31.07.2014.

60. Патент на полезную модель RUS №163796 МПК В21С 25/02 Устройство для канального углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, Л. М. Овечкин, **Е. А. Яновская**, А. Н. Никич / Патентообл. ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2015147992/02; 09.11.2015; опубл. 10.08.2016.

61. Патент на полезную модель RUS №171385 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** и др./ Патентообл. ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2016112591; 04.04.2016; опубл. 30.05.2017. Бюл. № 16.

#### *Другие рецензируемые периодические издания*

62. Кадымов, В. А. Пластическое растяжение полосы с несимметричными условиями в области захватов/ В. А. Кадымов, Н. Л. Лисунец, **Е. А. Яновская**//

Черные металлы. №5.2024. С. 75 – 80.

63.Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое: теория, анализ решений и их приложения / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. №3. С. 18 – 28.

64.Сосенушкин, Е. Н. Аналитические и физические модели технологии обратного выдавливания / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. Е. Сосенушкин // КШП. ОМД. 2019. № 9. С. 23 – 32.

65.Сосенушкин, Е. Н. Развитие теории течения пластически деформируемого слоя/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др.// Изв.Тул.ГУ. Техн. науки. 2019. №5. С.131 – 138.

66.Сосенушкин, Е. Н. Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др.// Цветные металлы. 2019. №3. С.69 – 75.

67.Sosenushkin, E. N. Development of the theory of flow of a plastically deformable layer/ E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, **E. A. Yanovskaya** and et/ Известия ЮФУ. Технические науки. 2019. № 5. С. 131.

68.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование штамповки прямоугольного фланца с выдавливанием выступа/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. А. Архипов // Вестник МГТУ «Станкин». №4 (51). 2019. С. 65 – 70.

69.**Яновская, Е. А.** Математическое моделирование ротационной вытяжки многослойных листовых материалов/ Е. А. Яновская, Е. Н. Сосенушкин, В. В. Емельянов// Вестник МГТУ "Станкин". 2019. № 3 (50). С. 40 – 43.

### *Монографии*

70.Сосенушкин Е. Н. Пластическое течение в тонком слое: теория, математические модели, анализ решений и их приложения/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**. М.: Янус-К, 2023. 208 с.

71.Сосенушкин Е. Н. Штамповка высокопрочного чугуна. Производство изделий из центробежнолитых труб Сосенушкин Е. Н., **Яновская Е. А.**, Пономарев А. С./ [Монография] М.: Янус-К, 2020. 119 с.

72.**Яновская Е. А.** Штамповка конических изделий. Теория и эксперимент [Монография]/ Е. А. Яновская, Е. Н. Сосенушкин. Deutschland, Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. 251 с.

### *Доклады на между- и всероссийских симпозиумах, конференциях и семинарах*

73.Кадымов, В. А. К задаче о пластическом растяжении полосы с учетом условий на торцах/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ Межвузю конференция «Математика в созвездии наук» М.: Изд-во МГУ. 2024. С.407 – 409.

74.Кадымов, В. А. Эксперименты по стесненной осадке тонкого пластического слоя прямоугольной формы/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ Моделирование нелинейных процессов и систем. С. 130 – 136. Материалы шестой международной конференции. М.: Янус-К, 2023. 338 с.

75.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование холодного выдавливания поковки фланца с контурным ребром/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А.

Архипов/ В сб.: Кузнец — всем ремеслам отец/ Сб. мат. I Межд. научно-практической конференции. М., 2023. С. 24 – 33.

76.Кадымов, В. А. Оценка напряженного состояния биметаллического композита, составленного из разнородных слоев/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**// Фундаментальные основы механики. 2022. № 10. С. 66 – 71.

77.Сосенушкин, Е. Н. Решение задачи Л. Прандтля применительно к фланцу, занимающему область сложной конфигурации/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская**, А. А. Архипов / В сб.: Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Минск, 2022. С. 181 – 186.

78.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование теплообменных процессов твердых тел/ Е. Н. Сосенушкин, О. К. Иванова, **Е. А. Яновская** и др./ В сб.: Самарские чтения. Матер. межд. конференции. Москва, 2022. С. 225 – 228.

79.Кадымов, В. А. Математическое моделирование технологических режимов операции жидкой штамповки алюминиевых сплавов/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ В книге: Моделирование нелинейных процессов и систем. Материалы пятой международной конференции. 2021. С. 189 – 191.

80.Кадымов, В. А. Контактная задача пластического течения в тонкослойных областях с продольными ребрами/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ Сб. «Упругость и неупругость». – М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 198 – 207. Матер. Междунар. симп. по проблемам мех. деф. тел, посв. 110-летию А. А. Ильюшина. М.: МГУ им М. В. Ломоносова, 20-21 января 2021 г.

81.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование силовых и деформационных параметров при сжатии пластического слоя/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская**/ В книге: Двадцать седьмая международная научная конференция "МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ", XI Общероссийский симпозиум с международным участием "Биофизика сложных систем: вычислительная и системная биология, молекулярное моделирование". Тезисы. 2020. С. 178.

82.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование течения металла по плоскостям со свободным затеканием в ребра/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская**/ Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста: матер. Всероссийской н.-техн. конф. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. С.337 – 342.

83.Кадымов, В. А. Пластические течения в тонком слое: новая постановка краевой задачи и ее решение/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская** и др./ Сб. тезисов 3-й Межд. конф. «Моделирование нелинейных процессов и систем». М.: Янус-К, 2019. С. 99 – 103.

84.Сосенушкин, Е. Н. Математическая модель штамповки фланца с выдавливанием ребер/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др. / Сб. научных статей и докладов «Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечно-прессового машиностроения». Рязань: ОАО «Тяжпрессмаш», 2019. С.341 – 349.

85.Кадымов, В. А. Теория течения в тонком пластическом слое и различные обобщения задачи Л. Прандтля/ В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская**/ Сб. тез. 3-ей межд. конф. «Моделирование нелинейных проц. и систем». М.: Янус-К, 2019. С.108 – 111.

86.Сосенушкин, Е. Н. Прогнозирование силовых параметров прямого выдавливания ребер стабилизаторов из алюминиевых сплавов/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др./ XII общеросс. н.-практ. конф. «Иннов. технологии и технические средства спец. назначения», Балт. гос. техн. ун-т. СПб, 21-23 ноября 2019 г. 6 с.

87.Сосенушкин, Е. Н. Анализ напряженного состояния при пластическом деформировании / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, А. А. Татаринцев, А. Е. Сосенушкин // В сб.: Проблемы и перспективы развития машиностроения. Сборник научных трудов межд. н.-т. конф., посв. 60-летию Липецкого гос. Техн. Ун-та. А.М. Корнеев (ответственный редактор). 2016. С. 218 – 224.

88.Сосенушкин, Е. Н. Модель деформированного состояния штампуемой заготовки/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, **Е. А. Яновская** и др. / Сб. научн. трудов межд. н-техн. конф., посв. 60-летию Липецкого гос. техн. ун-та, 17-18 ноября 2016г. В 2- ч. Ч.2. С. 224 – 231.

89.Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование нагрева и остывания заготовок и поковок/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ В сб.: Современная металлургия нового тысячелетия. Сб. научных трудов. 2015. С. 159 – 166.

90.Сосенушкин, Е. Н. Обобщенный анализ напряженного состояния формоизменяющих операций листовой штамповки с осевой симметрией / Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, В. В. Емельянов/ В сб.: СОВРЕМЕННЫЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ (СММТ '2015). Сб. трудов 11-й международной научно-технической конференции. 2015. С. 173 – 182.

91.Kadymov, V. A. Stress state parameters of the plastic forming operations / V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, **E. A. Yanovskaya**, V. V. Emelyanov, V. Y Kinderov. /В сборнике: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EUROPEAN SCIENCE AND TECHNOLOGY. 2014. С. 451 – 459.

92.Сосенушкин, Е. Н. Вытяжка цилиндрических деталей из биметаллов/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**, В. В. Емельянов/ В сб.: ОМД 2014. Фундаментальные проблемы. Инновационные материалы и технологии. Материалы Межд. научно-технического конгресса. 2014. С. 181 – 187.

93.Сосенушкин, Е. Н. Повышение эффективности штамповки полых изделий за счет совершенствования математических моделей осесимметричной деформации/ Е. Н. Сосенушкин, **Е. А. Яновская**/ В книге: Математика. Экономика. Образование; Ряды Фурье и их приложения; Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий. МГУ им. М. В. Ломоносова, Мат. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, МФТИ (ГУ), ЮФУ, Гос. морской ун-т им. адм. Ф. Ф. Ушакова, МОО "Женщины в науке и образовании", Учебный центр "Знание". 2012. С. 179 – 180.