

**Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования**

«Московский государственный технологический университет

«СТАНКИН»



На правах рукописи

ЯНОВСКАЯ Елена Александровна

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ВЯЗКОПЛАСТИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ТОНКИХ
ПЛАСТИЧЕСКИХ СЛОЕВ В НЕКАНОНИЧЕСКИХ
ОБЛАСТЯХ**

Специальность 1.2.2 – Математическое моделирование, численные методы и
комплексы программ (физико-математические науки)

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Научный консультант:
доктор технических наук, профессор
Сосенушкин Евгений Николаевич

Москва 2025

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	8
ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКИХ СЛОЯХ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ.....	23
1.1 Практическое приложение теории пластического течения тонкого слоя металлических материалов	23
1.2 Гипотезы, выдвинутые на основе задачи Л. Прандтля в классической формулировке	25
1.3 Математическая модель течения относительно тонкого слоя по поверхностям, которые не подвержены деформированию	27
1.4 Пластическое течение тонкого слоя по упруго-деформируемым поверхностям	33
1.5 Математические модели пластического и вязкопластического течений в тонких слоях	36
1.5.1 Отказ от гипотез в задаче Прандтля с помощью асимптотического анализа.....	37
1.5.2 Внутреннее асимптотическое разложение	38
1.5.3 Осесимметричный аналог задачи Прандтля	40
1.6 Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию.....	40
1.7 Постулаты, следствия и гипотезы, сформулированные на основе решения задачи Л. Прандтля.....	41
1.8 Инструментальные средства численного моделирования	43
1.9 Выводы по главе 1	44
ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ	46

2.1	Общий случай аналога задачи Л. Прандтля для стесненного формоизменения слоя в областях неканонической формы	46
2.2	Метод характеристик	50
2.3	Математическая модель «вязкой жидкости» в виде задачи Коши с граничными условиями	66
2.3.1	Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке с ограничением в одном или нескольких направлениях	69
2.3.2	Постановка и решение практических задач	73
2.4	Численно-аналитические методы решения краевой задачи течения тонкого слоя из разнородных сред с помощью модели «вязкой жидкости»	79
2.4.1	Обобщение и постановка краевой задачи Коши в безразмерных величинах.	80
2.4.2	Задача Коши течения тонкого слоя из разнородных пластических сред как «идеальной жидкости» при свободном растекании	83
2.4.3	Аналитическое решение контактной задачи о сложном нагружении полосы в новой упрощенной постановке	92
2.4.4	Задача сжатия слоя с разнородными свойствами по толщине	96
2.5	Математическая модель свободного растекания пластического слоя на плоскости в виде параболического уравнения.....	102
2.6	Выводы по главе 2	109
ГЛАВА 3. ОБОСНОВАНИЕ И ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ		
МОДЕЛИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ.....		111
3.1	Классификация объектов неканонической формы на основе теории множеств	112

3.1.1 Гиперпространство и информативность различительных признаков.....	112
3.1.2 Метод экспертного опроса для создания производственной системы.....	115
3.2 Теоретико-множественный подход в алгоритме метода экспертной классификации	117
3.3 Методы распознавания образов в алгоритмах обучения и классификации	123
3.4 Построение локального классификатора трехмерных поверхностей .	126
3.5 Алгоритм формирования информативного набора признаков и классификации образов объектов неканонической формы	135
3.6 Метод распознавания объектов неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов	150
3.6.1 Компьютерное моделирование на основе генеративных моделей .	152
3.6.2 Верификация классификатора на выбранных трехмерных и генеративных моделях	156
3.7 Выводы по главе 3	159
ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ ДЛЯ СТЕСНЕННОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ.....	
4.1 Математическая модель решения аналога задачи Л. Прандтля применительно к прямоугольному телу, занимающему односвязную область	162
4.1.1 Объект исследования и расчетная схема	162
4.1.2 Границы выделенных пластических областей.....	164
4.1.3 Постановка краевой задачи в односвязной области.....	165

4.1.4	Алгоритм решения краевой задачи в односвязной области	166
4.2	Решение аналога задачи Л. Прандтля, применительно к прямоугольному телу с контурными ребрами, занимающему двусвязную область	173
4.2.1	Объект исследования и расчетная схема	173
4.2.2	Границы выделенных пластических областей с характерным течением: $S1x, y$ – внешних и $S2x, y$ – внутренних.....	174
4.2.3	Краевая задача в двусвязной области и алгоритм ее решения.....	176
4.3	Математическая модель решения аналога задачи Л. Прандтля применительно к квази-прямоугольному телу с ребрами жесткости, занимающему многосвязную область	195
4.3.1	Объект исследования и расчетная схема	195
4.3.2	Границы выделенных пластических областей с характерным течением материала.....	196
4.3.3	Постановка краевой задачи в многосвязной области.....	199
4.3.4	Алгоритм решения краевой задачи в многосвязной области.....	200
4.4	Математическая модель процесса сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра	222
4.4.1	Объект исследования и расчетная схема	222
4.4.2	Описание границ пластических областей.....	223
4.4.3	Постановка краевой задачи	225
4.4.4	Алгоритм решения краевой задачи стесненного сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра.....	228
4.4.5	Кинематические параметры процесса сжатия пластического слоя с затеканием металла в продольные ребра.....	234

4.4.6 Сила с учетом преодоления трения по плоскостям выдавливаемых рёбер	235
4.4.7 Расчетные характеристики математической модели процесса стесненного сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра	237
4.5 Выводы по главе 4	238
ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТОНКОЛИСТОВЫМ И ТОНКОСТЕННЫМ ОБЪЕКТАМ.....	
5.1 Классификационные признаки исходных объектов.....	239
5.2 Виды нагружения в процессах деформирования	240
5.3 Базовые инвариантные показатели напряженно-деформированного состояния.....	242
5.4 Обобщенные модели напряженного и деформированного состояний	244
5.4.1 Графоаналитическая модель напряженного состояния	246
5.4.2 Графоаналитическая модель деформированного состояния.....	249
5.5 Выводы по главе 5	254
ГЛАВА 6. ФИЗИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ ПО НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ.....	
6.1 Постановка и проведение экспериментов на стесненное сжатие с ограничением течения тонких полос в форме прямоугольника	255
6.2 Анализ аналитических данных в математической модели «идеальной жидкости». Сравнение аналитических и экспериментальных результатов.....	260

6.3 Экспериментальные исследования по сжатию тонких пластин в форме кругового сектора в условиях затрудненного течения	263
6.4 Сравнение аналитического решения задачи пластического течения тонкого слоя в постановке для модели «вязкой жидкости» с результатами эксперимента	267
6.4.1 Постановка эксперимента на сжатие тонких пластин прямоугольной формы в штампе с неподвижными границами	267
6.4.2 Краевая задача о сжатии тонкого пластического слоя прямоугольной формы в плане	269
6.4.3 Анализ точного решения задачи о нестационарном течении «вязкой жидкости»	272
6.4.4 Сравнительный анализ полученных результатов (аналитических и экспериментальных)	274
6.5 Модельный эксперимент для песчаной аналогии	277
6.6 Численные методы расчета и анализа кинематических и динамических параметров деформируемого твердого тела	281
6.7 Обобщенный анализ кинематики течения тонкого слоя: варианты двусвязных областей	283
6.7.1 Разработанные инструментальные средства определения качественных характеристик процесса течения.....	283
6.7.2 Процесс визуализации математической модели течения тонкого слоя между сближающимися поверхностями	287
6.8. Выводы по главе 6	290
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	292
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	297
ПРИЛОЖЕНИЕ	331

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Одним из критериев рациональности технологических процессов изготовления сложных по форме деталей является ресурсосбережение, которое достигается приближением формы заготовок к форме готовых изделий, для чего в большинстве случаев используют высокопроизводительные процессы обработки материалов давлением. Согласно известным классификаторам большую технологическую группу составляют детали удлиненной формы в плане, имеющие тонкие полотна, ребра жесткости или контурные ребра, при изготовлении которых необходимо решать задачи пластического течения материала в тонком слое при его деформации сближающимися поверхностями штампового инструмента. В дальнейшем изложении под тонким слоем будем понимать слой с относительной толщиной $h_0 = \frac{h}{L} \leq 0,1$ (h – толщина плоского протяженного участка полотна или поковки в целом; L – наибольший габаритный размер полотна). При пластическом деформировании возникают повышенные давления, на порядок превышающие сдвиговые характеристики материала слоя, так что в начальном приближении свойства материала в тонком слое можно считать приближенными к свойствам идеальной гидродинамической жидкости. Практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание, при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения, а удельные силы трения на них максимальны и равны пределу текучести материала на сдвиг. Следует отметить другую особенность протекания указанных процессов, определяющую требования к точности конечной детали, это большие контактные давления, вызывающие нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей инструмента, соизмеримые с толщиной растекающегося слоя. А значит, пренебрежение упругими деформациями поверхностей инструмента становится неоправданным. В высокоскоростных процессах обработки давлением существенную роль играют силы вязкости и инерции, значительно затрудняющие физическое моделирование процессов. Нельзя забывать о дополнительном разогреве

деформируемого металла с учетом теплового эффекта деформации, с одной стороны, и охлаждения тонкого слоя, связанного с интенсивным теплообменом со штамповым инструментом, не исключена и диссипация механической энергии. В некоторых случаях нельзя пренебречь влиянием давления на деформацию и течение пластического материала. Некорректным может оказываться предположение о сохранении объема при пластической деформации материала. В механике деформируемого твердого тела (МДТТ) физические соотношения определяют свойства сплошной среды при оказании сопротивления деформированию и описываются условиями пластичности для траекторий малой кривизны. Выдающийся советский и российский ученый в области механики сплошных сред А. А. Ильюшин исследовал объемную задачу течения идеальнопластического тела. В результате, эту задачу удалось свести к исследованию в двумерной (плоской) постановке. Такой переход от объемной к двумерной задаче математической теории течения условно тонкого пластического слоя осуществляется с помощью осреднения по толщине слоя. Решение плоской задачи стало возможным, так как были приняты специальные гипотезы, предложенные и сформулированные при анализе решения задачи Л. Прандтля об осадке образца из пластического материала.

Математическое моделирование на этапах предпроектных исследований позволяет классифицировать объекты производства по топологии, влияющей на общность технологии изготовления и выбор достоверных моделей течения металла, участвующих в расчете технологических режимов в процессах пластического деформирования и оценке напряженно-деформированного состояния с использованием теории нестационарного течения тонких пластических слоев в многосвязных неканонических областях.

Научная проблема, имеющая важное хозяйственное значение, состоит в создании математических моделей и комплексов программ для анализа нестационарного течения тонких пластических слоев в неканонических областях. Сложность проблемы не дает возможности инженерам и технологам воспользоваться научными исследованиями, проведенными в области механики деформируемого твердого тела и вообще в области механики сплошной среды

(МСС). По запросу промышленности возникает необходимость адаптировать математические модели и вычислительные процедуры для конкретных условий и процессов без потери точности. Предлагаемые математические модели уменьшают количество уравнений в постановках задач и, как следствие количество начальных и граничных условий, по сравнению с точными математическими постановками (МСС). При этом сохраняется адекватность предложенных моделей применительно к исходной задаче. В случае невозможности существенного упрощения постановок следует использовать имеющиеся проблемно-ориентированные программные комплексы для численного моделирования процессов МСС. Каждая из рассмотренных моделей реализована аналитическим методом и для этой модели составлен алгоритм решения и соответствующая программа.

Развитие имеющихся и создание новых математических методов исследования нестационарных течений тонких пластических слоев в неканонических областях - **значимая проблема** математического моделирования и современных численных методов, являющихся основой создания проблемно-ориентированных комплексов программ для ЭВМ.

Практические приложения взаимосвязанных моделей течения сплошной среды в тонких слоях приводят к нестандартным краевым, квази-эволюционным и смешанным задачам. Предложенные задачи описываются системами дифференциальных уравнений в частных производных с заданными граничными и начальными условиями. Краевые и смешанные задачи МСС формулируются для однородных сред (в случае, когда коэффициенты уравнений являются кусочно-непрерывными функциями), для однородной и неоднородной сред (в том случае, когда коэффициенты уравнений кусочно-заданные непрерывные функции или функции имеющие разрывы, по крайней мере, первого рода).

Тем самым обоснована **актуальность** темы диссертационного исследования.

Степень разработанности направлений исследования. На сегодняшний день изучены многие математические модели МДТТ, термомеханики,

кинетической теории и т.п. в однородных и кусочно-однородных средах (Б. Е. Победря). Исследование тел с изменяющимися физическими свойствами при изменении геометрического места точек приводит к линейным и нелинейным задачам теории упругости (С. П. Тимошенко), теории пластичности (А. А. Ильюшин) и теории ползучести (Ю. Н. Работнов), тепломассопереноса (А. И. Леонтьев, Л. А. Уварова), термоупругости (Э. М. Карташов), теории потенциалов (Д. Уэрмер) и других задач моделирования поведения сплошных сред.

При постановке и проведении экспериментов по осадке полос (Е. П. Унксов) определены характерные области на поверхности контакта: зона скольжения, где действует трение, соответствующее закону Кулона ($\tau = \mu p$); зона торможения с максимальным значением касательного напряжения на контакте ($\tau = \tau_s$); зона застоя, расположенная вблизи линии точек бифуркации течения, в которых касательное напряжение монотонно убывает. При изменении относительной толщины слоя уменьшаются размеры описанных зон. И. Я. Тарновский, А. Д. Томленов, А. Н. Леванов, И. М. Володин, А. Н. Петров, Э.Зибель, А. Мейл и М. Кокрофт проводили экспериментальные исследования по определению напряжений трения на контакте, приводящими к численным значениям коэффициента или фактора трения для различных условий деформирования. А. И. Александровичем предложен новый закон контактного трения в исследованиях пластических течений по поверхностям, обладающих анизотропными свойствами.

Получены решения задач сжатия пластических слоев с заданной неоднородностью свойств как по толщине (А. И. Кузнецов), так и в плане (В. А. Кадымов).

А. А. Ильюшиным было предложено соотношение для определения скорости точек вновь формируемого контура для деформируемой области

$$v = \frac{1}{2} \frac{d\lambda}{dt} \left(R - \frac{r_0^2}{R} \right); \lambda(t) = \frac{h_0}{h(t)},$$

где R – радиус кривизны плоской кривой в рассматриваемой точке контура; r_0 –

величина, характеризующая точку ребра поверхности давления вдоль линии тока. Эта постановка привела к разработке метода песчаной аналогии. В то же время А. А. Ильюшиным была описана замкнутая система нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных:

$$\text{grad } p = -\frac{1}{h} \left(T_1 \frac{\bar{V} - \bar{V}_1}{|\bar{V} - \bar{V}_1|} + T_2 \frac{\bar{V} - \bar{V}_2}{|\bar{V} - \bar{V}_2|} \right);$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{AB} \frac{\partial(hBu)}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial(hAv)}{\partial \beta} = 0$$

для определения скоростей $u(\alpha, \beta, t), v(\alpha, \beta, t)$ и давления $p(\alpha, \beta, t)$ в области $S(\alpha, \beta, t)$ на заданной основной поверхности с первой дифференциальной формой $ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$ в главных осях α, β ; $h(\alpha, \beta, t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\bar{V}_i(\alpha, \beta, t), i = 1, 2$ – заданные скорости внутренних движений внешних тел; $T_i(p, \mu_i, |\bar{V} - \bar{V}_i|)$ – напряжения трения на контакте; μ_i – коэффициенты трения.

На основе этой системы уравнений В. Н. Безухов получил неполную задачу Коши

$$y^2 y''_{xx} + 2y(1 + y_x'^2) = 2y'_\lambda, \text{ с начальными условиями}$$

$$y(x, \lambda)|_{\lambda=0} = \varphi(x), \dot{y}|_{\lambda=0} = \psi(x)$$

для восстановления контура $y = y(x, \lambda)$ свободно растекающегося слоя по известной области.

В своих работах И. А. Кийко развил теорию течения в сравнительно тонком пластическом слое. В этих работах был получен наиболее общий вид дифференциального уравнения для восстановления границы растекающейся области; а также сформулирована задача о течении слоя между сближающимися поверхностями упруго-деформируемых тел инструмента, которая решена методом вариаций. Учениками и коллегами А. А. Ильюшина профессорами И. А. Кийко и П. М. Огибаловым был использован оригинальный метод «песчаной аналогии» для тонких пластин с ребрами жесткости. С помощью этого метода были определены параметры: давление на поверхностях контакта и силы, необходимые для деформирования. Полученные результаты были подтверждены экспериментально.

Результаты исследований А. А. Ильюшина в нелинейной теории пластичности и теории упругопластических процессов в случае конечных деформаций, получили дальнейшее развитие в работах Г. Л. Бровко, Е. Н. Lee, О. Л. Толоконникова, П. В. Трусова. Однако на практике эти разработки пока не нашли должного применения из-за сложности математического аппарата.

Дальнейшее развитие теории было предложено Д. В. Георгиевским. Им были рассмотрены пластические и вязкопластические течения в тонких слоях и конфузорах. Для нахождения решений сложных задач Д. В. Георгиевский использовал асимптотический анализ, и, в частности асимптотическое разложение по малому параметру, а также, асимптотическое интегрирование в задачах о течениях в различных геометрических областях.

И. В. Костаревым, В. А. Кадымовым, Е. Н. Сосенушкиным на основе «теории течения тонких пластических слоев разработаны современные алгоритмы и методы расчета технологических»¹ [1] параметров для деталей неканонической конфигурации, имеющие контурные и продольные ребра. Было получено доказательство, что при постановке задачи о течении металла в тонком пластическом слое необходимо учитывать влияние касательных напряжений.

Цель работы: создание новых математических, физических и компьютерных моделей теории нестационарного течения тонких пластических слоев в однородных и кусочно-однородных многосвязных областях для их исследования аналитическими, численными и экспериментальными методами, построенными на известных и разработанных алгоритмах и программных комплексах.

Для достижения поставленной цели сформулированы следующие **научные задачи:**

– проведение комплексных исследований научных и технических проблем, связанных с течением тонких слоев пластической среды по поверхностям, включая разработку новых математических методов и моделей, постановку и численно-

¹ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

аналитическое решение задач теории пластичности на их основе определить силовые параметры при нагружении и компоненты тензора напряжений, проанализировать деформированное состояние слоев сплошной среды, включая кинематику течения: компоненты вектора перемещений, тензоров деформаций и скоростей деформаций;

– адаптация метода характеристик для решения контактных задач нестационарного течения в сравнительно тонком слое с помощью модели «идеальной жидкости» в неканонических областях, в научном обосновании ограниченности области применения модели «идеальной жидкости» для свободного растекания слоев по поверхностям и затекания материала среды в пазы, а также математической постановке задач течения пластических слоев в областях неканонической формы;

– научное обоснование области применения модели «вязкой жидкости» для решения задач о свободном растекании слоев по поверхностям и затекания металла в пазы, с учетом касательных напряжений, в том числе при затрудненном течении, а также решение контактной задачи при сложном нагружении слоя в виде полосы с определением критической силы пластического течения при растяжении ее средней части и отсутствии пластической деформации под захватами;

– разработка на основе базовых и производных инвариантных характеристик новых математических моделей напряженного и деформированного состояний, отображающихся на девиаторной плоскости траекториями главных напряжений и деформаций, функционально связанных с механическими схемами напряжений и деформаций при реализации большинства формоизменяющих операций пластической обработки;

– разработка алгоритмов, представленных в виде комплекса программ для вычисления параметров течения сплошной среды в виде тонких слоев, занимающих односвязные и многосвязные области неканонической формы, которые позволяют наряду с вычислением силовых параметров процессов сжатия, анализировать кинематику течения;

– создание методологии и построение классификационных систем тонкопалотных и тонкостенных объектов, формализация которых проведена с помощью разработанных алгоритмов, которые реализуют разноплановые математические

методы распознавания объектов неканонической формы: экспертная классификация на основе теоретико-множественного подхода; решение распознавательных задач, построенных на разделении признакового гиперпространства дискриминантными функциями; использование нейронных сетей с процедурами глубокого обучения, сведенных в комплекс программ, осуществляющих выбор математических моделей пластического течения, связанный со сложной геометрической формой пластических областей.

Объектом исследования являлись течения относительно тонких слоев $\frac{h}{L} \ll 1,0$ (h – толщина; L – максимальный размер в плане) из жесткопластических и вязкопластических сред в неканонических областях.

Предметом разработки и исследования являлись математические методы и аналитические модели нестационарных течений сплошных сред, в том числе неоднородных композиционных, а также численные методы, позволяющие расширить число расчетных характеристик течений.

Научная новизна диссертации основывается на новых нестандартных постановках задач исследования и на полученных основных результатах, которые заключаются в следующем:

1. Установлены связи между различными математическими моделями течения тонкого пластического слоя для обобщения методов решения краевых задач течения с исследованием возможности введения малого параметра при переходе к безразмерным величинам в дифференциальных уравнениях в частных производных параболического типа.

2. Поставлена задача и получено точное аналитическое решение в задаче о течении тонкого слоя, расположенного между наклонными плитами, занимающего круговую область, с установлением следа ребра давлений и кинематики течения. Для численного исследования задачи Коши разработан математический метод сведения уравнения эволюции границы растекающейся области дивергентного вида в частных производных (как частный вид уравнения нелинейной теплопроводности) к обыкновенному дифференциальному уравнению, что позволило получить новые точные решения частных случаев выпуклых границ (эллиптических, параболических,

гиперболических, а также границ, заданных в виде эллиптического интеграла), описываемых кривыми высших порядков.

3. Поставлена и решена контактная задача о пластическом растяжении полосы из однородного металла силами, которые приложены на зажатых ее торцах, для использования в практических целях при правке листов и полос с помощью одноосного растяжения за пределом упругости.

4. Для тонкого слоя односвязной области в виде полосы с неоднородными свойствами по толщине построена математическая модель для анализа напряжений, возникающих в композите, и сил сжатия, достаточных для пластического деформирования только мягкой компоненты слоя, а также силовых параметров в момент, когда пластической деформацией будет подвержена более твердая компонента. Область применения теории течения тонкого слоя дополнена анализом течения односвязной области в виде клина с малым углом в плане.

5. Для обобщенной постановки краевой задачи о свободно растекающемся пластическом слое между жесткими поверхностями получены точные решения эволюционного нелинейного дифференциального уравнения для восстановления контуров односвязных областей с линейными и нелинейными границами.

6. Разработан метод распознавания объектов неканонической формы по топологическим характеристикам, влияющим на выбор математической модели пластического течения, включая алгоритмизацию этапов отбора информативных признаков с использованием математического аппарата, основой которого является концепция дивергенции; разработаны правила классификации деталей (производственная система) с использованием теоретико-множественного подхода к экспертной классификации; построены разделяющие поверхности в информативном признаковом пространстве с использованием метода математической статистики, метода потенциальных функций, а также получено решение классификационных задач с использованием нейронных сетей с разработкой алгоритмов глубокого обучения.

7. На основе базовых и производных инвариантных характеристик построены математические модели напряженного и деформированного состояний,

отображающиеся сечениями предельных поверхностей текучести девиаторной плоскостью.

8. Установлено, что полученные аналитические данные удовлетворительно коррелируют с результатами экспериментов по стесненному пластическому течению слоев в виде прямоугольника и кругового сектора в плане для обоснованного выбора математических моделей, которые дают более точные решения. Результаты теоретического анализа с достаточной точностью совпадают с результатами, полученными численными методами и результатами, полученными при проведении физических экспериментов по пластическому деформированию тонкоплатных объектов или имеющих ребра жесткости и занимающих односвязные и многосвязные области.

Теоретическая и практическая значимость работы. В рамках общего подхода к решению краевой задачи Коши применительно к нестационарному течению тонкого слоя по поверхностям получил дальнейшее развитие математический аппарат анализа напряженно-деформированного состояния (НДС) растекающейся по поверхностям сплошной среды в виде тонкого слоя, занимающего многосвязные области, ограниченные контурами, составленным из кусочно-линейных или нелинейных функций.

Для объектов исследования различной формы, занимающих многосвязные области, на основе общих принципов, построен алгоритм определения линий тока, линий уровня и проводится построение линий ветвления течения (ребер давления) для различных областей с характерным течением и формулируются краевые условия на границах областей.

Работоспособность всех разработанных математических моделей нестационарного течения пластических слоев проверена численными методами решения с помощью проблемно ориентированных программных пакетов, основанных на методе конечных элементов, и подтверждена экспериментальными исследованиями применительно к разным маркам металлов и сплавов, деформируемых в различных условиях.

Методология и методы исследования. Для решения поставленных задач были

использованы методы МДТТ, методы математической физики и математической статистики, а также численные методы. Для оценки достоверности результатов теоретических исследований ставились физические эксперименты по формоизменению реальных объектов на прессах и испытательных машинах, координатные сетки на образцах воспроизводились и считывались на инструментальном микроскопе УИМ-21 с точностью 0,01 мм. Разработана методология решения классификационных задач, для реализации этапов которой использованы методы теории вероятности и математической статистики, экспертной классификации, принципы построения и обучения нейронных сетей на базе языка *Python*. Часть разработанных математических методов и алгоритмов реализована в виде 10 программ для ЭВМ, на которые получены свидетельства о регистрации Роспатента и которые включены в программный комплекс. Вычисления численным методом и визуализация процесса течения металла поддерживались *Web* технологиями с помощью *Google* браузера с применением языка разметки *HTML*, формального языка *CSS* для описания внешнего вида интерфейса и языка программирования *Javascript*.

Основные положения и научные результаты, выносимые на защиту, полученные автором лично или вклад автора в которые был определяющим:

1. Метод характеристик, адаптированный для решения задач пластического течения тонких слоев в ортогональных прямоугольной и криволинейной системах координат.

2. Новые математические модели нестационарных течений тонких слоев по недеформируемым и упруго-деформируемым поверхностям, включая новые постановки краевых задач течения пластического слоя и, в зависимости от используемых гипотез, приближенные или точные методы аналитических решений в моделях «идеальной» и «вязкой» жидкостей.

3. Метод решения задач пластического течения в слое, составленном из различных сред, как по толщине, так и в плане, в модели «вязкой» жидкости, новизна которого состоит в анализе изменения границы между компонентами композита.

4. Алгоритмы вычисления параметров течения сплошной среды в виде тонких

слоев, занимающих односвязные и многосвязные области неканонической формы, которые позволяют наряду с вычислением силовых параметров процессов сжатия, анализировать кинематику течения.

5. Эволюционное уравнение, описывающее изменение границ неканонических областей, на различных этапах течения.

6. На основе базовых и производных инвариантных характеристик сплошной среды новые математические модели НДС, представляющие собой проекции на девиаторную плоскость траекторий главных напряжений и деформаций, и функционально связанные с видами механических схем напряжений и деформаций на конкретных операциях обработки металлов давлением.

7. Комплекс программ, содержащий процедуры поддержки и принятия решений на всех этапах предпроектных исследований, среди которых несколько дополняющих друг друга программных кодов, реализующих анализ информативности различительных признаков, распознавание и классификацию сложных геометрических областей, логику выбора математических моделей для решения задач пластического течения слоев по поверхностям, решения эволюционных уравнений восстановления изменяющихся границ растекающейся пластической области, определение динамических и кинематических параметров течения сплошной среды.

Степень достоверности результатов работы подтверждена корректными постановками задач для исследования, алгоритмами их решения и результатами сравнения с задачами, и данными, полученными по методикам независимых исследователей. Полученные автором результаты согласуются с известными результатами в предельных случаях.

Апробация диссертации. Основные результаты диссертации докладывались на международных конгрессах и симпозиумах, всероссийских конференциях и научных семинарах, в том числе: Математика. Экономика. Образование. Ряды Фурье и их приложения. Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий. 2012; Фундаментальные проблемы. Инновационные материалы и технологии. Международный научно-технический конгресс. Москва, 2014; 11 международная научно-техническая конференция «СОВРЕМЕННЫЕ

МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ (СММТ '2015)». СПб., 2015; Современная металлургия нового тысячелетия. Липецк, 2015; Международная научно-техническая конференция «Проблемы и перспективы развития машиностроения», посвящённая 60-летию Липецкого государственного технического университета. Липецк, 2016; Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста: матер. Всероссийской н.-техн. конф. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019; XII общероссийская н.-практ. конференция «Инновационные технологии и технические средства специального назначения», Балт. гос. техн. ун-т. СПб., 21-23 ноября 2019; Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечнопрессового машиностроения. Рязань: ОАО «Тяжпрессмаш», 2019; Теоретическая и прикладная механика междунар. научно-техн. конференция. Минск: БНТУ, 2019, 2022; Двадцать седьмая международная научная конференция "МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ", XI Общероссийский симпозиум с международным участием "Биофизика сложных систем: вычислительная и системная биология, молекулярное моделирование ", 2020; Международный симпозиум по проблемам механики деформированного твердого тела, посв. 110-летию А. А. Ильюшина. М.: МГУ им М.В. Ломоносова, 20-21 января 2021; Самарские чтения (в память об академике А. А. Самарском). Материалы международной конференции. Москва, 2022; Созвездие Роскосмоса: траектория науки. Материалы докладов отраслевой научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 2023; I Международная научно-практическая конференция (в рамках Международного кузнечного фестиваля «Секреты средневековых кузнецов»). Москва, 2023; Международные научные конференции по моделированию нелинейных процессов и систем, МГТУ «СТАНКИН», г. Москва, 2019, 2021, 2023, 2024 г.;

–доложены на научных семинарах:

кафедры теории упругости МГУ им. М. В. Ломоносова «Проблемы геометрии и механики» научные руководители: Чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, заведующий кафедрой теории упругости ФГБОУ ВО

«Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова» Георгиевский Д. В., Чл.-корр. РАН, доктор физико-математических наук, профессор РАН, М. В. Шамолин (2019, 2022, 2024); кафедры прикладной математики «МГТУ «СТАНКИН», зав. каф. д.ф.-м.н., проф. Л. А. Уварова, (2024, 2025).

Публикации: Основные результаты диссертационного исследования опубликованы в 67 печатных работах: из них 25 работ в ведущих рецензируемых научных журналах, которые входят в утвержденный ВАК Минобрнауки Российской Федерации по специальности 1.2.2 – «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) [88, 123, 124, 135, 140, 141, 192, 193, 212, 229, 239, 241, 242, 244, 245, 248, 262, 266, 279, 280, 294, 297, 307, 318, 319];

–10 статей в журналах, индексируемых в наукометрических базах данных *Web of Science* и *Scopus*. [155, 214, 157, 218, 231, 247, 253, 278, 282, 296].

–3 рецензируемые монографии [122, 250, 258];

–в 8 работ опубликованы других рецензируемых периодических изданиях [137, 138, 210, 213, 219, 221, 226, 296];

– 21 публикация в трудах конференций [89, 136, 142, 152, 153, 154, 211, 217, 224, 227, 228, 230, 232, 233, 306, 237, 238, 251, 252, 281, 292]

– получено 10 свидетельств на программы ЭВМ [144, 145, 158, 170, 194, 203, 204, 235, 283, 284];

–16 патентов, из которых 10 на изобретения [222, 223, 243, 261, 285, 286, 314, 315, 316, 317] и 6 на полезные модели [249, 287, 288, 289, 290, 291].

Соответствие диссертации паспорту научной специальности. Диссертационная работа соответствует паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) в направлениях исследований пунктов; 2. Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий. 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента. 4. Разработка новых математических

методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели. 5. Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей. 8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, шести глав, заключения, библиографического списка, включающего в себя 319 наименований, и 3 приложения. Работа содержит 330 страницы машинописного текста основной части, включающей 81 рисунок, 16 таблиц и 33 страницы библиографии. Приложение содержит 5 страниц машинописного текста.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ПРОБЛЕМЫ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКИХ СЛОЯХ НА СОВРЕМЕННОМ ЭТАПЕ

1.1 Практическое приложение теории пластического течения тонкого слоя металлических материалов

При проектировании процессов пластического деформирования довольно часто приходится решать задачи пластического течения тонкого слоя материала между движущимися навстречу друг другу с заданными скоростями частями штампового инструмента. К их числу принадлежат: объемная штамповка холодная и с предварительным нагревом заготовок [2-9], прессование тонкостенных элементов конструкций [10], прокатка тонких листов [10-12] и другие процессы локального деформирования вращающимся инструментом: сферодвижная штамповка [13] ротационная вытяжка [14], поперечно-винтовая прокатка [15], радиально-сдвиговая прокатка [16] которые описываются достаточно сложными пространственными нелинейными краевыми задачами, в постановку которых включены уравнения математической физики [17]. При реализации рассматриваемых технологий на контактных поверхностях возникают повышенные давления, на порядок больше сопротивления материала слоя сдвиговым деформациям [18]. В связи с этим можно в некотором приближении считать, что физико-математические характеристики тонкого слоя рассматриваемого элемента аналогичны «свойствам идеальной гидродинамической жидкости»² [1,19–21]. Практически вдоль всей контактной поверхности наблюдается проскальзывание [22, 23], при котором поверхности контакта совпадают с поверхностями скольжения [24], а удельные силы трения на них максимальны [25–27] и равны пределу текучести материала на сдвиг [28, 29]. Следует отметить другую особенность протекания указанных процессов, определяющую требования к

² Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

точности конечной детали или поковки. Понятно, что большие контактные давления вызывают нормальные упругие перемещения рабочих поверхностей инструмента, соизмеримые с толщиной текущего слоя [30, 31], а значит, пренебрежение упругими деформациями поверхностей инструмента становится неоправданным [32, 33]. Поэтому необходимо развить подход к решению нестационарной задачи течения слоя пластического материала по поверхностям с учетом их упругих деформаций [34, 35]. В работе [36] с использованием винклеровской модели упругого основания разработан метод решения упомянутых задач и получены точные решения [37].

В высокоскоростных процессах обработки давлением существенную роль играют силы вязкости и инерции [38, 39], значительно затрудняющие физическое моделирование, где важную роль играют процессы дополнительного разогрева деформируемого металла за счет теплового эффекта деформации [40, 41], с одной стороны, и охлаждения тонкого слоя, связанного с интенсивным теплообменом со штамповым инструментом, не исключена и диссипация механической энергии. В процессах горячей обработки, при которых происходит интенсивный теплообмен с внешними телами, появляются приконтактные слои с существенно меньшей температурой, что обуславливает эффект «холодной сварки», связанный с адгезионными процессами [42].

В некоторых случаях не оправдано пренебрежение влиянием давления на реологию материала [43, 44], так как в рассматриваемых процессах нет определенности в граничных условиях и сами границы заранее неизвестны и их необходимо найти по ходу решения задачи [45].

При обработке пористых материалов [46, 47] возникает необходимость учитывать объемную сжимаемость материала, т.к. грубым оказывается предположение об объемной несжимаемости [48, 49, 50, 51]. Расчет силовых и кинематических параметров процессов остается сложным, дополнительное вращение в процессе осадки заготовки снижает величину давления на контактных поверхностях, сказывающегося на уменьшении упругой составляющей деформации штамповой оснастки [52], что уменьшает сопротивление деформированию.

1.2 Гипотезы, выдвинутые на основе задачи Л. Прандтля в классической формулировке

Для начала рассмотрен случай, в котором начальными упругими деформациями, а также вязкостью и незначительным упрочнением можно пренебречь. Предположим, что рассматриваемый материал несжимаемый идеальножесткопластический и удовлетворяет тензорнолинейным определяющим соотношениям и квадратичному критерию Мизеса – Генки [53] $\sigma_u = \sigma_s$, где $\sigma_u = \sqrt{\tilde{s}}$ интенсивность напряжений; \tilde{s} – девиатор напряжений; σ_s – предел текучести. Процесс течения осуществляется в плоской области Ω , показанной на рис. 1.1, где

$$\Omega = \{-l(t) < x_1 < l(t), -h(t) < x_2 < h(t)\},$$

граница $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$, причем $h \ll l$ для любого $t \geq 0$. В начальный момент времени область, занятая материалом, имела следующий вид

$$\Omega_0 = \{-l_0(t) < x_1 < l_0(t), -h_0(t) < x_2 < h_0(t)\},$$

при этом $\partial\Omega_0 = \Gamma_0$, так что в силу несжимаемости $lh = l_0h_0$.

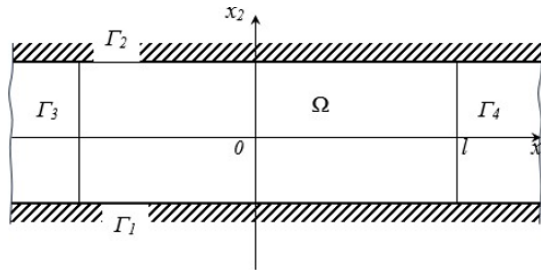


Рис.1.1. Схема процесса сжатия слоя

Впервые вывод общего для «всей области достаточно гладкого решения, предложила Х. Гейрингер»³ [54,55, 56].

«Области вблизи границ Γ_3 и Γ_4 оказываются зонами краевого эффекта, в которых полученное решение нельзя применить»⁴ [54]. Данный случай аналогичен задаче теории идеальной пластичности и принципа Сен-Венана [54,55, 56].

³ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Известия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

⁴ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Известия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

Математический аппарат для изучения линий скольжения в подобных задачах построен в [57]. «В зависимости от поведения пластической массы вблизи плит выделяются активное и пассивное пластические состояния материала (рис.1.2).



Рис. 1.2. Схемы возможных профилей скорости

Профили, изображенные на рисунке 1.2 соответствуют активной и пассивной деформациям пластического материала, при этом следует отличать активный процесс, или нагрузки, и пассивный процесс, или разгрузки в теории пластичности. При условии сближения жестких плит (материал начинает течь) следует принять, что имеет место профиль скорости $v_1(x_2)$, изображенный на рис. 1.2 а»⁵.

«Решение для случая полосы конечной длины со ссылками на эксперименты Ф. Одквиста и Дж. Ная описано в [56]. Приближенный анализ поля перемещений при уменьшении расстояния между плитами на конечную величину, предложен»⁶ в [54,58] и В. А. Кадымовым, Н. А. Беловым и Е. Н. Сосенушкиным в работе [59], где описаны результаты современных экспериментов по стесненной осадке тонкого слоя.

«Известны обобщения решения Прандтля, опубликованные в учебниках по идеальной пластичности и в монографиях [56, 57, 60-64]. (см. в [56] обзор работ В. Гартмана), пространственного напряженно-деформированного состояния при сжатии [65]. Учет многослойности, термодиффузии и сжимаемости материала [66], упругой деформации плит, сил инерции [67] и других технологических условий сжатия [68, 69]. Некоторые кинематические и силовые характеристики течения из решения Л. Прандтля редко встречающиеся даже в специальной и учебной

⁵ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

⁶ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

литературе, приведены в [70]. В этой же работе исследованы возмущения данного решения произвольной слабой неоднородности»⁷ [70].

Рассмотрены некоторые, применяемые на практике решения, принимая допущения о малости начальных упругих деформаций материала и его несжимаемости. При этом материал считается идеально жесткопластическим и подчиняется тензорно линейным определяющим соотношениям и скалярному квадратичному критерию Мизеса – Генки [53]: «

$\sigma_u = \sigma_s$, где $\sigma_u = \sqrt{\tilde{s} : \tilde{s}}$ интенсивность напряжений;

\tilde{s} – девиатор напряжений;

σ_s – предел текучести»⁸ [59].

1.3 Математическая модель течения относительно тонкого слоя по поверхностям, которые не подвержены деформированию

В теории обработки давлением [40, 71, 72] принято считать, что свойства материала пластического слоя удовлетворительно описываются уравнениями пластичности для траекторий малой кривизны. А. А. Ильюшин [60] предложил «двумерную, осредненную по толщине слоя, математическую теорию течения в тонком пластическом слое, к которой приводит исходная трехмерная задача течения идеально пластического тела»⁹ [19]. Переход к двумерной, плоской в плане задаче проводился на основе специальных гипотез, предложенных в результате анализа

⁷ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля. // Известия РАН. МТТ. №1, 2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

⁸ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212. ISSN: 2074-0530

⁹ Ильюшин, А. А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность / Составители Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 480 с.

известного решения Прандтля в задаче об осадке плоского слоя пластического материала (рис. 1.3).

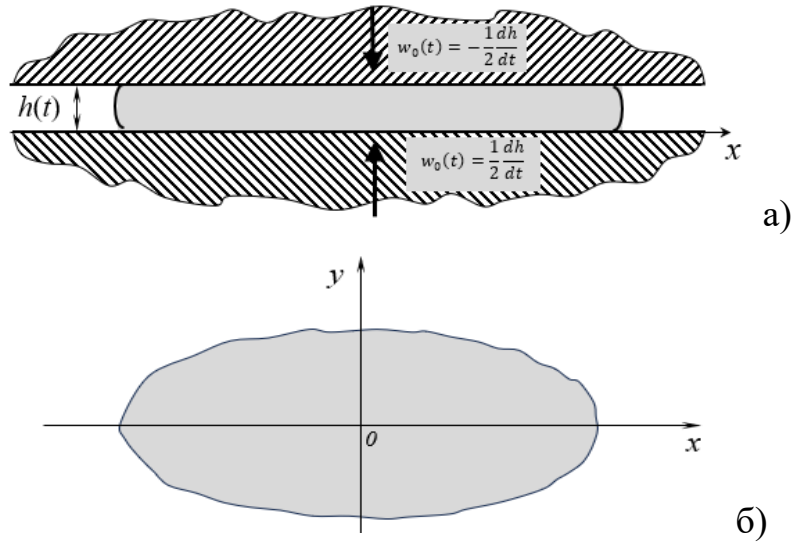


Рис. 1.3. Изменение пластического образца в разрезе (а), и вид сверху (б).

В рамках этой модели А. А. Ильюшин сформулировал краевую задачу, основанную на модели «вязкой жидкости» [73] в области с подвижной границей относительно трех (осредненных по толщине слоя) неизвестных функций - контактного давления и двух компонент скорости течения [19]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{\tau_s}{h} \left(\frac{u - u_1}{\sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2}} + \frac{u - u_2}{\sqrt{(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2}} \right), \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{\tau_s}{h} \left(\frac{v - v_1}{\sqrt{(u - u_1)^2 + (v - v_1)^2}} + \frac{v - v_2}{\sqrt{(u - u_2)^2 + (v - v_2)^2}} \right), \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (1.14)$$

где p, u, v – контактное давление и компоненты векторов скорости течения

$$\vec{v}_1 = (u_1, v_1) \text{ и } \vec{v}_2 = (u_2, v_2)$$

- известные скорости внутренних движений поверхностей тел инструмента относительно неподвижной геометрической поверхности; $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ предел текучести пластического материала в рассматриваемой области; $h = h(t)$ - известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln \left(\frac{h(t_0)}{h(t)} \right)$ - степень деформации, где t_0 - некоторый начальный момент времени.

А. А. Ильюшин предложил упрощенную постановку задачи в «модели «идеальной» жидкости». Все последующие исследователи в своих работах ограничивались этой упрощенной постановкой. Были предложены метод аналогий с песчаной насыпью [19, 60], метод Лежандра в решении статической задачи относительно контактного давления [74], вариационные методы [75], основанные на методе характеристик [64, 76], численно-аналитические решения практических задач¹⁰ [59, 66, 77, 78]. Теория течения тонкого пластического слоя (ТТПС) была распространена на горячие процессы [79]. В работах [80, 81] «исследована кинематика процесса растекания пластического слоя, выведено дифференциальное уравнение параболического типа для определения плоского в плане контура области, занятой растекающимся пластическим слоем»¹¹[80].

В дальнейшем теория течения тонкого слоя «получила обоснованное распространение на случай течения по поверхностям с ярко выраженной фактурой (анизотропия свойств сил трения на контакте) [76, 82–84], для высокоскоростных процессов [77], для процессов пластической обработки материалов, обладающих как свойствами со структурной зависимостью (порошковые, спеченные материалы) [46, 63, 85], так и объемно сжимаемых [59, 64, 65]. Отметим, что условие объемной несжимаемости, которое используется в модели процессов пластического течения, становится неприемлемым при расчете технологических задач, связанных с порошковой металлургией»¹² [59].

Если внутренние движения физических поверхностей отсутствуют (как частный случай) [19]

$$(\vec{v}_1 = \vec{v}_2 = 0),$$

то дифференциальные уравнения квазистатического равновесия упрощаются:

¹⁰ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212.

¹¹ Кадымов, В. А. К исследованию дифференциального уравнения свободного растекания пластического слоя на плоскости/ В.А. Кадымов, Известия Тул ГУ. 2008. Вып.2. С.86-92.

¹² Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212.

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (1.17)$$

На свободной, заранее неизвестной границе $\Gamma_\sigma: F(x, y, z) = 0$ задаются два скалярных динамических условия:

$$\sigma^{(n)} = \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y; \sigma_{xy}n_x + \sigma_{yy}n_y) = \vec{0}, \quad (1.18)$$

где вектор нормали к границе

$$\vec{n} = (n_x, n_y) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

компоненты тензора напряжений $\tilde{\sigma}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}, \sigma_{xy} = \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \sigma_{yy} \\ &= -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned}$$

кинематическое условие

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\frac{dF}{dt}}{|\text{grad}F|}, \quad (1.19)$$

из которого определяется сама граница $\Gamma_c: G(x, y, t) = 0$ (как правило, неизвестная) задаются следующие два условия: одно динамическое относительно касательного напряжения

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}| = |\sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y| = \mu\tau_s, (0 \leq \mu \leq 1) \quad (1.20)$$

и одно кинематическое условие в виде условия непроницаемости на границе

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\frac{dG}{dt}}{|\text{grad}G|}, \quad (1.21)$$

где вектора $\vec{\tau}$ и \vec{n} - единичные векторы касательной и нормали к Γ_c . В частности, на неподвижной границе нормальная скорость равна нулю.

В такой области решение ищется на основе упрощенной постановки краевой задачи в модели «идеальной» жидкости, которая задается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка. В этой постановке пренебрегают касательными напряжениями:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.22)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (1.23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (1.24)$$

Количество граничных условий для задачи (1.22, 1.23, 1.24) уменьшается. На свободной границе

$$p = \sigma_s, \quad (1.25)$$

если граница образована пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает металл, то

$$p = 2\sigma_s, \quad (1.26)$$

а в случае, если на границе растекающегося пластического слоя затруднено затекание в пазы -

$$p = p_\Gamma(\eta), \quad (1.27)$$

где η - параметр вдоль контура области.

«Из первых двух уравнений последней системы нетрудно получить одно нелинейное дифференциальное уравнение относительно контактного давления:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 \equiv \text{grad}^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2}, \quad (1.28)$$

которое вместе с граничным условием (1.27) представляет краевую задачу относительно контактного давления»¹³ [1].

В рамках упрощенной постановки была исследована кинематика процесса растекания пластического слоя и выведено эволюционное уравнение,

¹³ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

определяющее свободную границу растекающейся области. «Будем считать, что сравнительно тонкий слой идеально пластического материала в начальный момент $t = t_0$ занимает плоскую область, ограниченную кусочно-гладким контуром. Слой сжимается жесткими плоскостями массивных плит, закон движения которых известен. Это означает, что толщина слоя – некоторая известная функция времени и, вообще говоря, координат. Предполагается, что область S симметрична относительно оси Ox , и след ребра (линия ветвления течения слоя в двумерной области, занятой свободно растекающимся пластическим слоем) принадлежит оси Ox . В заданных предположениях задача определения контура свободно растекающегося пластического слоя на плоскости может ставиться и решаться отдельно от краевой задачи растекания пластического слоя в области с подвижной границей. Задача может быть сформулирована следующим образом: найти кривую $y = \varphi(x, t)$, симметричную относительно оси Ox и удовлетворяющую эволюционному дифференциальному уравнению»¹⁴ [1]:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varphi \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\varphi^2}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0 \quad (1.29)$$

и условию, которое задает контур области в начальный момент времени:

$$t = t_0 \Leftrightarrow \lambda = \lambda_0 = 0: y = \varphi_0(x) \quad (1.30)$$

«Приведенное уравнение впервые было предложено в работе В. Н. Безухова [86]. В работах И. А. Кийко [87] было обобщено на случай течения слоя переменной толщиной и сделаны следующие заключения:

- доказана асимптотика решения уравнения (1.29) при больших степенях деформации в случае, когда S – замкнутая область с гладким контуром, то при $t \rightarrow +\infty$ область S приближается к круговой;
- получен класс решений подобия в задаче о свободном растекании пластического слоя, ограниченного в начальный момент алгебраической кривой второго порядка»¹⁵ [1].

¹⁴ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

¹⁵ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

В работах [88, 89] получены другие формы представления эволюционного уравнения, а также установлено, что указанное уравнение сводится к частному случаю нелинейного уравнения теплопроводности. Следует предостеречь от неверных толкований – не все «полученные точные аналитические решения нелинейного уравнения теплопроводности можно принять в качестве решения задач растекания пластических слоев – необходимо установить для каждого конкретного решения возможность его физической реализации»¹⁶ [59]. Другие подходы и точные решения для эволюционного уравнения растекания предложены в [90, 91].

Выписаны новые точные частные решения эволюционного уравнения, полученные с помощью метода разделения переменных [92] и метода автомодельных преобразований [93].

1.4 Пластическое течение тонкого слоя по упруго-деформируемым поверхностям

«В работах И. А. Кийко [34] и других авторов [35] ТТПС получила распространение на случай пластического течения по упруго-деформируемым поверхностям. Иллюстрация к этой задаче представлена на рис. 1.4. Требуется найти контактные давления $p = p(x, y)$, а также нормальные упругие перемещения $w(x, y)$ контактных поверхностей внешних тел из решения следующей задачи»¹⁷ [1]:

¹⁶ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора / В. А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Известия МГТУ МАМИ, 2013, № 2(16), том 2.

¹⁷ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В.А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

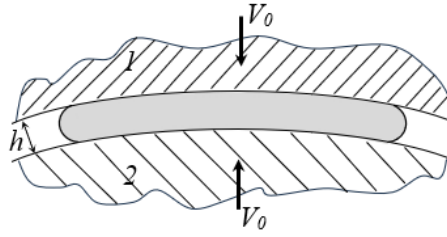


Рис. 1.4. Пластическое течение в тонком слое по упруго-деформируемым поверхностям

$$F(x, y, p, p'_x, p'_y) \equiv (p'_x)^2 + (p'_y)^2 - \frac{4\tau_s^2}{(h_0(x, y) + \check{w}p)^2} \quad (1.31)$$

$$\check{w}p = \iint_{(S)} (K_1(\vec{x}, \vec{x}') + K_2(\vec{x}, \vec{x}')) p(\vec{x}') d\vec{x}', \quad (1.32)$$

$$P \Big|_{\partial S} = P_0, \quad (1.33)$$

где $h_0(x, y) + \check{w}p$; $h_0 = h_0(x, y)$ – заданная толщина пластического слоя (если инструменты считать недеформируемыми), определяемая законом сближения поверхностей тел инструмента; $\check{w}p$ – нормальные (к срединной поверхности слоя) упругие перемещения точек на контактной поверхности;

$$K_i(\vec{x}, \vec{x}'), (i = 1, 2)$$

– известные из эксперимента ядра, которые определяют упругие свойства тел инструмента, и зависят от свойств контактирующих тел, состояния поверхностей контакта, формы и размеров, воздействующих тел. Предполагается, что $h_0(x, y)$ – слабо изменяющаяся функция координат, так что

$$\left| \frac{\partial h_0}{\partial x} \right| \ll 1, \left| \frac{\partial h_0}{\partial y} \right| \ll 1.$$

Для решения задачи (1.31)–(1.33) в работе [94] предложен метод последовательных приближений, при этом вопрос о сходимости метода не исследован.

В работе [91] зависимость (1.32) задавалась в виде модели винклеровского упругого основания ($\check{w}p = \lambda \cdot p(x, y)$); с ее помощью исследовано влияние упругих деформаций контактирующих тел на процесс растекания пластического слоя; с их

учетом выведено нелинейное дифференциальное уравнение эволюционного типа для определения контура растекающегося пластического слоя. Решены задачи растекания пластического слоя в областях, ограниченных кривыми второго порядка. Получены поправки к точным решениям задач о растекании пластического слоя по недеформируемым поверхностям, вызванные учетом упругих деформаций, воздействующих тел. Позже И. А. Кийко [95] вместо (1.32) предложил использовать модель обобщенного винклеровского основания

$$\check{w}u = \sum_{i=1}^n a_i u^i, \quad (1.34)$$

где a_i ($i = 1, \dots, n$) – известные из опыта константы, характеризующие свойства контактирующих тел. В частности, если

$$a_1 \neq 0, a_2 = a_3 = \dots = a_n = 0,$$

соотношения (1.34) переходят в известную простейшую модель винклеровского упругого основания.

Теория течения в тонком пластическом слое развивалась следующим образом:

– по поверхностям с ярко выраженной анизотропией свойств сил трения на контакте [83]. Для описания свойств таких контактных поверхностей вводится тензор $\check{\varphi}$ анизотропности свойств поверхности контакта [82] так, что вектор контактного трения \vec{T} и вектор относительного скольжения $\frac{\vec{v}-\vec{v}_1}{|\vec{v}-\vec{v}_1|}$ на поверхности контакта, в отличие от классического (изотропного) случая, оказываются неколлинеарными:

$$\vec{T} = \check{\varphi} \frac{\Delta\vec{v}}{|\Delta\vec{v}|}.$$

Здесь $\Delta\vec{v} = \vec{v} - \vec{v}_1$, \vec{v}, \vec{v}_1 – скорости пластического слоя и инструмента в точках поверхности контакта. Основу такой теории построил И. А. Кийко [96]. Остается открытой проблема создания и внедрение инструментов с рельефно-выраженными поверхностями контакта, что способствовало бы созданию направленных потоков

пластического течения, лучшему заполнению труднодоступных мест в гравюрах штампов.

1.5 Математические модели пластического и вязкопластического течений в тонких слоях

Моделирование квазистатических и динамических течений в тонких слоях, плоских и конических конфузорах является основой для проектирования машин и установок по обработке материалов давлением. Тонкослойные течения по виду граничных условий и порядку кинематических и силовых величин, входящих в их описание, с определенной долей условности, можно разбить на течения типа Пуазейля и типа Прандтля [97].

Пуазейлевское течение, пусть даже оно осуществляется в слое с переменной во времени толщиной, отличается прилипанием материалов к границам, конечностью во всех точках скоростей течения и давления и носят чисто сдвиговой характер. Они моделируют массоперенос среды вдоль слоя (трубы или канала) под действием перепада давления либо массовой силы. Основной практической задачей при изучении таких течений является нахождение зависимости расхода от давления и оптимизация этого показателя.

Характерные черты прандтлевских течений – сильное проскальзывание материала на движущихся навстречу друг другу границах. Неограниченность при стремлении толщины к нулю продольной скорости (на периферии) и давления (в центральной части области) и, как следствие этого, структурная перестройка картины течения вблизи центрального по простираанию сечения слоя. Главной задачей здесь является определение суммарной силы, необходимой для процессов выдавливания и утонения слоя. Поэтому уделим внимание именно таким течениям, их особенностям в зависимости от геометрии области, определяющих соотношений материала и некоторых других внешних параметров [54].

1.5.1 Отказ от гипотез в задаче Прандтля с помощью асимптотического анализа

«Плоская задача о квазистатическом сжатии между недеформируемыми шероховатыми плитами тонкого идеально пластического слоя (задача Прандтля) имеет хорошо известное аналитическое решение во всех точках, достаточно далеких от среднего сечения слоя и его концов. Это решение, как статическая, так и кинематическая его составляющие, выведено на основе гипотезы Прандтля [23] о линейности по толщине слоя касательного напряжения, принимающего свое максимальное по модулю значение на поверхности плит (если плиты абсолютно шероховаты, то это значение есть предел текучести при сдвиге)»¹⁸ [54]. Гипотеза Прандтля хорошо подтверждается экспериментами, которые проводились на основе работы [23].

Для нахождения классического решения данной задачи необходимо отказаться от статических или кинематических гипотез, которые накладываются на заранее известные величины. Возникает так же вопрос о существовании других аналитических решений, в которых предложенные гипотезы не реализуются и которые в эксперименте не наблюдаются.

«На основе асимптотического анализа с естественным малым геометрическим параметром единственным образом было получено точное решение (при условии конечности членов асимптотических разложений), совпадающее с обобщенным решением Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Строго показана неправомерность таких асимптотик вблизи среднего сечения слоя, где построено другое, внутреннее»¹⁹ [54], асимптотическое разложение [97].

¹⁸ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

¹⁹ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

«Неприменимость этого решения вблизи среднего сечения строго следует из потери асимптотичности (в смысле Пуанкаре) разложения (1.35) для компонент скорости v_1 . Кроме того, данное решение неприменимо в зоне краевого эффекта, т.е. вблизи сечений $\eta_1 = \pm 1$, так как на границе сечений требуется сформулировать точные граничные условия»²⁰ [54].

«Помимо геометрических ограничений применимости классического решения Прандтля существуют и физико-механические, связанные с требованием квазистатичности процесса сжатия слоя. Отсюда следует, что отношение текущей ширины слоя к длине должно быть, с одной стороны, много меньше единицы для правомерности приближения тонкого слоя и возможности асимптотических разложений по параметру α , но, с другой стороны, много больше отношения характерного динамического напора к пределу текучести при сдвиге. В частности, решение (1.33), (1.34) неприменимо при $h(t) \rightarrow 0$, т.е. при $t \rightarrow \frac{h_0}{v}$, а также, для сред близких к идеальной жидкости, где инерционными эффектами пренебрегать уже нельзя»²¹ [54].

Подобное асимптотическое исследование для осесимметричного аналога задачи Прандтля (растекающегося круглого диска между двумя сближающимися абсолютно жесткими шероховатыми плитами) предложено в [98].

1.5.2 Внутреннее асимптотическое разложение

Введем новые безразмерные координаты ξ_1 и ξ_2 соотношениями

$$\xi_1 = \frac{(lx_1)}{h^2} = \frac{x_1}{(\alpha h)}, \xi_2 = \frac{x_2}{h}, \quad (1.35)$$

²⁰ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

²¹ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83-93. ISSN: 1026-3519

так, что квадрат $|\xi_I| < 1$ на плоскости (ξ_1, ξ_2) будет соответствовать тонкой вертикальной полоске в середине области Ω (рис. 1.5).

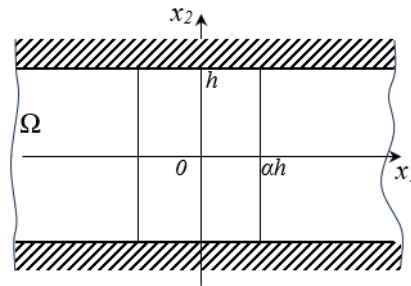


Рис. 1.5. Выделенный участок области Ω

Вместо (1.35) рассмотрим другие, внутренние, асимптотические разложения пяти неизвестных величин, входящих в (1.25) – (1.28), по тому же малому параметру $\alpha = \frac{h}{l}$ [97]:

«В асимптотическом анализе с малым геометрическим параметром $\alpha = \frac{h}{l}$ не используются какие-либо первоначальные статические или кинематические гипотезы, однако он приводит к единственному решению, совпадающему с обобщенным решением Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Это решение является точным в смысле конечности ненулевых членов асимптотических рядов. Неправомерность выбранных разложений вблизи среднего сечения слоя строго следует из потери в этой области асимптотичности (в смысле Пуанкаре) ряда для продольной компоненты скорости. Другое построенное в работе [54], разложение (в координатах ζ_1, ζ_2) так же точно и физически соответствует сжатию тонкой вертикальной полоски в середине слоя. Возможные сращивания двух указанных разложений в сечении, удаленном от середины на расстояние, равное толщине слоя, производятся по давлению p и по одной из двух компонент v_1 или v_2 вектора скорости»²² [97].

²² Георгиевский, Д. В. Избранные задачи механики сплошной среды/ Д. В. Георгиевский. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.

1.5.3 Осесимметричный аналог задачи Прандтля

В задачах, связанных с прикладными вопросами обработки материалов давлением (см. обзор литературы, например, в [61, 69], сделано много различных обобщений задачи Прандтля. Отдельно выделим исследование пластического течения при сжатии круглого диска между параллельными плитами, т.е. осесимметричный аналог задачи Прандтля. В [77] получено численное решение такой задачи и установлено, что распределение осевого давления по толщине слоя близко к линейному, но вместе с этим выражен и нелинейный характер. Особенности этого решения обсуждаются в [61, 69]. Однако аналитического решения данной задачи не предложено.

В работах [97, 98] рассматривается осесимметричное течение несжимаемого идеально жесткопластического материала с пределом текучести σ_s в тонком слое Ω .

1.6 Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию

«Течению идеально жесткопластического материала в тонком слое под действием приложенной нагрузки посвящено большое количество, в том числе и классических, исследований [2–12]. Если жесткие плиты, совпадающие с лицевыми поверхностями слоя, сближаются заданным образом, то речь идет о задаче Прандтля, на которую впервые обращено внимание в [2], либо о ее многочисленных обобщениях (см., например, [13, 14]). Традиционно при выводе решения Прандтля используется гипотеза о линейности касательного напряжения по толщине, а, следовательно, достижении касательным напряжением максимального по модулю значения на поверхностях шероховатых плит. Осуществленный в [15] асимптотический анализ с естественным малым геометрическим параметром без каких-либо первоначальных статических или кинематических гипотез привел к решению, совпадающему с обобщенным

решением Прандтля на случай произвольного коэффициента шероховатости плит. Это решение точно в смысле конечности ненулевых членов асимптотических рядов...»²³ [99]. Была рассмотрена задача пластического сжатия слоя между жесткими плитами (по недеформируемым плоскостям).

«Асимптотический анализ с малым геометрическим параметром, равным отношению толщины идеально-жесткопластического слоя к его характерному размеру в плане, без каких-либо первоначальных силовых или кинематических гипотез приводит к решению, соответствующему теории тонкого слоя. Касательные напряжения и поперечная скорость в главном приближении линейно зависят от поперечной координаты. Причем коэффициент линейности – функция шероховатости плит. Возможно такое распределение шероховатости по лицевым поверхностям, что течение при сжатии слоя сближающимися плитами будет осуществляться вдоль одного из семейств координатных линий. Аналитическое построение такого решения для любой криволинейной системы координат обобщает схему классического решения в задаче Прандтля и некоторых ее аналогах»²⁴ [99].

1.7 Постулаты, следствия и гипотезы, сформулированные на основе решения задачи Л. Прандтля

«1. Девиаторные компоненты напряжений в области (1.36)

$$\frac{|x|}{z} \gg 1, \quad \frac{1 - |x|}{h} \gg 1. \quad (1.36)$$

по отношению к среднему гидростатическому напряжению являются малыми величинами порядка $h/2l$ сравнительно с 1.

²³ Георгиевский Д.В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию/ Д.В. Георгиевский// Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. №4. С.104-115.

²⁴ Георгиевский, Д. В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию. Известия РАН. МТТ, №4, 2011, с.104-115 ISSN^ 1026-3519

2. Среднее гидростатическое напряжение с точностью до 1 постоянно по координате z .

3. Контактное напряжение трения равно пределу текучести на сдвиг, а скорость скольжения отлична от нуля.

4. Среднее по толщине значение полуразности нормальных напряжений близко к пределу текучести на сдвиг

$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}}{2}\right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \tau_s.$$

5. Скорость течения пластической массы в направлении оси Ox в области (1.36) практически не зависит от координаты z . Разность осевой ($z = 0$) и средней по z скоростей – является малой порядка $\frac{h}{4l}$ от средней скорости, причем эта разность наблюдается за счет падения скорости в тонких слоях, примыкающим к контактными поверхностям.

6. Скорости и интенсивность деформаций не зависят от x :

$$v_{xx} = -v_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}, v_{xz} = \frac{8}{h} \frac{\frac{z}{h}}{\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}},$$

$$v_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left| \frac{dh}{dt} \right| \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4z^2}{h^2}}}.$$

Средние значения скоростей деформации по оси Oz :

$$\bar{v}_{xx} = -\bar{v}_{zz} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0, \bar{v}_{xz} = 0,$$

имеют интенсивность

$$\bar{v}_u = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \left| \frac{dh}{dt} \right|.$$

Следовательно, средние значения отношений скоростей деформации к их интенсивности пропорциональны с постоянным множителем отношениям средних скоростей деформации к их интенсивности:

$$\left(\frac{v_{xx}}{v_u}\right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{xx}}{\bar{v}_u}, \quad \left(\frac{v_{zz}}{v_u}\right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{zz}}{\bar{v}_u}, \quad \left(\frac{v_{xz}}{v_u}\right)_{\text{cp}} = \frac{\pi}{4} \frac{\bar{v}_{xz}}{\bar{v}_u} = 0.$$

Представленные выше следствия были выдвинуты как гипотезы, с помощью которых А.А. Ильющин [33] построил осредненную по толщине текущего слоя двумерную теорию течения в тонком пластическом слое (ТТПС). А затем предложил постановки краевых задач»²⁵ [1].

1.8 Инструментальные средства численного моделирования

Развитие средств вычислительной техники повлекло за собой создание специализированных объектно-ориентированных программных средств, построенных на численном методе конечных элементов [100 – 103]: такие программные комплексы (ПК), как ANSYS, ABAQUS, MARS, DEFORM [104] и программный комплекса QForm 2D/3D [105]. Пакет программ DEFORM-3D для моделирования процессов механики деформируемого твердого тела дает хорошее совпадение с экспериментом [106, 107, 108] (DEFORM-2D).

Аналоговое моделирование можно провести с помощью метода песчаной аналогии для построения пространственной эпюры контактных давлений и определения линий раздела течений в плоских случаях [109, 110].

Для простых насыпей, образованных стандартными многогранниками решение находится из элементарной геометрии (стереометрии). Для более сложных насыпей такой способ можно считать единственным средством получения аналогового решения. Применение метода песчаной аналогии дает представление о течении тонкого слоя металла, совпадающим с аналитическим решением [111] и результатами реальных натуральных экспериментов [112].

Компьютерное моделирование основывается на стандартных численных методах. Аналоговое моделирование также можно реализовать с помощью современных методов искусственного интеллекта для распознавания 3D-моделей

²⁵ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В.А. Кадымов. [Монография]. М.: МГТЭУ, 2015. 122 с.

[113]. К CAD-системам можно отнести программные комплексы, которые позволяют моделировать геометрические объекты. Примерами CAD-систем являются КОМПАС [114], SolidWorks, Unigraphics [113]. С развитием CAM/CAE систем появилась возможность моделировать процесс в области обработки металлов давлением. К ним относятся DEFORM, FORGE, ANSYS, SPLEN и другие. Параметрические технологии, заложенные в системы КОМПАС-3D [114], T-FLEX CAD [115] позволяют быстро создать физический прототип исследуемой модели [113, 116, 117, 118]. Системы DEFORM и QFORM [119, 120] позволяют моделировать пластическое течение материала для горячих, полугорячих и холодных процессов, причем это могут быть как изотермические, так и неизотермические процессы.

1.9 Выводы по главе 1

1. Тонкослойные течения по виду граничных условий и порядку кинематических и силовых величин, входящих в их описание, с определенной долей условности, можно разбить на течения типа Пуазейля (отличается прилипанием материалов к границам, конечностью во всех точках скоростей течения и давления и носят чисто сдвиговой характер) и типа Прандтля (присутствует сильное проскальзывание материала на движущихся навстречу друг другу границах). Основной практической задачей при изучении течений типа Пуазейля является нахождение зависимости расхода сплошной среды от давления и оптимизация этого показателя. Главной задачей изучения течений типа Прандтля является определение суммарной силы, необходимой для процессов выдавливания и утонения слоя, в этом случае практически не уделялось внимания кинематическим параметрам.

2. Большинство исследований Прандтлевых течений в сравнительно тонком слое используют упрощенную постановку краевой задачи в модели

«идеальной жидкости», описываемой нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка, в которой пренебрегают касательными напряжениями.

3. В теории течения тонкого пластического слоя в задачах течения типа Прандтля постановка ограничивалась рассмотрением областей со свободными, математически описываемыми границами.

4. С помощью «асимптотического анализа с малым геометрическим параметром было получено точное решение (в смысле конечности членов асимптотических разложений), совпадающее с обобщенным решением Прандтля для общего случая коэффициента шероховатости плит. Доказана невозможность использования таких асимптотик в малой окрестности среднего сечения слоя. В малой окрестности построено внутреннее, асимптотическое разложение»²⁶ [54]. Такое решение моделирует сжатие тонкой вертикальной полосы в середине слоя, что в результате приводит к одномерной задаче.

²⁶ Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля.: Извесия РАН. МТТ. №1,2009, с.83–93. ISSN: 1026-3519

ГЛАВА 2. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ МАТЕРИАЛА ТОНКОГО ПЛАСТИЧЕСКОГО СЛОЯ

Материалы главы 2 соответствуют паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) и относятся к направлениям исследований п.1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений, связанных с течением по поверхностям тонких слоев, занимающих неканонические области, и которые изложены автором в публикациях [88, 89, 122, 123, 124, 135, 136, 137, 138, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 152, 153, 154, 155, 157, 158].

В дальнейшем изложении, как и прежде, под тонким слоем будем понимать слой с относительной толщиной $h_0 = \frac{h}{2L} \leq 0,1$ (h – толщина плоского слоя протяженного участка деформируемого объекта или объекта в целом; $2L$ – наибольший габаритный размер полотна объекта). Воспользуемся общей постановкой краевой задачи [121, 122].

2.1 Общий случай аналога задачи Л. Прандтля для стесненного формоизменения слоя в областях неканонической формы

Представленный материал изложен автором в работах [122, 124].

«Рассмотрим идеально-пластический слой, сжимаемый двумя параллельными жесткими плитами в условиях плоской деформации. Будем считать, что его длина значительно больше толщины. Предел текучести материала $k = k(z)$ считаем известной функцией координаты z [23]. Плиты предполагаются шероховатыми ($0 \leq m \leq 1$) - фактор трения Прандтля-Зибеля

$$[\sigma_{xz}]_{z=h} = mk(h), [\sigma_{xz}]_{z=-h} = -nk(h), 0 \leq m \leq 1, 0 \leq n \leq 1 \quad (2.1)$$

Напряжения $\sigma_{xx}, \sigma_{zz}, \sigma_{xz}$ удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия в частных производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} &= 0 \end{aligned}$$

и условию пластичности»²⁷ [1].

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4k^2(z).$$

Будем считать, что касательное напряжение σ_{xz} зависит только от координаты z , тогда из предыдущих уравнений найдем величины напряжений

$$\begin{cases} \sigma_{xz} = az + b, \\ \sigma_{zz} = -ax - c, \\ \sigma_{xx} = -ax - c + 2\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}, \end{cases} \quad (2.2)$$

где a, b, c постоянные коэффициенты. Из условий (2.1) находим a и b :

$$a = \frac{1}{2h} [mk(h) + nk(-h)], \quad b = \frac{1}{2h} [mk(h) - nk(-h)].$$

Постоянная c определяется из условия равновесия элемента шириной x . Так как левый край этого элемента свободен от внешних напряжений, то:

$$\int_0^x mk(h)dx + \int_0^x nk(-h)dx + \int_{-h}^h \sigma_{xx}dz = 0.$$

Отсюда:

$$c = \frac{1}{h} \int_{-h}^h \sqrt{k^2(z) - (az + b)^2} dz.$$

Из (2.12) находим уравнения линий скольжения:

$$x = \int \frac{\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}}{az + b \pm k} dz + const. \quad (2.3)$$

Для определения компонентов скорости v_x, v_z имеем условие несжимаемости:

²⁷ Кадымов, В.А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (2.4)$$

и условие соосности тензоров напряжений и скоростей деформации:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (2.5)$$

а также кинематическое условие на границе контакта:

$$[v_z]_{z=\pm h} = \pm V. \quad (2.6)$$

Из уравнений (2.4), (2.5) и граничных условий (2.6), находим распределение скоростей

$$v_z = -\frac{V_z}{h}, \quad (2.7)$$

$$v_x = -\frac{V_x}{h} + \frac{2V}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}} dz + C.$$

Постоянную C определяем из условия сохранения массы несжимаемого материала: поток материала через сечение $x = const$ должен быть равным расходу материала, выдавливаемого плитами справа от указанного сечения:

$$-\int_{-h}^h v_z dz = 2V(l - x). \quad (2.8)$$

Постоянная интегрирования:

$$C = V \left(\frac{1}{h^2} \int_{-h}^h \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{k^2(z) - (az + b)^2}} dx dz - \frac{1}{h} \right).$$

Такое распределение скоростей обобщает известное распределение, полученное А. Надаи для случая однородного материала.

Из (2.2) следует, что предельное давление под плитами распределяется по линейному закону. Заметим, что напряжения (2.2) не удовлетворяют условиям на конце при $x = 0$ и условию $\sigma_{xz} = 0$ при $x = l$. Скорости (2.7) в середине полосы не соответствуют действительному распределению скоростей, т. к. в середине полосы у поверхностей плит материал не переходит в пластическое состояние. Поэтому

решение (2.2), (2.7), как и решение Прандтля – Надаи, близко к точному решению лишь на достаточном удалении от края и центра полосы.

Рассмотрим частный случай: зависимость $k(z)$ – линейная, а плиты абсолютно шероховаты ($m = n = 1$). Тогда

$$c = \frac{\pi}{2} \sqrt{k(h)k(-h)},$$

линиями скольжения являются кривые

$$\sqrt{1 - \frac{z^2}{h^2}} \pm \arcsin \frac{z}{h} = \frac{\left[\frac{k(h)}{k(-h)} \right]^{\pm \frac{1}{2}}}{h} + const. \quad (2.9)$$

Уравнения линий скольжений (2.9) представляют собой уравнения циклоид. Решение (2.2), (2.6) имеет смысл, если выполнено условие:

$$|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z). \quad (2.10)$$

В противном случае напряжение σ_{xz} и составляющая скорости v_x становятся комплексными. Предположим, для простоты, что распределение $k(z)$ симметрично относительно серединной линии $z = 0$ и, что трение на плитах одинаково, ($b = 0$). Касательное напряжение σ_{xz} определяется лишь величиной трения на плитах и не зависит от распределения $k(z)$ по толщине. Если $k(z)$ при $0 \leq z \leq h$ достаточно быстро возрастает, то условие (2.10) означает, что весь слой не переходит в пластическое состояние. В этом случае к плитам примыкают жесткие зоны. Примем, что жесткие зоны ограничены прямыми $z = \pm h_0$, где $h_0 \leq h$. При этом напряжения и скорости в пластическом слое $|z| \leq h_0$ определяются, формулами (2.2) и (2.7), в которых h следует заменить на фиксированное значение h_0 . На границе пластической области $z = \pm h_0$ действует максимальное касательное напряжение, численно равное $k(h_0)$, так, что линии $z = \pm h_0$ являются огибающими линий скольжения. В противном случае решение (2.2) и (2.7) можно было бы продолжить за линии $z = \pm h_0$. Величина h_0 определяется условием касания графиков σ_{xz} и $k(z)$:

$$h_0 k'(h_0) = k(h_0). \quad (2.11)$$

Представим $k(z)$ в виде:

$$k(z) = k(0) + \Delta k \left(\frac{z}{h}\right)^{2p}, \text{ где } \Delta k = k(h) - k(z) > 0, 2p > 1.$$

Тогда:

$$\frac{h_0}{h} = \left(\frac{k(0)}{p\Delta k}\right)^{\frac{1}{2p}}.$$

Так как $\frac{h_0}{h} < 1$, то должно выполняться условие:

$$\frac{\Delta k}{k(0)} > \frac{1}{p}, \left(p > \frac{1}{2}\right).$$

Отсюда $\frac{k(z)}{k(0)} > 3$. Ограничение на величину трения на плитах мы не получили, однако в виду малости толщины жесткого слоя, можно приближенно считать напряжение, связанное с преодолением трения, равным $k(h_0)$.

2.2 Метод характеристик

Автором предложена [123] краевая задача течения в тонком пластическом слое, заключенном между двумя сближающимися по заданному закону поверхностями тел инструмента в упрощенной постановке. Были использованы следующие предположения:

- материал пластического слоя идеально-пластический;
- материал слоя объемно-несжимаемый;
- упругими деформациями тел инструмента пренебрегаем;
- на поверхностях контакта принимается классический закон течения

Л. Прандтля.

Задача описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения вдоль плоскости течения.

Уравнения краевой задачи [122, 125]:

$$\text{grad}p = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|\vec{v}|} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (2.13)$$

Единственное краевое условие на контуре растекающегося пластического слоя

$$p \Big|_{\partial S} = \sigma_s. \quad (2.14)$$

В общем случае затрудненного растекания, где $p_\Gamma(\mu)$ – заданная функция от параметра μ на границе области, образованной пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает материал слоя

$$p \Big|_{\partial S} = p_\Gamma(\mu). \quad (2.15)$$

Рассматривается краевая задача течения в тонком пластическом слое в постановке (2.12 – 2.15) с условием на границе слоя

$$p(\alpha, \beta, t) \Big|_{\partial S_t} = k\sigma_s \quad (k = 1, 2). \quad (2.16)$$

Причем принимается, что упругими деформациями воздействующих на слой тел можно пренебречь ($h(\alpha, \beta, t) \equiv h_1$).

При заданном законе сближения внешних тел, то есть при известной функции $h(\alpha, \beta, t) \equiv h_1$ и условии на границе слоя в виде (2.16) в задаче требуется для всех $t > t_0$ определить законы распределения контактного давления $p(\alpha, \beta, t)$, скоростей $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$, меру накопленной деформации $\lambda(t) = \ln \left(\frac{h_0}{h(t)} \right)$, общую силу в заданном направлении

$$P_{\text{общ}} = \iint_S (p\vec{n} \cdot \vec{v}) ds,$$

а также, форму растекающейся области $s_t = s(\alpha, \beta, t)$, занятой пластическим материалом, по известной начальной области $s_0 = s(\alpha, \beta, t_0)$ на геометрически неизменной основной поверхности.

В общем случае факторы трения μ_i ($0 \leq \mu_i \leq 1$) представляют собой сложные функции, зависящие от формы очага деформации, величины контактного давления в рассматриваемой точке поверхности контакта, наличия смазки, ее состава и

интенсивности нанесения, величины шероховатости контактирующих поверхностей и т. д. При наличии сухого трения (без смазки) в процессах течения тонких пластических слоев можно положить $\mu_1 = \mu_2 = 1$, что экспериментально подтверждается в [25, 126, 127]. Ниже предлагается метод решения задач течения пластических слоев в постановке (2.12 – 2.13) с граничными условиями (2.14 – 2.15).

Уравнения краевой задачи (2.12 – 2.15) запишем в виде [19], полагая, что линии скольжения α и β взяты за оси криволинейной системы координат:

$$\frac{\partial p}{A \partial \alpha} = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial p}{B \partial \beta} = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}. \quad (2.18)$$

Из векторных уравнений (2.17), (2.18) следует, что линии уровня $p(\alpha, \beta) = const$ ортогональны линиям тока

$$\frac{A d\alpha}{ds} = -\frac{u}{V}, \quad \frac{B d\beta}{ds} = -\frac{v}{V};$$

т. е. направление вектора скорости течения коллинеарно вектору $grad p$. Это условие позволяет перейти от системы (2.17), (2.18) к эквивалентной системе двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка относительно $p(\alpha, \beta, t)$ [128] и модуля вектора скорости V :

$$grad^2 p = \frac{4\tau_s^2}{h^2(\alpha, \beta, t)}, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hBV \cos \gamma)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hAV \sin \gamma)}{\partial \beta} = 0, \quad (2.20)$$

где $\vec{V} = -V(\cos \gamma \vec{i} + \sin \gamma \vec{j})$; $\gamma = \gamma(\alpha, \beta, t)$ – угол между касательной к линии тока в рассматриваемой точке области течения и осью α . В уравнении (2.19) для удобства записи положим $\mu_1 = \mu_2 = 1$, хотя предложенный ниже метод остается верным для любой пары допустимых значений μ_1, μ_2 .

Из первого уравнения:

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0, \quad \text{где} \quad (2.21)$$

$$\Omega(\alpha, \beta) = \frac{2\tau_s}{h} > 0, \quad p = \frac{\partial P}{\partial \alpha}, \quad q = \frac{\partial P}{\partial \beta},$$

а t , как независимый параметр, пока опускаем. Для нелинейного уравнения в частных производных первого порядка (2.21) каждая совокупность функций

$$\alpha = \alpha(S'), \beta = \beta(S'), P = P(S'), p = p(S'), q = q(S'), \quad (2.22)$$

удовлетворяющая системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dS'} &= F_p, & \frac{d\beta}{dS'} &= F_q, & \frac{dP}{dS'} &= pF_p + qF_q, \\ \frac{dp}{dS'} &= -(pF_p + F_\alpha), & \frac{dq}{dS'} &= -(qF_p + F_\beta) \end{aligned} \quad (2.23)$$

описывает вместе с уравнением (2.21) характеристическую полосу.

Вместо параметра S' вдоль характеристической полосы взят параметр S , являющейся длиной дуги вдоль носителя характеристик $\alpha = \alpha(S), \beta = \beta(S)$, т.е. согласно (2.23)

$$dS = \sqrt{A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2} = \sqrt{A^2 F_p^2 + B^2 F_q^2} dS' \quad (2.24)$$

В данном случае характеристическая система (2.23) принимает вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{1}{A^2} \frac{p}{\Omega} & \frac{d\beta}{ds} &= \frac{1}{B^2} \frac{q}{\Omega} & \frac{dP}{ds} &= \Omega \\ \frac{dp}{ds} &= \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\alpha + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\alpha + \Omega_\alpha \\ \frac{dq}{ds} &= \frac{p^2}{\Omega A^3} A_\beta + \frac{q^2}{\Omega B^3} B_\beta + \Omega_\beta \end{aligned} \right. \quad (2.25)$$

Задача (2.25) – это задача типа Коши с соответствующими граничными условиями на контуре области s_t . Решения системы (2.25), удовлетворяющие (2.21), называют характеристической полосой, а несущую эту полосу кривую $(\alpha(s), \beta(s), P(s))$ – характеристической кривой. Можно установить связь между решениями (2.21) и (2.25) и показать эквивалентность их интегрирования при выполнении определенных условий, для чего будем использовать известные теоремы из теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Теорема 1. Если характеристическая полоса имеет общий элемент (т. е. (α, β, P, p, q)) с интегральной поверхностью $P = P(\alpha, \beta)$, то эта полоса целиком принадлежит интегральной поверхности.

Теорема 2. Пусть дана пространственная кривая C :

$$\alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu),$$

которую можно дополнить функциями $p = p(\mu), q = q(\mu)$, до начальной полосы

$$C_1: \alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu), p = p(\mu), q = q(\mu),$$

где C_1 удовлетворяет соотношению полосы

$$P'_\mu = p\alpha'_\mu + q\beta'_\mu \neq 0 \quad (2.26)$$

и уравнению

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) = 0, \quad (2.27)$$

или вдоль полосы C_1 :

$$\Delta \equiv F_p\beta'_\mu - F_q\alpha'_\mu \neq 0, \quad (2.28)$$

то в окрестности C_1 существует одна и только одна интегральная поверхность, проходящая через эту полосу.

В качестве пространственной кривой $C(\alpha(\mu), \beta(\mu), P(\mu))$ выбрана регулярная часть контура ∂S_t области течения в рассматриваемый момент времени $\alpha(\mu), \beta(\mu) \in C^2, (\alpha'_\mu)^2 + (\beta'_\mu)^2 \neq 0$ и положим на ней $P(\mu) = k\sigma_s$.

Определили далее $p(\mu), q(\mu)$ таким образом, чтобы выполнялись условия (2.27) – (2.29). Тогда в окрестности гладких точек контура области течения все условия теоремы 2 выполнены, т. е. существует единственная интегральная поверхность $P = P(\alpha, \beta)$, проходящая через выбранную часть контура. С другой стороны, задача Коши для системы (2.25) при выполнении условий типа Липшица [128] для правых частей α, β, P, p, q имеет единственную характеристическую полосу, которая в свою очередь имеет общий элемент (в точках контура) с интегральной поверхностью. Следовательно, по теореме 1 решения (2.25) и (2.21) совпадают.

Установили, что носители характеристик $\alpha(s), \beta(s)$ системы (2.25) совпадают с линиями тока, и система (2.25) оказывается эквивалентной системе четырех обыкновенных дифференциальных уравнений относительно

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{ds} &= \frac{\cos\gamma}{A}, \quad \frac{d\beta}{ds} = \frac{\cos\gamma}{B}, \quad \frac{dP}{ds} = \Omega, \\ \frac{d\gamma}{ds} &= \frac{1}{\Omega} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B} \cos\gamma \right) + \frac{1}{AB} (A_\beta \cos\gamma - B_\alpha \sin\gamma). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Учитывая, что вдоль характеристик системы (2.29)

$$\frac{dP}{dS} = \Omega > 0,$$

последняя система представлена в эквивалентной форме:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dP} &= \frac{\cos\gamma}{A\Omega}, \quad \frac{d\beta}{dP} = \frac{\sin\gamma}{B\Omega}, \quad \frac{dS}{dP} = \frac{1}{\Omega}, \\ \frac{d\gamma}{dP} &= \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B} \cos\gamma \right) + \frac{1}{AB\Omega} (A_\beta \cos\gamma - B_\alpha \sin\gamma). \end{aligned} \quad (2.30)$$

Решения системы (2.29) или (2.30) с граничными условиями в точках контура области определяют Риманову поверхность (α, β, P) [129], из которой согласно принципу единственности давления (точнее, принципа минимума мощности внешних сил [130-133], который при заданном законе сближения внешних тел $h = h(\alpha, \beta, t)$ совпадает с минимумом внешних сил) составлено покрытие области из частей характеристических кривых, заключенных между границей контура области и ребром (т. е. линией, составленной из точек пересечения, по крайней мере, двух разных характеристических кривых), и соответствующих минимальным значениям контактного давления. Другие же части этой многолистной поверхности (продолжения характеристических кривых) физически не реализуются. Для решения таких задач в литературе известны как точные, так и приближенные методы (например, метод Рунге-Кутты [133]).

Проинтегрировано уравнение (2.20) для анализа кинематики течения. Уравнение переписано в эквивалентной форме:

$$\frac{\partial W}{A \partial \alpha} \cos\gamma + \frac{\partial W}{B \partial \beta} \sin\gamma + W\Psi + \bar{\omega} = 0$$

или

$$\frac{\partial W}{\partial s} = -W\Psi - \bar{\omega}, \text{ где} \quad (2.31)$$

$$W(s) = h(\alpha(s), \beta(s))V(s), \bar{\omega}(s) = -\frac{\partial h}{\partial t},$$

$$\Psi = \frac{1}{AB} \left[\frac{\partial(B\cos\gamma)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(A\sin\gamma)}{\partial\beta} \right].$$

Если вычислить каким-либо способом значения функции Ψ вдоль носителей характеристик $\alpha(S), \beta(S)$ (т. е. зная зависимость $\Psi = \Psi(S)$), то уравнение (2.31) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением. Следовательно, сформулирована следующая теорема.

Теорема 3.

$$\Psi = -\frac{1}{R(s)} + \frac{1}{R_\beta} \cos\gamma + \frac{1}{R_\alpha} \sin\gamma, \text{ где } R_\alpha = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right)^{-1}, R_\beta = \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right)^{-1} \quad (2.32)$$

– касательные радиусы кривизны линий α, β на основной поверхности,

$$\frac{1}{R(s)} = \chi(s) = \frac{\partial\gamma}{A\partial\alpha} \sin\gamma + \frac{\partial\gamma}{B\partial\beta} \cos\gamma = \frac{\partial\gamma}{\partial\eta}$$

– касательная (геодезическая) кривизна линий уравнений $P(\alpha, \beta) = const$ в рассматриваемой точке области течения.

В некоторых частных задачах течения тонких пластических слоев величина радиуса кривизны $R = R(s)$ линии уровня находится точно (течение плоских пластических слоев постоянной толщины $h = h(t)$), когда линии тока являются прямыми, ортогональными к контуру области, для Ψ получаем выражение, совпадающее с полученным в работе [33]:

$$\Psi = -\frac{1}{R(s) - s + s_0},$$

где $R(s)$ – радиус кривизны начального уровня (контура области). Считая теперь $\Psi = \Psi(S)$ известной функцией, проинтегрируем уравнение (2.31)

$$W(s) = h(\alpha(s), \beta(s))V(s) = \bar{A}J_1(s) - J_2(s), \quad (2.33)$$

где интегралы

$$J_1(S) = e^{-\int_{s_0}^S \Psi(s') ds'}, J_2(S) = \int_{s_0}^S \bar{\omega}(s'') e^{-\int_{s''}^S \Psi(s') ds'} ds'',$$

а для определения постоянной интегрирования \bar{A} , имеем условие ветвления течения $W(s = s_{\text{ребра}}) = 0$ в неизвестных, но определяемых в ходе решения системы (2.30) точках следа ребра поверхности давления. Исходная задача (2.29), (2.30) решена следующим образом. Проинтегрирована система (2.25) с начальными условиями в точках контура области (известно [60], что угловые точки контура принадлежат следу ребра давлений), представляющего линию начального уровня, с одновременным вычислением двух квадратур $J_1(s(P)), J_2(s(P))$. Задавая шаг ΔP , будем строить поточечно очередную линию уровня и определять на ней значения $J_1(s(P)), J_2(s(P))$. Этот процесс продолжался до тех пор, пока вся область не покрывается ортогональной сеткой линий уровня и линий тока, тем самым определили след ребра поверхности давлений (как линию стыковок отдельных характеристик) и значения квадратур $J_1(P), J_2(P)$, т. е. установив кинематику течения. Таким образом, в каждый фиксированный момент времени известно положение контура ∂s_t области течения и нормальная к ней компонента вектора скорости течения.

$$V(s_0) = \frac{1}{h(s_0)} [\bar{A} J_1(s_0) - J_2(s_0)], \text{ где } \bar{A} = \frac{J_2(s_{\text{ребра}})}{J_1(s_{\text{ребра}})}.$$

Это означает, что можно определять форму контура свободно растекающейся области в момент $t + dt$. Если граница области является пазом, куда свободно затекает металл, то можно установить расход металла Vh при затекании в ребро и, тем самым, высоту ребра.

На основе метода характеристик решен ряд нестационарных задач пластического течения тонких слоев. Ограничиваемся лишь решением задачи о течении пластического слоя материала между наклонными плитами в фиксированной круговой области, когда ее граница образована пазами в одном из тел инструмента, куда свободно затекает пластический материал (рис. 2.1):

$$s_t \equiv s_0: x_0^2 + y_0^2 \leq R^2, h(x, t) = h_0(t) + \alpha_1(t)x.$$

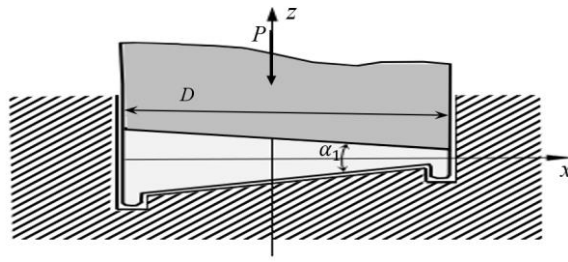


Рис. 2.1. Течение слоя переменной толщины, с круговой границей и затеканием в контурное ребро

Эта задача частично (точнее, лишь относительно силовых характеристик течения) решена в [87].

Новым в предложенном решении является построение кинематики течения [89]. Как известно, все линии тока собираются в одной точке $(x_\rho(t), 0)$ и представляют собой эллиптический пучок окружностей; линии уровня изображаются гиперболическим пучком окружностей. Ребро вырождается в единственную точку с координатой:

$$x_\rho(t) = \frac{\sqrt{h_0^2(t) - \alpha_1^2(t)R^2} - h_0}{\alpha_1(t)}.$$

Интегралы $J_1(s(x)), J_2(s(x))$ для определения скоростей вдоль известных линий тока берутся точно. Для линии тока, исходящей из точки контура $M_0(x_0, y_0)$, при этом $x_0 > 0, y_0 > 0$, они имеют вид:

$$J_1(s(x)) = \frac{y_0}{y(x)}, J_2(s(x)) = \frac{1}{y(x)} \int_{x_0}^x (h_0 + \alpha x) y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx,$$

где траектория движения:

$$y(x, t) = y_0 + \frac{h_0(t) + \alpha_1(t)x_0}{\alpha_1(t)} \cdot \frac{x_0}{y_0} - \frac{R(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)}{\alpha_1(t)y_0} \left[1 - \frac{y_0^2}{(h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2 R^2} \cdot (h_0(t) + \alpha_1(t)x_0)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда скорость может быть вычислена

$$V(x) = \frac{1}{h(x)} (\bar{A}J_1(x) - J_2(x)),$$

где постоянная интегрирования

$$\bar{A} = \frac{1}{y_0} \int_{x_0}^{x_p(t)} \left(\frac{dh_0(t)}{dt} + \frac{d\alpha_1(t)}{dt} \right) y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

Такого рода течения в слое являются типовыми при рассмотрении технологии изготовления поковок на ковочных и штамповочных прессах с гидравлическим приводом, где скорость перемещения подвижной траверсы невелика, а металл, достигший пластического состояния, деформируется между сближающимися элементами штампа, имеющими заданную шероховатость. Как было показано ранее, для «корректной постановки задачи в двумерном случае достаточно использовать дифференциальный оператор относительно контактного давления [122] из условия

$$[V(s), gradp] = 0.$$

Постановка эквивалентной задачи сводится к²⁸ [134] двум дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка относительно давления на контакте $p(\alpha, \beta, t)$ и модуля вектора скорости V :

$$gradp = -\frac{2\tau_s}{h(\alpha, \beta, t)} \frac{\vec{V}}{|\vec{V}|} \quad (2.34)$$

при этом составляющие скорости, находятся в зависимости:

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hBu)}{\partial \alpha} - \frac{1}{AB} \frac{\partial(hAv)}{\partial \beta} = 0. \quad (2.35)$$

При заданном законе сближения внешних тел (т.е. при известной функции $h = h(\alpha, \beta, t)$ и условии на границе слоя

$$P(\alpha(\mu), \beta(\mu), t) = P_\Gamma(\mu) \quad (2.36)$$

требуется для всех $t > t_0$ определить законы распределения контактного давления $P(\alpha, \beta, t)$, скоростей $u(\alpha, \beta, t)$, $v(\alpha, \beta, t)$ и форму области $s_t = s'(\alpha, \beta, t)$, занятой пластическим материалом, по известной начальной области $s_0 = s(\alpha, \beta, t_0)$ на основной поверхности.

Описанный метод остается справедливым и в случае операций объемного

²⁸ Кадымов, В. А. Об одной новой математической постановке контактной краевой задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов, М. С. Максюттов // Наука и Мир, М.: Изд-во «Научное обозрение». 2016 №7-1(35) с.20-23, ISSN 2308-4804

деформирования. Приведено обоснование новых подходов к решению конкретных задач, один из которых заключается в раздельном решении задач по нахождению контактного давления и анализа кинематики течения.

В первую очередь найдены давления на контакте из решения уравнения:

$$F(\alpha, \beta, P, p, q) \equiv \left(\frac{p}{A}\right)^2 + \left(\frac{q}{B}\right)^2 - \Omega^2(\alpha, \beta) = 0 \quad (2.37)$$

с учетом граничного условия в общей постановке (2.37):

$$p = \frac{dP}{d\alpha}, q = \frac{dP}{d\beta}, \Omega = \frac{2\tau_s}{h} > 0.$$

Для особых точек границы области течения поставленная задача сведена к решению следующей эквивалентной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{dP} &= \frac{\cos\gamma}{A\Omega}, \frac{d\beta}{dP} = \frac{\sin\gamma}{B\Omega}, \frac{dS}{dP} = \frac{1}{\Omega}, \\ \frac{d\gamma}{dP} &= \frac{1}{\Omega^2} \left(-\frac{\Omega_\alpha}{A} \sin\gamma + \frac{\Omega_\alpha}{B} \cos\gamma \right) + \frac{1}{AB\Omega} (A_\beta \cos\gamma - B_\alpha \sin\gamma), \end{aligned} \quad (2.38)$$

в особых точках контура области S_t распишем граничные условия более подробно

$$\alpha = \alpha(\mu), \beta = \beta(\mu), P = P(\mu), p = p(\mu), q = q(\mu).$$

Однозначность и единственность $p(\mu), q(\mu)$ определяется совокупностью условий в регулярных точках контура

$$\frac{dP_\gamma}{d\mu} = p \frac{d\alpha}{d\mu} + q \frac{d\beta}{d\mu}, \quad (2.39)$$

$$F(\alpha(\mu), \beta(\mu), P(\mu), p, q) = 0,$$

$$\Delta = F_p \beta_\mu - F_q \alpha_\mu \neq 0.$$

Из (2.40) следует условие определения $\gamma(\mu)$:

$$\frac{dP_\gamma}{d\mu} = -\Omega \cos\omega(\mu); \quad \left(\frac{dP}{d\mu}\right)^2 < \Omega^2, \quad (2.40)$$

где $\omega(\mu) = \angle(\vec{V}^0, \vec{\tau}^0)$ – угол между линией тока \vec{V}^0 и положительным направлением касательной $\vec{\tau}^0$ в рассматриваемой точке контура

$$\gamma(\mu) = \pi + [\angle(\alpha, \vec{\tau}^0) - \omega(\mu)]. \quad (2.41)$$

Для фиксированного момента времени, определен модуль вектора скорости течения в слое

$$V(s) = \frac{W(s)}{h(s)}.$$

Полученное соотношение представлено в виде

$$W(s) = V(s)h(s) = \bar{A}J_1(x) - J_2(x),$$

где интегралы $J_1(x), J_2(x)$ и произвольная постоянная \bar{A} , определяются как предложено в предыдущем случае.

Для подтверждения адекватности предложенного метода рассмотрены тестовые примеры.

Пример 1. Предполагается, что в заданной следующими соотношениями пластической области

$$S = \{(x, y) : |x| < \infty, |y| < a + be^{-x^2}\},$$

известен закон изменения толщины слоя $h = h(t)$ от времени и давление $P_\Gamma(x) = c - \Omega be^{-x^2}$ на линии контакта. Линии тока – прямые линии. Угол $\gamma(x)$ между прямыми находим из соотношения (2.41)

$$\frac{dP_\Gamma}{dx} = p + qy'_x,$$

$$p = \Omega \cos\gamma(x), \quad q = \Omega \sin\gamma,$$

тогда:

$$2bxe^{-x^2} = \cos\gamma(x) - 2bxe^{-x^2} \sin\gamma(x).$$

При этом для всех $b \geq 0$, $\gamma(x) = \frac{\pi}{2}$, линии тока являются отрезками прямых, которые параллельны оси Ox , как показано на рис. 2.2 [125] и, следовательно, $\Psi(s) = 0$.

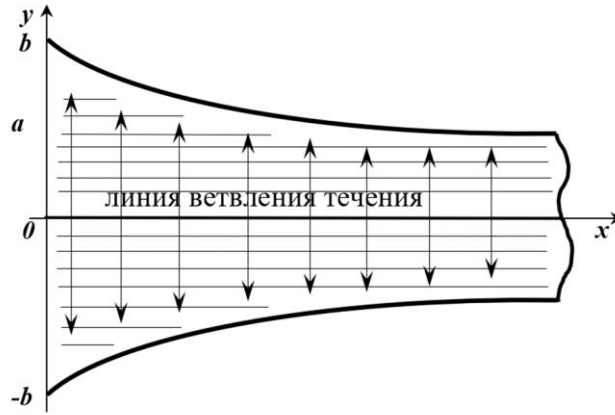


Рис. 2.2. Линия ветвления течения, линии уровня и линии тока

При интегрировании системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.38) вдоль характеристик, найдена функция $P(s, x) = P_\Gamma(x) + \Omega s$. Поскольку пластическая область симметрична, то ось Ox совпадает с ребром поверхности давлений и, с учетом условия на ребре, из (2.32) определяем кинематические параметры течения

$$-hV(s, x) = \frac{dh}{dt} (y(x) - s).$$

Следствие. Пусть известна граница пластической области и на ней построены контуры бортов. Высота бортов определяется из соотношения $z(x) = \frac{fP_\Gamma(x)}{\Omega}$. При заполнении формы кварцевым песком, имеющим коэффициент трения f , образуется насыпь, угол ската которой постоянный, образуется поверхность с вершиной в точке $x = x_0$:

$$\frac{dP}{dy} = -\Omega < 0.$$

Пример 2. Пусть слой металла толщиной $h = const$, ограничен окружностью:

$$s = \{(x, y): x^2 + y^2 < R^2\},$$

Пусть, далее на контакте границы окружности с инструментом, задано давление

$$P_\Gamma(\varphi) = C - R\Omega \sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2\frac{r}{R} \cos\varphi}. \quad (2.42)$$

В этом случае использована цилиндрическая система координат

$x = R\cos\varphi, y = R\sin\varphi, z = z$, при этом r ($0 \leq r \leq R$) переменный радиус. Условие для определения $\omega = \omega(\varphi)$ получено подстановкой параметрического уравнения контура (2.42) в (2.40):

$$-\Omega\cos\omega = \frac{dP_\Gamma}{Rd\varphi} = -\frac{\frac{r}{R}\sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2\frac{r}{R}\cos\varphi}} \Omega, \gamma(\varphi) = \frac{3\pi}{2} + \varphi - \omega(\varphi).$$

Из системы (2.38) определены линии тока, которые будут прямыми. Линия ветвления течений является единственная точка с координатами $(r, 0)$, в которой линии тока пересекаются (рис. 2.3) [125].

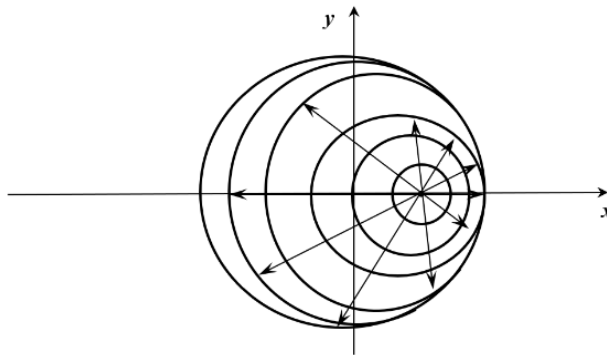


Рис. 2.3. Вырождение в точку ребра поверхности давлений

Уравнение характеристик проанализировано в более общем виде:

$$\begin{aligned} y(x, \varphi) &= y_\Gamma(\varphi) - \frac{x - x_\Gamma(\varphi)}{\sin(\varphi - \omega(\varphi))} \cos(\varphi - \omega(\varphi)) = \\ &= R\sin\varphi - \frac{x - R\cos\varphi}{\sin(\varphi - \omega(\varphi))} \cos(\varphi - \omega(\varphi)), \end{aligned} \quad (2.43)$$

где на основе стандартных преобразований тригонометрических функций представлено:

$$\sin\gamma(\varphi) = -\cos(\varphi - \omega), \quad \cos\gamma(\varphi) = \pm\sin(\varphi - \omega).$$

При значениях координат $x = r, y = 0$ уравнение (2.43) обращается в тождество, т. е. при главном значении φ ($\varphi \in [0, 2\pi]$), точка с координатами $(r, 0)$ будет принадлежать прямой (2.43). Линиями уровня в этом случае являются концентрическими окружностями с центром в точке ребра. Решение характеристической системы (2.38) представляется в виде:

$$\gamma(s) = \gamma_{\Gamma}(\varphi) = \text{const},$$

$$x(s) = x_{\Gamma}(\varphi) + s \cos \gamma(\varphi) = R \cos \varphi + s \cdot \cos \gamma(s),$$

$$y(s) = y_{\Gamma}(\varphi) + s \sin \gamma(\varphi) = R \sin \varphi + s \cdot \sin \gamma(s),$$

$$P(s) = P_{\Gamma}(s) + \Omega s.$$

Соотношение функции $\Psi(s)$:

$$\Psi(s) = -\frac{1}{R(s)} = -\frac{1}{\sqrt{(x(s) - r)^2 + y^2(s)}}.$$

Уравнение несжимаемости вдоль найденных линий тока преобразуется к виду:

$$\frac{dV}{ds} = -V\Psi(s) + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$$

и приводит к точному решению

$$V(s) = \frac{1}{h} [J_1(s)A_0 - J_2(s)],$$

в котором соответствующие интегралы определяются соотношениями:

$$J_1(s) = e^{-\int_0^s \Psi(s') ds'}, J_2(s) = \int_0^s \left(-\frac{dh}{dt} \right) e^{-\int_{s''}^s \Psi(s') ds'} ds''.$$

Условие на ребре

$$V(s = s_{\text{ребра}}) = 0,$$

позволяют найти постоянную интегрирования A_0 , где

$$s_{\text{ребра}}(\varphi) = \frac{x_p - R \cos \varphi}{\cos \gamma(\varphi)} = \frac{u - R \cos \varphi}{\cos \gamma(\varphi)}.$$

Следствие. При построении на границе круговой области бортиков высотой согласно уравнению (2.42) и ее заполнении однородным песком с коэффициентом трения f , образующая предельной поверхности примет форму конуса с вершиной в точке ребра.

Рассмотрена обратная задача определения высоты бортов круговой области, для формирования песчаной насыпи в виде конуса с вершиной в произвольной точке $(r, 0)$. Интегрирование условия (2.40) для определения $P_{\Gamma}(\varphi)$

$$\frac{dP_{\Gamma}}{Rd\varphi} = -\Omega \cos \omega(\varphi),$$

приводит к решению, вид которого аналогичен (2.42), где

$$\cos\omega(\varphi) = \frac{\frac{r}{R} \sin\varphi}{\sqrt{\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 1 - 2\frac{r}{R} \cos\varphi}}.$$

Такая постановка и решение обратных задач для определения давлений на границах пластических областей, исключает из рассмотрения области с точками перегиба контура. Существование таких точек приводит к появлению ребра на поверхности давлений, которое не вырождается в точку.

Пример 3. Течение внутри области пластического слоя постоянной толщины, ограниченного эллипсом

$$S = \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1 \right\}.$$

На границе

$$\partial S = \{(x, y) : x = acost, y = bsint\}$$

давление:

$$P_r(\varphi) = -b\Omega \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \frac{\frac{a^2}{b^2} - 1}{1 + \frac{a^2}{b^2} \operatorname{tg}^2 \varphi}} + c,$$

где

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} t.$$

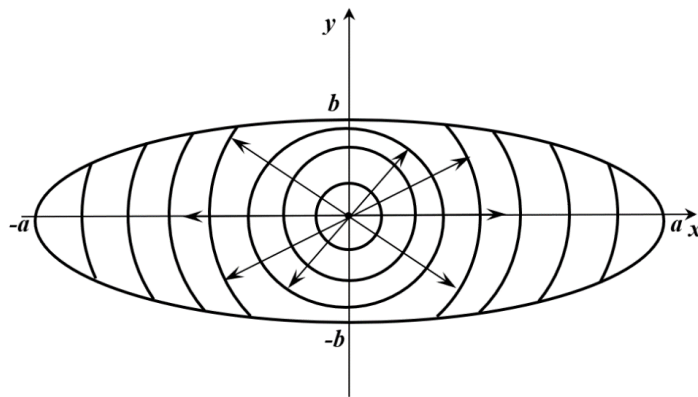


Рис. 2.4. Для эллиптических границ пластической области линии тока и соответствующие линии уровня ортогональны

Из условия (2.41) для определения $\omega(\varphi)$: $\frac{dP_r}{d\mu} = -\Omega \cos\omega(\varphi)$ при условии

$$d\mu = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt,$$

Получим:

$$\cos\omega(\varphi) = \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right) b \sin t \cdot \left(1 + \frac{a^2}{b^2} t g^2 \varphi\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot (a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{-\frac{1}{2}}$$

линии тока являются пучком прямых, проходящих через точку $O(0,0)$, ортогональными траекториями для пучка прямых, являются концентрические окружности с центром в точке $O(0,0)$, (рис. 2.4). Системы (2.25) и (2.30) приводят к точному решению поставленной задачи и полному определению всех неизвестных параметров.

2.3 Математическая модель «вязкой жидкости» в виде задачи Коши с граничными условиями

Не все процессы течения в тонком пластическом слое могут быть описаны в рамках упрощенной модели «идеальной жидкости», что подтверждается экспериментальными исследованиями [90, 122], поэтому для корректного описания задач, учитывающих наличие касательных напряжений, анизотропию в процессах течения [84], упругое деформирование инструмента [34, 35] и другие факторы, необходимо использовать более общую модель «вязкой жидкости». В рамках математической модели «вязкой жидкости» сформулирована краевая задача течения пластического слоя в области с подвижной границей, описываемая нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка в частных производных относительно трех неизвестных функций – контактного давления и двух компонент скорости течения. Основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости имеют вид [19]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.44)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_s}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.45)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.46)$$

где p, u, v – контактное давление и компоненты скорости течения; $\sigma_s = \sqrt{3}\tau_s$ – напряжения течения пластического материала в рассматриваемой области; $h = h(t)$ – заданный закон изменения толщины слоя; величина

$$\lambda(t) = \ln \frac{h_0}{h(t)}$$

– степень деформации; t_0 – начальный момент времени.

На заранее неизвестной свободной границе $\Gamma_\sigma: F(x, y, t) = 0$ заданы следующие краевые условия: скалярные динамические (2.47)

$$\vec{\sigma}^{(n)} = \tilde{\sigma} \vec{n} = (\sigma_{xx}n_x + \sigma_{xy}n_y; \sigma_{yy}n_y + \sigma_{xy}n_x) = \vec{0} \quad (2.47)$$

и одно кинематическое (2.48)

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial F}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\text{grad}F|}, \quad (2.48)$$

из которого определяется сама граница Γ_σ . На поверхности контакта с инструментом $\Gamma_c: G(x, y, t) = 0$, как правило, известной, заданы следующие два условия: одно динамическое относительно касательного напряжения (2.49):

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{t}| = |\sigma_{xx}n_xn_y + \sigma_{xy}(n_y^2 - n_x^2) - \sigma_{yy}n_xn_y| = \mu\tau_s, (0 \leq \mu \leq 1) \quad (2.49)$$

и кинематическое условие в виде условия непроницаемости (2.50):

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = - \frac{\partial G}{\partial t} \cdot \frac{1}{|\text{grad}G|}, \quad (2.50)$$

где \vec{t} и \vec{n} – единичные векторы касательной и нормали к границе Γ_c .

В частности, на неподвижной границе нормальная скорость равна нулю. Пусть

$$\sigma_s, p_0, L_0, h_0, \frac{dh(t_0)}{dt}$$

– характерные значения предела текучести материала, контактного давления, линейного размера и толщины слоя, а также скорости сближения деформирующих инструментов. Относительную толщину пластического слоя $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0} \ll 1$ примем за

малый параметр. При оценке порядка слагаемых в условии несжимаемости (2.46) получаем, что

$$t_0 = \frac{L_0}{v_0}; \quad v_0 = -\frac{dh(t_0)}{dt} \frac{1}{\varepsilon},$$

а из квазистатических уравнений равновесия (2.44) и (2.45), что

$$p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}.$$

Поэтому приходим к очевидным выводам, что характерная величина скорости течения вдоль слоя намного больше скорости сближения инструментов и что характерная величина контактного давления намного превышает предел текучести материала слоя. Полагая, что толщина слоя h , в отличие от других линейных размеров (координат), при делении на $h(t_0)$ становится безразмерной, система уравнений переписана в безразмерном виде [129]:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\Delta \bar{u}}{\bar{u}} - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \varepsilon \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\Delta \bar{v}}{\bar{v}} - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (2.53)$$

где безразмерные величины отмечены диакритическими знаками «чертой сверху» (заметим, что в уравнениях равновесия при слагаемых со старшими производными-лапласианами появился малый параметр ε).

Безразмерные характеристики на свободной границе $\Gamma_\sigma: F(x, y, t) = 0$

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_y = 0, \quad (2.54)$$

$$\left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x + \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \varepsilon \right] n_y = 0, \quad (2.55)$$

$$\bar{v}_n = -\frac{\partial \bar{F} / \partial \bar{t}}{|\text{grad} \bar{F}|}, \quad (2.56)$$

на контактной границе с инструментом Γ_c

$$\left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] n_x n_y + \left[\frac{1}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \right) \varepsilon \right] (n_y^2 - n_x^2) -$$

$$- \left[-\bar{p} + \left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} \right) \varepsilon \right] n_x n_y = \pm \frac{\mu}{\sqrt{3}} \varepsilon, \quad (2.57)$$

$$\bar{v}_n = - \frac{\partial \bar{G} / \partial \bar{t}}{|\text{grad} \bar{G}|}, \quad (2.58)$$

Полученная система дифференциальных уравнений в частных производных (2.51) – (2.53) вместе с граничными условиями (2.54) – (2.58) составляют общую краевую задачу растекания слоя в модели «вязкой жидкости».

В главном приближении ($\varepsilon = 0$) исходные уравнения упрощаются с понижением порядка системы (2.58):

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = - \frac{2}{\sqrt{3} \bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = - \frac{2}{\sqrt{3} \bar{h}} \frac{\bar{v}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0 \quad (2.59)$$

Понятно, что количество граничных условий для упрощенной задачи в рамках «идеальной жидкости» уменьшается.

2.3.1 Краевая задача течения пластического слоя в новой постановке с ограничением в одном или нескольких направлениях

Представленные материалы опубликованы автором в работах [88, 89, 122, 135].

Пусть функция тока $\psi = \psi(x, y)$: условие несжимаемости (2.46) примет вид:

$$u = \frac{d\lambda}{dt} \left(\psi'_y + \frac{x}{2} \right); \quad v = - \frac{d\lambda}{dt} \left(\psi'_x - \frac{y}{2} \right). \quad (2.60)$$

Компоненты скоростей (2.60) подставим в квазистатические уравнения равновесия (2.51) – (2.53) и в результате получим систему из двух дифференциальных уравнений относительно p и ψ :

$$\frac{p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta\psi'_y}{p'_y + \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta\psi'_x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{\psi'_y + \frac{x}{2}}{\psi'_x - \frac{y}{2}} \quad (2.61)$$

$$\left(p'_x - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta\psi'_y\right)^2 + \left(p'_y - \left(\frac{\sigma_s}{3}\right) \Delta\psi'_x\right)^2 = \frac{4\sigma_s^2}{3h^2}. \quad (2.62)$$

В качестве примера рассмотрен в натуральных величинах задачу течения пластического слоя, имеющего в начальный момент деформирования форму прямоугольника в плане (рис. 2.5 а). В плоскости Oxy это «двумерная область течения с подвижными (пунктирные линии) и непроницаемыми ($y = \pm b_0$) границами»²⁹ [1] (рис. 2.5 б).

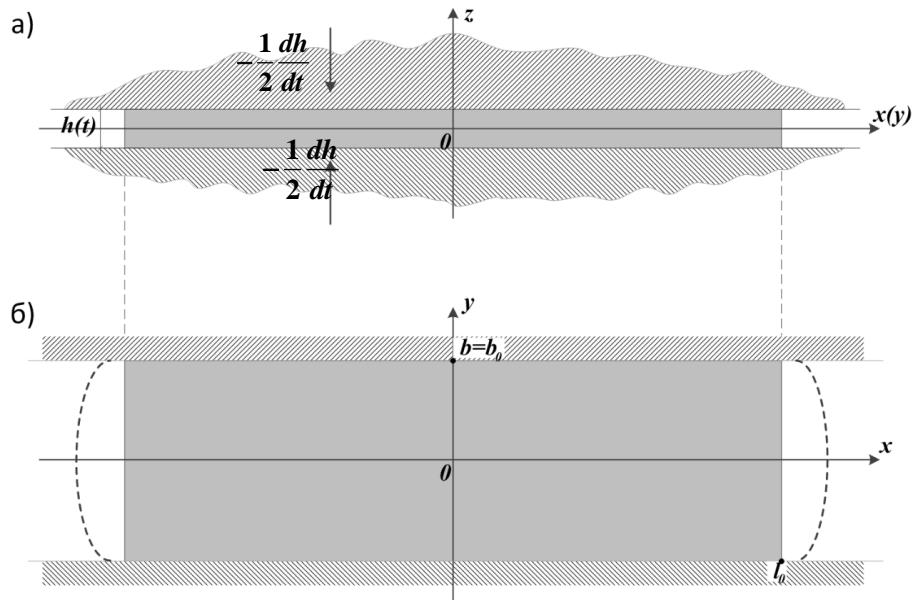


Рис. 2.5. Схема течения осаживаемого пластического слоя с ограничением по боковым поверхностям: а) – в поперечном сечении (плоскость Oxz); б) – в сечении (плоскость Oxy)

Используя симметрию пластической области, ограничиваемся рассмотрением элемента слоя, расположенного в первом квадранте выбранной системы координат. У неподвижной стенки инструмента при ($G(x, y) \equiv y - b_0 = 0$):

$$v = 0 \Rightarrow \psi'_x - \frac{b_0}{2} = 0, \quad (2.63)$$

²⁹ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = -\sqrt{3}\lambda'\mu \Rightarrow \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = -\sqrt{3}\lambda'\mu. \quad (2.64)$$

Краевые условия:

$$y = 0: v = 0 \Rightarrow \psi'_x = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \Rightarrow \psi''_{yy} = 0, \quad (2.65)$$

$$x = 0: u = 0 \Rightarrow \psi'_y = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \psi''_{xx} = 0. \quad (2.66)$$

На неизвестной свободной границе $F(x, y, t) = 0$, в начальный момент имеющей параметры $x = l_0(n_x = 1, n_y = 0)$, краевые условия определяются:

$$\sigma_{xx} = 0 \Rightarrow -p + \sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s\psi''_{xy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \psi''_{yy} - \psi''_{xx} = 0. \quad (2.67)$$

Для исключения влияния краевых эффектов аналитическое решение задачи находится вдали от оси $x = 0$ и свободной границы $x = 0,5l_0$, так как протяженность области течения в направлении x позволяет это сделать. Для рассматриваемого участка области течения $v(x, y) = 0$. После интегрирования условия несжимаемости (2.47):

$$u(x, y) = \lambda'[x + g(y)],$$

где функцию $g(y)$ можно определить из других уравнений системы: (2.56) дает $p = p(x)$ и тогда из (2.45):

$$p'(x) = \frac{\sigma_s}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}, \quad (2.68)$$

где в левой части стоит функция аргумента x , а в правой – функция y и параметра $h(t)$, другими словами, имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. В итоге получаем систему с произвольной постоянной (функцией времени) k :

$$g''(y) = k = const; \quad p'(x) = \frac{\sigma_s k}{3} - \frac{2\sigma_s}{\sqrt{3}h}. \quad (2.69)$$

Из решения первого уравнения (2.61) и подстановки граничных условий (2.65), (2.66) получено

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0}y^2, \quad k = -\frac{\sqrt{3}\mu}{b_0}, \quad (2.70)$$

$$u(x, y) = \lambda' \left[x - \frac{\sqrt{3}\mu}{2b_0} y^2 + c \right], \quad (2.71)$$

где c – произвольная постоянная интегрирования. Первое слагаемое в правой части уравнения (2.71) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе, равно как и на других границах, отсутствует. Полагаем, что сечение $x = x_f$ представляет собой условную свободную границу ($x_f h = x_0 h_0$). Тогда из интегрального условия сохранения объема несжимаемого материала

$$-x_f(t) \frac{dh}{dt} b_0 = \int_0^{b_0} hu(x_f, y) dy$$

определена входящую в решение произвольная постоянная $c = \frac{\sqrt{3}}{6} \mu b_0$, что дает возможность получить окончательную формулу для скорости течения:

$$u(x, y) = \lambda' \left[x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (2.72)$$

Сопоставлением найденной скорости (2.72) и граничного условия (2.66) при значении $x = 0$ убеждаемся, что оно выполняется в интегральном виде:

$$\int_0^{b_0} u(0, y) dy = \frac{\lambda' \sqrt{3}}{6b_0} \int_0^{b_0} (b_0^2 - 3y^2) dy = 0.$$

Из уравнения системы (2.69) после интегрирования получено (2.73):

$$p(x) = p_0 - \frac{\sigma_s x}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right), \quad (2.73)$$

с постоянной интегрирования p_0 , не зависящей от координаты y . Полагая, что на свободной границе нормальное напряжение равно нулю:

$$\sigma_{xx} = -p + \frac{4\sigma_s}{3} = 0,$$

$$p_0(t) = \frac{2\sigma_s x_f}{\sqrt{3}h} + \left(\frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \sigma_s.$$

При достаточно большом x_f , третьим слагаемым в правой части можно пренебречь, тогда

$$p_0(t) = \frac{\sigma_s x_f}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right),$$

$$p \approx \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\mu}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (2.74)$$

Функцию тока находим из дифференциального уравнения:

$$\psi'_x = \frac{y}{2}; \quad \psi'_y = \frac{x}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 - 3y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (\mu b_0^2 y - 3y^3) + c_1$$

Таким образом, в рамках общей модели «вязкой жидкости» получено приближенное аналитическое решение. На границе $x = 0$, а также на свободной границе $x = x_f(t)$ оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ($x = const$) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Этот факт подтверждается результатами проведенных экспериментов [135]. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости», в которой не учитываются касательные напряжения.

2.3.2 Постановка и решение практических задач

Материалы изложены автором в работах [136, 137, 138].

Тонкая полоса, занимающая область

$$S(x, y) = \{(x, y) | l_1(t) < x < l_2(t); 0 \leq y \leq h(t)\},$$

свободно растекается под действием деформирующего инструмента, при этом дифференциальные уравнения квазистатического равновесия имеют вид [19]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{|u|}; \quad \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \quad (2.75)$$

где $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины осаживаемой пластической полосы; $\lambda(t) = \ln \frac{h_0}{h(t)} \geq 0$ – степень деформации по А.А. Ильюшину (аналог меры накопленной в частице деформации); $u = u(x, t)$; $p = p(x, t)$ – соответственно скорость течения вдоль слоя и контактное давление в полосе.

Краевые условия на свободных границах:

$$x = l_1; p = \sigma_s; x = l_2; p = \sigma_s. \quad (2.76)$$

Существует неизвестная линия ветвления течения $x = x_0 \in (l_1, l_2)$, на которой $u(x_0, t) = 0$. После интегрирования уравнения (2.75) и подстановки граничных условий (2.76), получено значение контактного давления в полосе (рис. 2.6) [136]:

$$p(x, t) = \begin{cases} \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x), & x \in (x_0, l_2) \\ \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1), & x \in (l_1, x_0) \end{cases}. \quad (2.77)$$

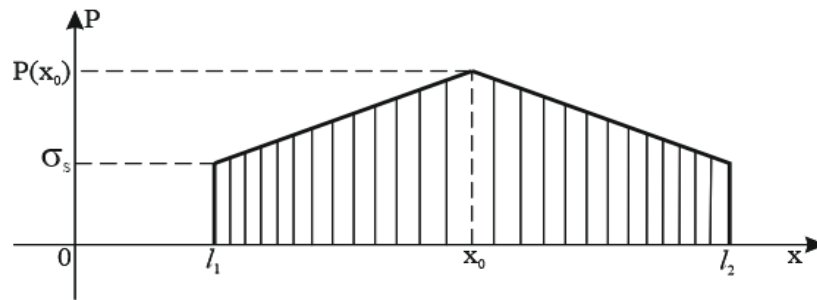


Рис. 2.6. Эпюра распределения контактного давления в полосе

При интегрировании условия несжимаемости из (2.75) с учетом условия на линии ветвления, найдено:

$$u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x - x_0) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(x - \frac{l_1 + l_2}{2} \right), \quad (2.78)$$

при этом линия ветвления течения $x = x_0(t)$ определяется из условия непрерывности контактного давления. Удельная сила для осуществления пластической осадки полосы равна площади эпюры (см. рис. 2.5):

$$P(t) = \int_{l_1}^{l_2} p(x, t) dx = \int_{l_1}^{x_0} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(x - l_1) \right] dx + \int_{x_0}^{l_2} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - x) \right] dx = \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\sigma_s x + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_1 x \right) \right] \Big|_{l_1}^{x_0} + \left[\sigma_s x + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \Big|_{x_0}^{l_2} = \\
 &= \sigma_s (l_2 - l_1) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_1)^2}{h \cdot 4}.
 \end{aligned}$$

Рассмотрены отдельно различные обобщения задачи о свободном растекании полосы. Материал полосы свободно растекается в обе стороны так, что область контакта инструмента с пластической полосой, расширяясь в обе стороны, образует отрезок $[l_1(t), l_2(t)]$ с подвижными концами (рис. 2.7) [136].

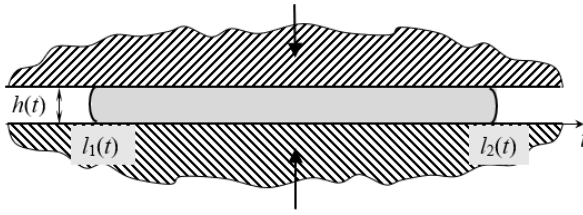


Рис. 2.7. Свободное растекание материала полосы с подвижными концами

В этом случае положения свободно перемещающихся концов полосы находятся из решения следующей задачи Коши, описанной системой линейных однородных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
 \frac{dl_2}{dt} &= u(l_2, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right), \\
 \frac{dl_1}{dt} &= u(l_1, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_1 - l_2}{2} \right) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right), \\
 t = t_0: &l_1(t) = l_{10}, l_2(t) = l_{20}.
 \end{aligned} \tag{2.80}$$

Тогда решение задачи (2.80) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 l_1(t) &= \frac{1}{2} \left[(l_{20} + l_{10}) - \frac{h_0}{h(t)} (l_{20} - l_{10}) \right]; \\
 l_2(t) &= \frac{1}{2} \left[(l_{20} + l_{10}) + \frac{h_0}{h(t)} (l_{20} - l_{10}) \right].
 \end{aligned} \tag{2.81}$$

Осаживаемая пластическая полоса, занимает область контакта с неподвижным левым концом так, что она может свободно перемещаться в противоположную от зафиксированного конца (правую) сторону, и представляется отрезком $[l_{10}, l_2(t)]$ с одним подвижным концом (рис. 2.8).

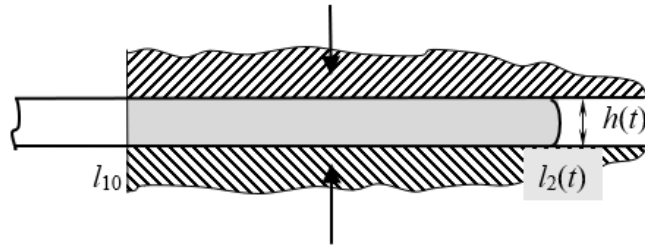


Рис. 2.8. Пластическая осадка полосы с подвижным правым концом

При этом допускается, что пластический материал течет по всей области контакта [136].

Предложенное решение остается актуальным. Для определения $l_2(t)$ воспользовались дифференциальным уравнением

$$l_1(t) = l_{10}; \quad \frac{dl_2}{dt} = u(l_2, t) - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(\frac{l_2 - l_{10}}{2} \right), \quad (2.82)$$

$$t = t_0; \quad l_2(t) = l_{20},$$

решение которого, имеет вид [143]:

$$l_1(t) = l_{10} + (l_{20} - l_{10}) \sqrt{\frac{h_0}{h(t)}}. \quad (2.83)$$

Левый неподвижный конец области контакта защемлен так, что пластическое течение в области $[l_{10}, l_2(t)]$ происходит в одном направлении, причем $x_0 \equiv l_{10}$. В этом случае решение краевой задачи

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h}; \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0$$

при граничных условиях $x = l_{10}; u(l_{10}, t) = 0; x = l_2(t); p = \sigma$ имеет вид:

$$p(x, t) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - x);$$

$$u(x, t) = \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x - l_{10}); \quad (2.84)$$

$$l_2(t) = l_{10} + \frac{h_0}{h} (l_{20} - l_{10}).$$

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае, безусловно, зависит от условия на левом конце (рис. 2.9) [136, 137], и принимает вид:

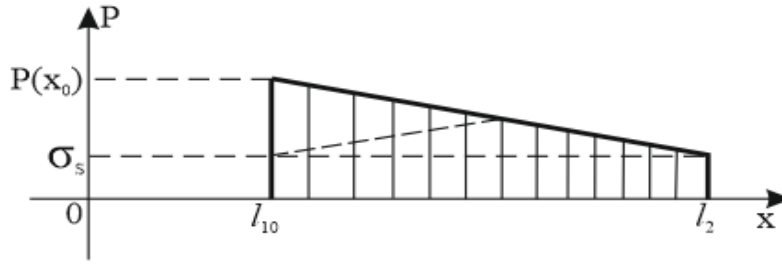


Рис. 2.9. Распределение контактного давления в задаче о растекании пластической полосы с заземленным левым концом

$$\begin{aligned}
 p(t) \equiv p_3(t) &= \int_{l_{10}}^{l_2} \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - x) \right] dx = \\
 &= \sigma_s (l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_{10})^2}{2}.
 \end{aligned} \tag{2.85}$$

К левому неподвижному концу области контакта приложено растягивающее напряжение: $x = l_{10}$; $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$, такое, что $-\sigma_s < q_0 < 0$. Согласно условию полной пластичности [58], для контактного давления на левом конце $p = q_0 + \sigma_s$ справедливо условие: $0 < p < \sigma_s$.

Выделен отдельно предельный случай: $q_0 = -\sigma_s$, который моделирует процесс пластического растяжения тонкой полосы с одновременной пластической осадкой зажатых концевых ее частей [137]. Решение краевой задачи в этом случае определяется системой:

$$p(x, t) = \begin{cases} \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - x), x \in (x_0, l_2); \\ \sigma_s + q_0 + \frac{2\tau_s}{h} (x - l_{10}), x \in (l_{10}, x_0); \end{cases} \tag{2.86}$$

$$u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x - x_0), \text{ где}$$

$$x_0 = \frac{l_{10} + l_2}{2} - \frac{q_0}{4\tau_s} h \geq \frac{l_{10} + l_2}{2}.$$

Величина удельной силы для осуществления пластической осадки в этом случае равна площади заштрихованной эпюры, изображенной на рис. 2.10 [136, 138].

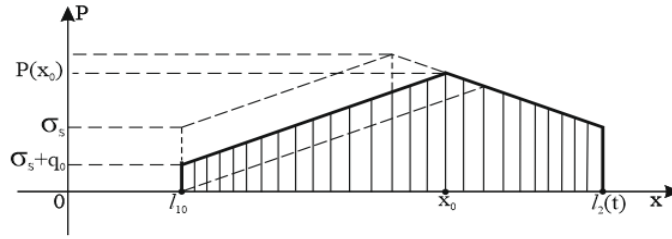


Рис. 2.10. Эпюра контактного давления в пластической полосе, на левом конце которой приложено растягивающее напряжение $\sigma_{xx} = -q_0 > 0$

При этом давление определено соотношением:

$$\begin{aligned}
 p(t) &= \int_{l_{10}}^{l_2} p(x, t) dx = \left[(\sigma_s + q_0)x + \frac{2\tau_s}{h} \left(\frac{x^2}{2} - l_{10}x \right) \right] \Big|_{l_{10}}^{x_0} + \\
 &+ \left[\sigma_s x + \frac{2\tau_s}{h} \left(l_2 x - \frac{x^2}{2} \right) \right] \Big|_{x_0}^{l_2} = \\
 &= \sigma_s (l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_{10})^2}{h} + q_0 \left(\frac{l_2 + l_{10}}{2} - \frac{q_0}{2\tau_s} h \right) \leq P_1(t), \text{ где} \\
 p_1(t) &= \sigma_s (l_2 - l_{10}) + \frac{2\tau_s (l_2 - l_{10})^2}{h}
 \end{aligned} \tag{2.87}$$

– удельная сила для осуществления пластической осадки полосы со свободными концами.

В рамках общей математической модели «вязкой жидкости» получено приближенное аналитическое решение. Приведенные различные обобщения классической задачи Л. Прандтля представляют интерес не только для анализа сжатия тонкого слоя, но и при исследовании задач о правке плоских заготовок с наложением одноосного растяжения за пределом упругости, выравнивание которых другими способами не дает удовлетворительных результатов, а также при решении плоских задач гибки с растяжением крупногабаритных облицовочных деталей летательных аппаратов и в судостроении.

Полученные решения универсальны, подтверждены результатами экспериментов и их можно распространить на пространственные контактные задачи течения в тонком пластическом слое между сближающимися поверхностями инструмента.

2.4 Численно-аналитические методы решения краевой задачи течения тонкого слоя из разнородных сред с помощью модели «вязкой жидкости»

Материалы изложены автором в публикациях [135, 136].

Предполагается, что область из идеально жесткопластических сред, представляющих собой относительно тонкие слои, имеющих разные механические характеристики подвергается деформированию. Движение абсолютно жестких шероховатых частей инструмента производится по нормали к поверхности области (рис. 2.11) [139, 140].

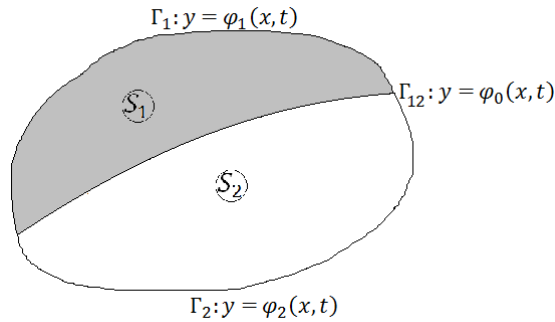


Рис. 2.11. Двуслойная область из разнородных сред

«Рассмотрим

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta u - \frac{2\tau_{sk}}{h} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.88)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\sigma_{sk}}{3} \frac{dt}{d\lambda} \Delta v - \frac{2\tau_{sk}}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.89)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.90)$$

где p - давление на поверхностях контакта; u, v - скорости течения;

$\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk}$ ($k = 1, 2$) - предел текучести сжимаемого материала в областях S_1 и S_2 соответственно; $h = h(t)$ - закон изменения толщины слоя»³⁰ [1];

³⁰ Кадымов, В.А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

$$\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right) \quad - \text{степень деформации; } h_0 = h(t_0).$$

На линии раздела двух сред $y = \varphi_0(x, t)$ выполняются граничные условия

$$\sigma_{11}^{(1)}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) + \sigma_{12}^{(1)} = \sigma_{11}^{(2)}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) + \sigma_{12}^{(2)}, \quad (2.91)$$

$$\sigma_{12}^{(1)}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) + \sigma_{22}^{(1)} = \sigma_{12}^{(2)}\left(-\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right) + \sigma_{22}^{(2)}, \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} + u_k \frac{\partial\varphi_0}{\partial x} = v_k. \quad (2.93)$$

На контуре $\Gamma_k: y = \varphi_k(x, t)$, ($k = 1, 2$), ограничивающим пластическую область:

$$\sigma_{11}^{(k)}\left(-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right) + \sigma_{12}^{(k)} = 0, \quad (2.94)$$

$$\sigma_{12}^{(k)}\left(-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x}\right) + \sigma_{22}^{(k)} = 0, \quad (2.95)$$

$$\frac{\partial\varphi_k}{\partial t} + u_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial x} = v_k, \text{ где} \quad (2.96)$$

$$\sigma_{11}^{(k)} = -p + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u_k}{\partial x};$$

$$\sigma_{12}^{(k)} = \frac{1}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} + \frac{\partial v_k}{\partial x}\right);$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = -p + \frac{2}{3}\sigma_{sk} + \frac{2}{3}\sigma_{sk} \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v_k}{\partial x}.$$

2.4.1 Обобщение и постановка краевой задачи Коши в безразмерных величинах

С помощью методов анализа размерности переформулирована постановочная часть рассматриваемой задачи. Для этого следующим образом введен малый параметр. Известные характеристики пластического слоя, где h_0 – толщина; L_0 – наибольший линейный размер; v_0 – скорость течения; p_0 –

контактное давление разделено на относительную толщину слоя $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0} \ll 1$, которую будем считать малым параметром.

$$p_0 = \frac{\sigma_{s_1}}{\varepsilon}, v_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dh(t_0)}{dx} \right).$$

В этих безразмерных величинах постановка задачи для подобласти S_1 видоизменится и принимает вид:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\varepsilon}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.97)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\varepsilon}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.98)$$

для подобласти S_2 :

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = \frac{\varepsilon}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.99)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = \frac{\varepsilon}{3} \frac{d\bar{t}}{d\lambda} \bar{\Delta} \bar{u} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \cdot \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \text{ в } S_2 \quad (2.100)$$

для объединения подобластей $S_1 \cup S_2$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{d\bar{t}} = 0, \text{ где } \delta = \frac{\sigma_{s_1}}{\sigma_{s_2}}. \quad (2.101)$$

Динамические условия (2.102) на границе Γ_{12} подобластей разрешены относительно контактного давления (в дальнейших рассуждениях диакритические знаки над безразмерными величинами опускаем):

$$(p_1 - p_2) \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) = \varepsilon A, \quad p_1 - p_2 = \varepsilon B, \quad (2.102)$$

где соответственно A и B :

$$A \equiv \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) \right] \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right],$$

$$B \equiv \frac{1}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left(-\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right) + \left[\frac{2}{3} \left(1 - \frac{1}{\delta} \right) + \frac{2}{3} \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right].$$

Малый параметр в (2.103) в виде разности безразмерных давлений определяется при условии

$$A + B \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = 0, \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) - \frac{1}{\delta} \left(\frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial v_2}{\partial x} \right) \right] \left(\frac{\partial \varphi_0^2}{\partial x} - 1 \right) = \\ & = 2 \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{1}{\delta} \frac{\partial v_2}{\partial y} \right) \right] \left(- \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right). \end{aligned}$$

Динамические условия (2.105), (2.106) на свободной границе приводятся к виду:

$$p_k \left(- \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right) = \varepsilon A_1, \quad p_k = \varepsilon B_1, \quad (2.104)$$

где p_k - малый параметр, который однозначно определяется при условии:

$$\left(\frac{\partial u_k}{\partial y} + \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \varphi_k^2}{\partial x} - 1 \right) = 2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x} - \frac{\partial v_k}{\partial y} \right) \left(- \frac{\partial \varphi_k}{\partial x} \right). \quad (2.105)$$

В главном приближении при « $\varepsilon = 0$ и отказе от условий (2.103) и (2.105) краевая задача в модели «вязкой жидкости» сводится к известной задаче о течении слоя в модели «идеальной жидкости» в приближении относительно искомым переменных u, v, p : для подобласти»³¹ [1] S_1 :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

для подобласти S_2 :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{1}{\delta} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h} \frac{1}{\delta} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}$$

на границе раздела подобластей Γ_{12} ,

$$p_1 = p_2;$$

на контуре Γ_k ($k = 1, 2$):

$$p_k = 0.$$

Кинематические граничные условия (2.93) и (2.96) и уравнение несжимаемости (2.101) остаются без изменения.

³¹ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

2.4.2 Задача Коши течения тонкого слоя из разнородных пластических сред как «идеальной жидкости» при свободном растекании

Материалы изложены автором в публикациях [140, 141].

Решена краевая задача течения тонкого пластического слоя в области, составленной из двух разнородных сред, границы которых образованы лучами, выходящими из начала прямоугольной системы координат Ox , в которой в начальный момент времени $t = t_0$ указанная область задается углом $\beta_2 \geq 0$ (рис.2.12) [139, 140].

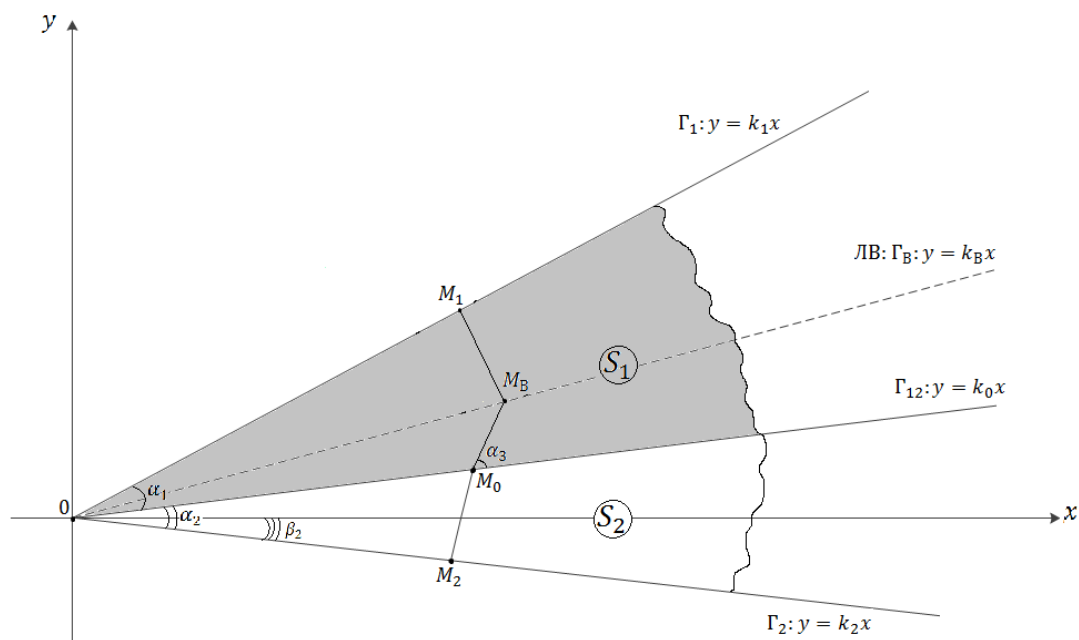


Рис. 2.12. К задаче свободного растекания пластических подобластей в форме клина из разных сред

Пластический слой имеет постоянную толщину в начальный момент времени. Под действием внешней нагрузки, создаваемой сближающимися абсолютно жесткими шероховатыми плитами, идеальножесткопластический слой переходит в пластическое состояние. Подобная задача, описанная математической моделью «идеальной жидкости» в симметричной области, решена в [77]. Составлены уравнения границ описанной области в начальный момент времени:

$$\Gamma_1: \quad y = k_1 x, \quad k_1 > 0,$$

$$\Gamma_2: \quad y = k_2 x, \quad k_2 \leq 0,$$

$$\Gamma_{12}: \quad y = k_0 x,$$

где k_1, k_2, k_0 определяются известными из построения углами α_1, α_2 и β_2 :

$$\operatorname{tg} \beta_2 = -k_2,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) = k_0,$$

$$\operatorname{tg}[\alpha_1 + (\alpha_2 - \beta_2)] = k_1.$$

Основные уравнения краевой задачи течения пластического слоя на плоскости в фиксированный момент времени $t \geq t_0$ выписаны в размерных величинах [140]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_{sk}}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.106)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_{sk}}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (2.108)$$

В начальный момент времени условия на границе раздела подобластей заданы уравнениями

$$\varphi_0(x, t_0) = k_0 x.$$

$$p_1 = p_2,$$

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} = v,$$

также являются известными в начальный момент условия на свободных границах

$$(\varphi_m(x, t_0) = k_m x):$$

$$p = 0$$

$$\frac{\partial \varphi_m}{\partial t} + u \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} = v,$$

В процессе деформирования сжатием ($t > t_0$) найдем условия на неизвестной границе раздела двух сред

$$\Gamma_{12}(y = \varphi_0(x, t)),$$

и также на неизвестных свободных границах

$$\Gamma_m(y = \varphi_m(x, t), t > t_0, m = 1, 2).$$

Величины p, u, v – контактное давление и скорости течения;

$$\sigma_{sk} = \sqrt{3}\tau_{sk} \quad (k = 1, 2)$$

– пределы текучести пластических материалов подобластей S_1 и S_2 соответственно, находящимися в соотношении $\sigma_{s1} \leq \sigma_{s2}$; $h = h(t)$ – известный закон изменения толщины слоя; $\lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right)$ – степень деформации; $h_0 = h(t_0)$;

L_0 – линейная характеристика размера слоя. Пусть $\varepsilon = \frac{h_0}{L_0}$ малый параметр. Тогда:

$$\delta = \frac{\sigma_{s1}}{\sigma_{s2}}, \quad p_0 = \frac{\sigma_{s1}}{\varepsilon}, \quad v_0 = -\frac{\left(\frac{dh(t_0)}{dt}\right)}{\varepsilon}.$$

Постановка краевой задачи в безразмерных величинах для подобласти S_1 имеет вид:

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.110)$$

для подобласти S_2 :

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.111)$$

$$\delta \frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{\bar{h}} \frac{\bar{u}}{\sqrt{\bar{u}^2 + \bar{v}^2}}, \quad (2.112)$$

для объединенных подобластей $S_1 \cup S_2$:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (2.114)$$

$$\bar{p}_1 = \bar{p}_2. \quad (2.113)$$

Условия на границе раздела подобластей Γ_{12} :

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_0}{\partial \bar{x}} = \bar{v}, \quad (2.114)$$

$$p = 0. \quad (2.115)$$

Условия на свободной границе Γ_k ($k = 1, 2$):

$$\frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{t}} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\varphi}_k}{\partial \bar{x}} = \bar{v}. \quad (2.116)$$

При проведении вычислений, не нарушая общности, диакритические знаки над безразмерными величинами можно не использовать. Линия раздела течения, образуется пересечением различных линий тока и на которой $u^2 + v^2 = 0$ [19]. В общем случае, на различных участках пластической области при толщине $h = h(x)$ линии тока представляют собой прямые линии, перпендикулярные контуру. Рассмотрена произвольная точка $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащая границе двух сред Γ_{12} . Если

$$\sigma_{S_1} \sin \alpha_1 \geq \sigma_{S_2} \sin \alpha_2, \quad (2.117)$$

то линия раздела течения в начальный момент $t = t_0$ принадлежит подобласти S_1 . Построена линия тока, исходящая из точки M_2 подобласти S_2 в область S_1 и приходящую в точку $M_0 \in \Gamma_{12}$. Для этого найдем угол преломления $\frac{\pi}{2} - \alpha_3$ линии тока в точке M_0 [147]:

$$\begin{aligned} \frac{dp(s)}{ds} &= \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_2\right) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \cos \alpha_3, \\ \delta \cos \alpha_3 &= \sin \alpha_2, \end{aligned} \quad (2.118)$$

где s – длина дуги линии раздела сред Γ_{12} . Из условия (2.118) очевидно следует, что при пересечении линии раздела двух пластических сред линия тока преломляется, причем угол преломления увеличивается при прохождении в «менее плотную» среду. Из (2.120) следует, что все линии тока входят в область S_2 под постоянным углом к оси Ox . Если линия тока, выходящая из точки $M_0 \in \Gamma_{12}$ известна, то появляется возможность найти точку $M_B(x_B; y_B)$ ветвления течения из условия:

$$\frac{2}{\sqrt{3}h\delta} (OM_0 \sin \alpha_2) + \frac{2}{\sqrt{3}h} [M_0 M_B] = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1 + k_1^2}}. \quad (1.119)$$

Правая часть уравнения (2.119) – контактное давление в точке M_B , которое определено вдоль другой линии тока, исходящей от свободной границы Γ_1 подобласти S_1 . Расстояние от точки M_B до границы Γ_1 можно определить по формуле:

$$s = \frac{|k_1 x_B - y_B|}{\sqrt{1 + k_1^2}} = \frac{k_1 x_B - y_B}{\sqrt{1 + k_1^2}},$$

Остальные размеры величин, входящие в (2.119), находятся стандартным образом:

$$OM_0 = \sqrt{x^2 + y^2} = x_0 \sqrt{1 + k_0^2}.$$

Уравнение прямой M_0M_B :

$$y - y_0 = \operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) \cdot (x - x_0), \quad (2.120)$$

где $\beta_0 \equiv \operatorname{arctg} k_0 \geq 0$.

Из (2.120) получено:

$$\operatorname{tg}(\beta_0 + \alpha_3) = \frac{\operatorname{tg}\beta_0 + \operatorname{tg}\alpha_3}{1 - \operatorname{tg}\beta_0 \operatorname{tg}\alpha_3} = \frac{k_0 \sin\alpha_2 + \sqrt{\delta^2 - \sin^2\alpha_2}}{\sin\alpha_2 - k_0 \sqrt{\delta^2 - \sin^2\alpha_2}} \equiv k_5. \quad (2.121)$$

При этом, замечено, что

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}[(\alpha_2 - \beta_2) + \beta_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) + \operatorname{tg}\beta_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha_2 - \beta_2) \operatorname{tg}\beta_2} = \frac{k_0 - k_2}{1 + k_0 k_2};$$

$$\sin\alpha_2 = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha_2}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_2}} = \frac{k_0 - k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}} > 0. \quad (2.122)$$

Подставлено (2.122) в (2.121) и найдено k_5 в зависимости от k_0, k_2 и δ :

$$k_5 = \frac{k_0(k_0 - k_2) + \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + \delta^2(k_0 - k_2)^2}}{(k_0 - k_2) - k_0 \sqrt{\delta^2(1 + k_0 k_2)^2 + \delta^2(k_0 - k_2)^2}}. \quad (2.123)$$

В частном случае однородной пластической среды $\delta = 1$ из (2.121) и (2.123) соответственно получено:

$$k_5 = -\frac{1}{k_2},$$

$$M_0M_B = \sqrt{(y_B - y_0)^2 + (x_B - x_0)^2} = |x_B - x_0| \sqrt{1 + k_5^2}, \quad (2.124)$$

Подставлены (2.122), (2.123), (2.124) в (2.119):

$$x_B = x_0 \frac{f_1(k_1, k_2, k_0, \delta)}{f_2(k_1, k_2, k_0, \delta)}, \text{ где} \quad (2.125)$$

$$f_1 \equiv -\frac{1}{\delta} \sqrt{1 + k_0^2} \sin\alpha_2 + \sqrt{1 + k_5^2} + \frac{k_5 - k_0}{\sqrt{1 + k_1^2}} =$$

$$= -\frac{1}{\delta} \frac{\sqrt{1+k_0^2}(k_0-k_2)}{\sqrt{(1+k_0k_2)^2+(k_0-k_2)^2}} + \sqrt{1+k_5^2} + \frac{k_5-k_0}{\sqrt{1+k_1^2}};$$

$$f_2 \equiv \sqrt{1+k_5^2} - \frac{k_1-k_5}{\sqrt{1+k_1^2}}.$$

При анализе выражений (2.124) и (2.125), сделано заключение, что линия ветвления (ЛВ) течения в начальный момент времени $t = t_0$ есть прямая:

$$y_B = k_B x_B, k_B \equiv \frac{f_1 k_5 + f_2 (k_0 - k_5)}{f_1}. \quad (2.126)$$

Если среда однородна, то при $\delta = 1$ уравнение (2.128) упрощается:

$$k_B = \frac{k_2 \sqrt{1+k_1^2} + k_1 \sqrt{1+k_2^2}}{\sqrt{1+k_1^2} + \sqrt{1+k_2^2}},$$

$$\arctg k_B - \arctg k_2 = \arctg k_1 - \arctg k_B = \frac{1}{2} (\arctg k_1 - \arctg k_2).$$

На основании последнего уравнения сделано заключение, что для пластического слоя из однородной среды линия раздела течения проходит на равных расстояниях от линий свободных контуров Γ_1 и Γ_2 . При условии равенства $k_2 = -k_1$ получена величина $k_B = 0$, т.е. линия раздела течения сольется с осью Ox .

Подобласть S_{1B} имеет линейные границы Γ_1 и Γ_B . Уравнение линии тока, проходящей через произвольную точку $M(x, y) \in S_{1B}$:

$$y - y_B = -\frac{1}{k_1} (x - x_B).$$

Из последнего уравнения найдено x_B

$$x_B = \frac{k_1 y + x}{k_1 k_B + 1}.$$

Тогда становятся известными величины давления и кинематических параметров:

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x - y)}{\sqrt{1+k_1^2}}, \quad (2.127)$$

$$V(x, y) = \frac{d\lambda}{dt} |x_B - x| \sqrt{1 + \frac{1}{k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x) \sqrt{1+k_1^2}}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\sqrt{1+k_1^2}}{k_1 k_B + 1} (y - k_B x),$$

$$u = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = -V \sin\beta_1 = -\frac{Vk_1}{\sqrt{1+k_1^2}} = -\frac{d\lambda}{dt}(x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

$$v = V \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta_1\right) = V \cos\beta_1 = \frac{V}{\sqrt{1+k_1^2}} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(x_B - x)}{k_1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1},$$

$$\beta_1 = \arctg k_1 > 0.$$

Перешли к рассмотрению подобласти S_{B0} , ограниченную линиями Γ_B и Γ_{12} . Уравнение линии тока, проходящей через произвольную точку $M(x, y) \in S_{B0}$ подобласти имеет вид:

$$y - y_B = k_B(x - x_B),$$

из решения которого, определена координата x_B :

$$x_B = \frac{y - k_5 x}{k_B - k_5}.$$

Соотношения для расчета давления и кинематических параметров принимают вид:

$$\begin{aligned} p(x, y) &= p(M_B) + \frac{2}{\sqrt{3}h} (M_B M) = \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{(k_1 x_B - y_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}h} \sqrt{(y - y_B)^2 + (x - x_B)^2} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{y - k_5 x}{k_B - k_5} \right) \frac{(k_1 - k_B)}{\sqrt{1+k_1^2}} + \frac{2}{\sqrt{3}h} \left(\frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right) \sqrt{1+k_5^2}, \\ V(x, y) &= \frac{d\lambda}{dt} (M_B M) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x_B - x)^2 + (y_B - y)^2} = \end{aligned} \quad (2.128)$$

$$= \frac{d\lambda}{dt} |x - x_B| \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) \sqrt{1+k_5^2} = -\frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1+k_5^2} \left(\frac{y - k_B x}{k_B - k_5} \right),$$

$$u = -V \cos(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V}{\sqrt{1+k_5^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5}, \quad (2.129)$$

$$v = -V \sin(\alpha_3 + \beta_0) = -\frac{V \cdot \operatorname{tg}(\alpha_3 + \beta_0)}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2(\alpha_3 + \beta_0)}} = -\frac{d\lambda}{dt} (x_B - x) k_5 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5}.$$

Аналогичный подход применим к подобласти S_{B2} , имеющей границы Γ_{12} и Γ_2 . Уравнение прямой линии тока, которая проходит через точку $M(x, y) \in S_{B2}$, имеет вид:

$$y = y_0 - \frac{1}{k_2} (x - x_0).$$

Разрешаем его относительно x_0 и получим

$$x_0 = \frac{k_2 y + x}{k_2 k_0 + 1}.$$

Тогда давление в исследуемой подобласти

$$p(x, y) = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{|k_2 x - y|}{\sqrt{1 + k_2^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}h\delta} \frac{y - k_2 x}{\sqrt{1 + k_2^2}}$$

Точка M_0 является точкой разрыва (по крайней мере первого рода) функции скорости течения. Найдем эту точку со стороны рассматриваемой части подобласти течения, используя условие непрерывности нормальной скорости и условие (2.128):

$$V(M_{02}) = V(M_{01}) \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2} = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_2^2} \frac{y_0 - k_B x_0}{k_B - K_5} \frac{\sin \alpha_3}{\cos \alpha_2}.$$

Проведены тригонометрические преобразования:

$$\cos \alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \alpha_2}} = \frac{1 + k_0 k_2}{\sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}},$$

$$\sin \alpha_3 = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha_3} = \sqrt{1 - \frac{1}{\delta^2} \sin^2 \alpha_2} = \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta \sqrt{(1 + k_0 k_2)^2 + (k_0 - k_2)^2}}.$$

Опираясь на [147], выведены кинематические параметры:

$$V(M_{02}) = \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_0 k_2 + 1)} x_0,$$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (M_0 M) = V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = \\ &= V(M_{02}) + \frac{d\lambda}{dt} (x_0 - x) \frac{\sqrt{1 + k_2^2}}{-k_2} = \frac{d\lambda}{dt} \psi(x, y), \end{aligned}$$

$$\psi \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[\psi_1 - \sqrt{1 + k_2^2} (y - k_0 x) \right],$$

$$\psi_1 \equiv \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_0 k_2 + 1)} (k_2 y + x),$$

$$u(x, y) = -V(M) \cos \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) = -V(M) \sin \beta_2 = \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}},$$

$$V(x, y) = -V(M) \sin \left(\frac{\pi}{2} - \beta_2 \right) = -V(M) \cos \beta_2 = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}} \quad (2.130)$$

Тем самым найдено распределение p, u, v (давления и скоростей) в начальный момент во всей области течения. Найдем вид линий $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_{12}$ границ. Если они остаются прямыми, то их можно задать уравнениями:

$$\Gamma_1: y = k_1(t)x, \quad (2.131)$$

$$\Gamma_2: y = k_2(t)x, \quad (2.132)$$

$$\Gamma_{12}: y = k_0(t)x.$$

Подставим (2.133) в кинематические условия (2.128):

$$\Gamma_1: \dot{k}_1 x - k_1 \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1(y - k_B x)}{k_1 k_B + 1} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 - k_B}{k_1 k_B + 1}$$

в которой использованы формулы (2.129) относительно скоростей, а $y = k_1 x$, или:

$$\begin{aligned} \Gamma_1: \dot{k}_1 - \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1^2(k_1 - k_B)}{k_1 k_B + 1} &= \frac{d\lambda}{dt} \frac{k_1 - k_B}{k_1 k_B + 1} \\ \Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} &= \frac{(k_1 - k_B)(1 + k_1^2)}{k_1 k_B + 1}. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Аналогично получено дифференциальное уравнение относительно Γ_2 :

$$\Gamma_2: \dot{k}_2 x + k_2 \frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi \cdot k_2}{\sqrt{1 + k_2^2}} = -\frac{d\lambda}{dt} \frac{\psi}{\sqrt{1 + k_2^2}},$$

где ψ – линия тока, определяется из (2.132), в которой $y = k_2 x$:

$$\psi(x) = \psi_0 x,$$

$$\psi_0 \equiv \frac{1}{k_2 k_0 + 1} \left[\psi_2 - \sqrt{1 + k_2^2} (k_2 - k_0) \right],$$

$$\psi_2 \equiv \sqrt{1 + k_2^2} \frac{k_0 - k_B}{k_B - k_5} \frac{\sqrt{\delta^2 (1 + k_0 k_2)^2 + (\delta^2 - 1)(k_0 - k_2)^2}}{\delta (k_2 k_0 + 1)} (1 + k_2^2),$$

И окончательно

$$\Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = -\psi_0 \sqrt{1 + k_2^2} \quad (2.134)$$

В частности, при $\delta = 1$ и $k_2 = -k_1$ формулы (2.145) и (2.146) упрощаются:

$$\Gamma_1: \frac{dk_1}{d\lambda} = k_1 (1 + k_1^2),$$

$$\Gamma_2: \frac{dk_2}{d\lambda} = k_2 (1 + k_2^2), \psi_0 = -k_2 \sqrt{1 + k_2^2}.$$

Таким образом, получено дифференциальное уравнение для задачи о растекании однородного пластического слоя, который занимает область в форме клина [1,125]. Третье дифференциальное уравнение (2.115) относительно границы Γ_{12} имеет вид:

$$\Gamma_{12}: \dot{k}_0 x - k_0 \frac{d\lambda}{dt} \frac{y - k_B x}{k_B - k_5} = \frac{d\lambda}{dt} \frac{(y - k_B x) k_5}{k_B - k_5},$$

где формулы (2.141) используются для определения скоростей, в которых $y = k_0 x$:

$$\Gamma_{12}: \frac{dk_0}{d\lambda} = \frac{(k_0 - k_B)(k_0 - k_5)}{k_B - k_5}. \quad (2.135)$$

В общем случае полученная система (2.133), (2.134), (2.135) может решаться численными методами [133]. Результатом решения являются кривые (2.131), (2.132) изменения границ пластической области в процессе течения.

Найдено точное решение несимметричной задачи растекания пластического слоя, образованного двумя секторами, с помощью модели течения «идеальной жидкости». Получено условие, что границы рассмотренных областей в процессе растекания остаются прямыми линиями. Получено эволюционное уравнение для восстановления границ. Доказано, что линия ветвления течения остается прямой в процессе растекания. Получена формула для нахождения координат точек линии ветвления течения. Полученное решение не удовлетворяет одному из динамических условий на границе раздела двух пластических сред в виде (2.92), (2.93). В задаче о растекании пластического слоя в области с неподвижными границами было показано, что полученные на основе упрощенной модели «идеальной жидкости» решения не согласуются с результатами эксперимента [59, 135].

2.4.3 Аналитическое решение контактной задачи о сложном нагружении полосы в новой упрощенной постановке

Работы автора по данной тематике [123, 136, 137, 138, 141, 142, 143].

Рассмотрена плоская задача о пластическом растяжении полосы силами, приложенными на «зажатых» ее торцах (рис. 2.13) [141]. При этом возможны

различные режимы, которые определяются величинами общей силы, объединяющей силы сжатия торцов и растяжения полосы. С учетом симметрии условий краевая задача поставлена для области $0 < x < l_2(t)$, в первой части области $0 < x < l_1(t)$ материал полосы пребывает в состоянии растяжения, а в другой части $l_1(t) < x < l_2(t)$ материал подвергается сложному нагружению в виде осадки с растяжением (либо сжатием), в зависимости от направления приложенной силы $F(t)$.

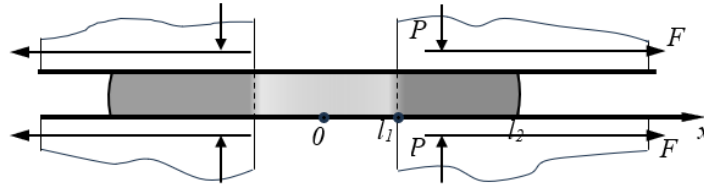


Рис. 2.13. К задаче о сложном нагружении полосы

Выписаны дифференциальные уравнения краевой задачи в области (l_1, l_2) [130]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u - u_0}{|u - u_0|}, \quad (2.136)$$

где $u = u_0(t)$ – неизвестная скорость движения инструментов.

Краевое условие на правом конце, свободном от сил:

$$x = l_2(t): p(l_2, t) = \sigma_s. \quad (2.137)$$

Из уравнения (2.136), получено:

$$u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x - x_0) + u_0(t), \quad (2.138)$$

$$p(l_2, t) = \begin{cases} -\frac{2\tau_s x}{h} + C_2, & x \in (x_0, l_2(t)) \\ \frac{2\tau_s x}{h} + C_1, & x \in (l_1(t), x_0) \end{cases}, \quad (2.139)$$

где $x = x_0(t)$ – неизвестная линия ветвления течения в полосе относительно инструмента:

$$x = x_0(t): u(x_0, t) = u_0(t).$$

Для определения трех неизвестных $x_0(t), C_1, C_2$ должны быть заданы, помимо условия (2.139), еще 2 условия:

– условие непрерывности контактного давления в точке ветвления течения;

– некоторое неизвестное-условие на левом конце при $x = l_1(t)$.

Из (2.139) получаем:

$$-\frac{2\tau_s l_2}{h} + C_2 = \sigma_s, \quad C_2 = \sigma_s + \frac{2\tau_s l_2}{h}. \quad (2.140)$$

Из условия непрерывности контактного давления в точке раздела течения $x = x_0(t)$ с учетом постоянной интегрирования C_2 из (2.140) находим:

$$C_1 = C_2 - \frac{2\tau_s}{h}(2x_0) = \sigma_s + \frac{2\tau_s}{h}(l_2 - 2x_0). \quad (2.141)$$

Было найдено решение с точностью до $x_0(t)$. Разберем несколько случаев.

1) Пусть выполнено условие

$$u(l_1, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (l_1 - x_0) + u_0(t) = 0, \quad (2.142)$$

означающее, что скорость течения материала слоя на левом (неподвижном!) конце области контакта равна нулю, т.е. левый конец области контакта перемещается со скоростью $u_0(t)$, однако скорость течения полосы в точке $x = l_1(t)$ равна нулю. Это означает, что происходит пластическая осадка материала в области захвата, причем центральная часть полосы остается в естественном состоянии, и не деформируется. В этом случае имеем задачу о пластической осадке торцевой части $(l_1(t), l_2(t))$, которой соответствует граничное условие свободного левого конца:

$$x = l_1(t): p(x, t) = \sigma_s, \quad (2.143)$$

из которого получаем, что

$$C_1 = \frac{2\tau_s}{h} l_1 + \sigma_s. \quad (2.144)$$

Условие (2.142) связывает скорость осадки $\left(\frac{dy}{dt}\right)$ и скорость поступательного движения инструмента $(u_0(t))$. В частности, из (2.142) следует, что при $u_0(t) = 0$ получаем, что $x \equiv l_1$ (т.е. левый конец осаживаемой части полосы неподвижен). Сравнивая (2.141) и (2.144), получаем:

$$x_0(t) = \frac{l_1(t) + l_2(t)}{2},$$

Вернулись к условию (2.142), из которого, найдено такое значение скорости движения инструмента, при котором левый конец области контакта свободен от напряжений:

$$u_0(t) = \left(-\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \right) \frac{l_2 - l_1}{2},$$

или с учетом условия несжимаемости, записанного в интегральном виде [138]

$$(l_1 - l_2)h = (l_{10} - l_{20})h_0,$$

получено:

$$u_0(t) = -\frac{dh}{dt} \frac{l_{20} - l_{10}}{2}. \quad (2.145)$$

Найдены законы изменения $l_1(t), l_2(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= u_0(t), l_1(t_0) = l_{10} \Rightarrow l_1(t) = \int_0^t u_0(t) dt + l_{10}; \\ \frac{dl_2}{dt} &= u(l_2, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \left(l_2 - \frac{l_2 + l_1}{2} \right) + u_0(t), l_2(t_0) = l_{20}. \end{aligned}$$

Из последней системы получено:

$$\frac{d(l_2 - l_1)}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{1}{2} (l_2 - l_1) \Rightarrow l_2 - l_1 = \frac{C_1}{\sqrt{h}} \Rightarrow l_2 = l_1 + \frac{C_1}{\sqrt{h}} \quad (2.146)$$

И с учетом условия (2.145)

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= u_0(t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{1}{2} (l_2 - l_1) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{1}{2} \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{h}}, \\ l_1(t) &= \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{h}} + \bar{c}_2; \quad l_2(t) = \frac{2\bar{c}_1}{\sqrt{h}} + \bar{c}_2. \end{aligned} \quad (2.147)$$

Подставлены начальные данные:

$$t = t_0; \quad l_{10} = \frac{\bar{c}_1}{\sqrt{h}} + \bar{c}_2; \quad l_{20} = \frac{2\bar{c}_1}{\sqrt{h}} + \bar{c}_2 \Rightarrow \bar{c}_1 = (l_{20} - l_{10})\sqrt{h_0}; \quad \bar{c}_2 = 2(l_{10} - l_{20}).$$

Решение (2.147) принимает окончательный вид:

$$\begin{cases} l_1(t) = (l_{20} - l_{10}) \sqrt{\frac{h_0}{h}} + 2(l_{10} - l_{20}) \\ l_2(t) = 2(l_{20} - l_{10}) \sqrt{\frac{h_0}{h}} + 2(l_{10} - l_{20}) \end{cases}. \quad (2.148)$$

2) Пусть теперь выполнено условие

$$u(l_1, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (l_1 - x_0) + u_0(t) > 0, \quad (2.149)$$

т.е. левый конец (пластического) материала слоя в области контакта перемещается вправо, причем $q(l_1) = q_0 = -\sigma_s$. Такое условие непременно приводит к пластическому растяжению средней части полосы ($0 < x < l_1(t)$) причем, согласно условию полной пластичности [19, 60]

$$\sigma_{yy} = -p; \sigma_{xx} = -p + \sigma_s,$$

имеем:

$$p(l_1, t) = 0, \quad (2.150)$$

тем самым получено недостающее краевое условие задачи. Соотношение (2.150) переписано с учетом (2.139), (2.141):

$$\begin{aligned} \frac{2\tau_s}{h} l_1 + c_1 = 0 &\Rightarrow \frac{2\tau_s}{h} l_1 + \left[\sigma_s + \frac{2\tau_s}{h} (l_2 - 2x_0) \right] = 0, \\ x_0(t) &= \frac{\sigma_s}{\left(\frac{4\tau_s}{h}\right)} + \frac{l_1 + l_2}{2} > \frac{l_1 + l_2}{2}, \end{aligned} \quad (2.151)$$

т. е. линия ветвления незначительно перемещается в сторону свободно растекающегося конца $x = l_2(t)$, причем с точностью до бесконечно малых порядка $\delta = \frac{h}{l} \ll 1$, принимается:

$$x_0 = \frac{l_1 + l_2}{2}. \quad (2.152)$$

Если подставить (2.154) в (2.151), то получено условие для $u_0(t)$, при выполнении которого одновременно с пластической осадкой «зажатых» торцевых частей происходит пластическое растяжение центральной части полосы:

$$u_0(t) > -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} (x_0 - l_1) = \left(-\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \right) \left(\frac{l_2 - l_1}{2} \right).$$

2.4.4 Задача сжатия слоя с разнородными свойствами по толщине

Работы автора по данной тематике [142, 143, 144, 145].

Рассмотрены дифференциальные уравнения квазистатического равновесия в частных производных, условие полной пластичности и соотношения Коши для

деформаций. Для выполнения условий статической определенности введем следующие допущения. Будем считать, что сжатие биметаллической полосы осуществляется в условиях плоского деформированного состояния. Металлы композита, имеющие различные свойства, аппроксимируются моделью изотропного жесткопластического тела (рис. 2.14) [142]. В постановке для упрощения известного решения Л. Прандтля, используются следствия, которые были сформулированы А. А. Ильюшиным [19]. Пластическое течение охватывает только слой с меньшим напряжением текучести, который назовем «мягким», в то время как второй слой находится в упругом состоянии, оставаясь «жестким».

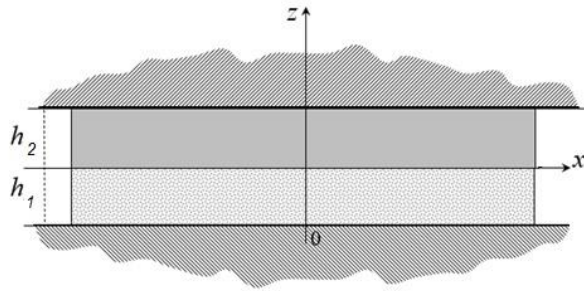


Рис.2.14. Пластическая осадка биметаллической полосы

С учетом сформулированных допущений замкнутая система уравнений краевой задачи имеет вид [142, 1]:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0; \quad (2.153)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{zz})^2 + 4\sigma_{xz}^2 = 4\tau_{s1}^2, \quad (2.154)$$

$$\frac{2\sigma_{xz}}{\sigma_{xx} - \sigma_{zz}} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad (2.155)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0. \quad (2.156)$$

Условия на контактной поверхности:

$$z = 0: \sigma_{xz} = \tau_{s1}; v = 0. \quad (2.157)$$

Граничные условия на границе раздела слоев:

$$z = h_1(t): \sigma_{xz} = -\tau_{s1}; v = -v_0 = \frac{dh_1(t)}{dx}. \quad (2.158)$$

Условия на неизвестной свободной границе $F(x, z, t) = 0$, которая в начальный момент времени задается соотношением

$$F(x, z, t_0) \equiv l_0 - x = 0.$$

При условии, что пластическое течение распространяется только в одном слое, используется общее решение задачи сжатия пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине, т. е. $\tau_s = \tau_s(z)$ в изотермической постановке [19]:

$$\sigma_{xz} = az + b, \quad \sigma_{zz} = -ax - c_0, \quad \sigma_{xx} = -ax - c_0 + 2\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2},$$

$$v = -v_0 \frac{z}{h}, \quad u = v_0 \left(\frac{x}{h} + \frac{2}{h} \int_0^z \frac{az + b}{\sqrt{\tau_s^2(z) - (az + b)^2}} dz + c_1 \right).$$

Касательное напряжение $\tau_s(z)$ постоянно по толщине:

$$\tau_s(z) \equiv \tau_{s1} = \text{const.}$$

Коэффициенты a и b найдем из граничных условий:

$$z = 0: \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1: -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = ah_1 + b.$$

Находим решение системы:

$$b = \tau_{s1}, \quad a = -\frac{2\tau_{s1}}{h_1}.$$

Постоянная c_0 находится из интегрального уравнения на свободной границе $x = \bar{l}$, $\bar{l} = \frac{l_0 h_0}{h(t)}$ - условная средняя граница:

$$\int_0^{h_1} \sigma_{xx} dz = 0,$$

При подстановке коэффициентов и значений координат:

$$c_0 = \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4\bar{l}} \right) \approx \frac{2\tau_{s1}\bar{l}}{h_1},$$

с учетом малого параметра $\frac{h}{l} \ll 1$.

В результате, поле напряжений имеет вид:

$$\sigma_{xz} = \tau_{s1} \left(-\frac{2z}{h_1} + 1 \right), \quad \sigma_{zz} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0, \quad (2.159)$$

$$\sigma_{xx} = \frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 + 2\tau_{s1} \sqrt{1 - \left(-\frac{2z}{h_1} + 1\right)^2}.$$

Далее находим общую силу для осуществления пластической осадки:

$$P_1 = \left| \int_{-T}^T \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-T}^T \left(\frac{2\tau_{s1}}{h_1} x - c_0 \right) dx \right| = \frac{4\tau_{s1} \bar{l}^2}{h_1} \left(1 + \frac{\pi h_1}{4 \bar{l}} \right) - \frac{4\tau_{s1} \bar{l}^2}{h_1}. \quad (2.160)$$

Учтем, что

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_1} < \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}. \quad (2.161)$$

При выполнении условия (2.161) прямая I будет располагаться выше прямой II (рис. 2.15) [150], которое подтверждает выполнимость условия $|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z)$ в области $0 < z < h_1$, занятой мягким слоем. Это означает, что толщина более мягкого слоя h_1 уменьшается до некоторого значения h_{10} :

$$\frac{2\tau_{s1}}{h_{10}} = \frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_{10} + h_2}. \quad (2.162)$$

При увеличении внешней нагрузки в пластическое течение будет вовлечен слой более жесткой компоненты двухслойной полосы. Теперь полоса по всей толщине охвачена пластической деформацией.

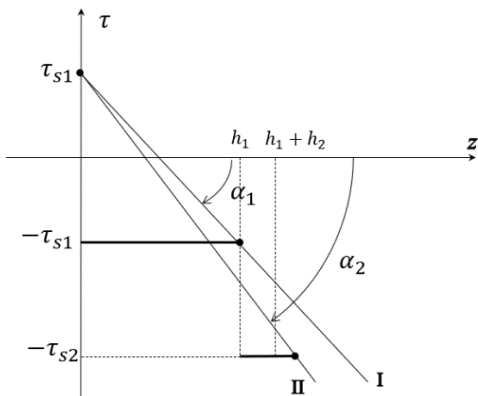


Рис.2.15. К анализу напряженного состояния мягкого слоя двухслойной полосы

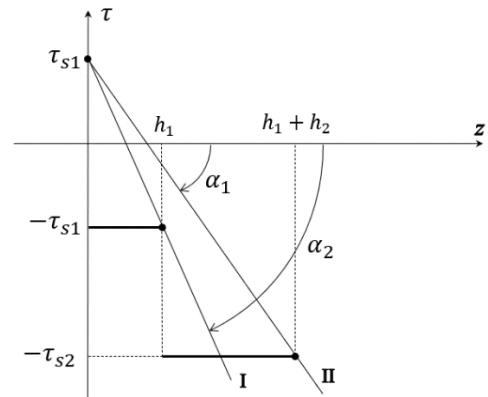


Рис.2.16. К анализу напряженного состояния жесткого слоя двухслойной полосы (совместное течение слоев)

Решение (2.161) будет справедливо и в том случае, если положить:

$$\tau_s(z) = \begin{cases} \tau_{s1}, & 0 < z < h_1, \\ \tau_{s2}, & h_1 < z < h_1 + h_2 \equiv h; \tau_{s1} \leq \tau_{s2}. \end{cases}$$

Коэффициенты a и b находим, приняв условия на контактных поверхностях:

$$z = 0: \tau_{s1} = \sigma_{xz} = a \cdot 0 + b,$$

$$z = h_1 + h_2: -\tau_{s1} = \sigma_{xz} = a(h_1 + h_2) + b.$$

Метод исключения переменных позволяет решить составленную систему:

$$b = \tau_{s1}, a = -\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}.$$

Поле напряжений в пластической области:

$$\sigma_{xz} = -\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1},$$

$$\sigma_{zz} = \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)x - c_0, \quad (2.163)$$

$$\sigma_{xx} = \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)x - c_0 + 2\sqrt{\tau_{s1}^2(z) - \left(-\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2}\right)z + \tau_{s1}\right)^2}.$$

Условие $|\sigma_{xz}| = |az + b| \leq k(z)$ выполняется во всей области, занятой биметаллической полосой, что отражает график на рис. 2.16, где прямая I располагается ниже прямой II, т.е.

$$\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} < \frac{2\tau_{s1}}{h_1}. \quad (2.164)$$

Утверждение. Соотношения (2.163) и (2.164) являются аналогом условия, полученного автором работы [19], с помощью принципа максимума мощности внешних сил. Расположение границы течения неоднородного по толщине пластического слоя в таком состоянии соответствует минимуму мощности, которой достаточно для протекания процесса. Минимуму мощности пластической деформации в случае заданного закона изменения толщины должно соответствовать условие минимума внешних сил.

Для доказательства утверждения достаточно вычислить силу сжатия полосы, при которой все сечение биметаллической полосы охвачено пластической деформацией:

$$P_2 = \left| \int_{-T}^T \sigma_{zz} dx \right| = \left| \int_{-T}^T \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} x - c_0 \right) dx \right| = c_0 2\bar{l}. \quad (2.165)$$

Для нахождения постоянной интегрирования c_0 входящей в соотношение (2.177) рассмотрено интегральное уравнение:

$$\int_0^{h_1+h_2} \sigma_{xx}(x = \bar{l}, z) dz = 0.$$

Подставлено выражение σ_{xx} из системы (2.175):

$$\int_0^{h_1} \left(\left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) x - c_0 + 2 \sqrt{\tau_{s1}^2(z) - \left(- \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) z + \tau_{s1} \right)^2} \right) dz = 0,$$

$$c_0 = \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l} \left(1 + O \left(\frac{h}{\bar{l}} \right) \right) - \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l},$$

где $O \left(\frac{h}{\bar{l}} \right)$ бесконечно малая, порядка малости $\frac{h}{\bar{l}}$. После подстановки значения c_0 в (2.165):

$$P_2 = 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l} \left(1 + O \left(\frac{h}{\bar{l}} \right) \right) - 2\bar{l} \left(\frac{\tau_{s1} + \tau_{s2}}{h_1 + h_2} \right) \bar{l}. \quad (2.166)$$

Из соотношений (2.165) и (2.166) легко видеть, что условию течения всей биметаллической полосы соответствует условие (2.166). Это условие совпадает с условием минимума внешних сил. Запишем выражение (2.166) в виде:

$$(\tau_{s1} + \tau_{s2})h_1 < 2\tau_{s1}(h_1 + h_2)$$

или

$$\frac{h_1}{h_2} < \frac{2}{\left(\frac{\tau_{s2}}{\tau_{s1}} \right) - 1}. \quad (2.167)$$

Соотношение (2.167) аналогично выводам авторов работ [65, 70].

Приведенные теоретические положения использованы в алгоритме сжатия полосы, составленной из разнородных слоев по толщине, между сближающимися инструментами - штампами. В программной реализации на языке *Python* решается краевая задача при известных граничных условиях на контуре. **Применен метод**

совместного решения системы квазистатического равновесия и энергетического условия пластичности. Результатом работы программы, зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации свидетельство № 2025660663 от 25.04.2025 г. [144], является определение контактного давления и нахождение силовых параметров для перевода биметаллической полосы в пластическое состояние, а также параметров кинематики течения слоев в виде составляющих вектора скоростей. Зависимость определяемых сил от геометрических параметров сжимаемой полосы представляется в виде графиков.

Универсальность алгоритма подтверждена программной реализацией, зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации свидетельство № 2025614054 [145], решения задачи сжатия кольца, составленного в плане из разнородных материалов в модели жесткопластического тела. Система уравнений в этом случае дополнена уравнениями Коши для деформаций, чтобы была возможность определения свободной границы между двумя деформируемыми средами. Особенности течения слоев в результате пластической деформации анализируются при условии, когда оба слоя мягкий и жесткий переходят в пластическое состояние.

2.5 Математическая модель свободного растекания пластического слоя на плоскости в виде параболического уравнения

Исследована кинематика растекания пластического слоя на плоскости. Представлена математическая модель процесса и выписаны некоторые частные решения в аналитическом виде.

Известно [17, 146], что квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left(K(w) \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad (2.168)$$

удовлетворительно описывает различные физические процессы (диффузия тепла в

сплошной среде, тепломассообмен [147, 148], горение [149] и фильтрация). В частности, если в (2.168)

$$K(w) = cw^m, \quad (2.169)$$

уравнение часто используется для описания нестационарного теплообмена в стационарной среде при условии, что коэффициент температуропроводности является степенной функцией температуры. Существует множество точных решений уравнения (2.168), подчиняющихся условию (2.169). Для случаев, когда $m = 1, -1, -2, -\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}$, такие решения можно найти в [150, 151].

Для труднодеформируемых металлов пластические свойства повышаются с помощью нагревания. Для определения характеристик горячих процессов приходится решать уравнение теплопроводности. Подобный опыт имеется и у автора [152, 153]. Дополнением к процессам горячего течения слоев является технология жидкой штамповки, которая дает возможность влиять на формирование структур при кристаллизации расплава под высоким давлением, как правило, процессы образования центров кристаллизации идут в двухфазной зоне при температурах выше температуры кристаллизации расплава в обычных условиях [154, 155]. После образования твердой корки на поверхностях контакта с инструментом металла идут процессы течения затвердевшего слоя по поверхностям [156, 157] и разработанные математические модели могут быть применены и для расчета контактных давлений на стадии дожатия кристаллизовавшегося металла.

Заметим, что свободное течение тонкого слоя по плоскостям, описываемое параболическим уравнением (2.170), приводит к постановке задачи, где

$$K(w) = \frac{1}{2}w^2.$$

До нагружения в фиксированный момент времени t_0 тонкий слой из пластического материала представляет собой плоскую область толщиной h_0 с размерами в плане, меньшими по сравнению с размерными характеристиками плоскостей, между которыми происходит сжатие пластической области. При встречном движении инструментов толщина материала слоя будет уменьшаться

при одновременно увеличивающихся размерах в плане, что будет влиять на изменение положения контура, ограничивающего область течения. Одной из задач, решаемых в данных условиях, будет задача определения координат точек контура, ограничивающего область течения, в фиксированный момент времени $t > t_0$.

Обобщенное уравнение контура на плоскости представлено в виде:

$$F(x, y, t) = 0. \quad (2.170)$$

По истечении времени dt в фиксированный момент $t + dt$ уравнение (2.170) также считаем справедливым. Границы контура в этом случае определяются следующим соотношением:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_x \frac{\partial F}{\partial x} + v_y \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (2.171)$$

где v_x и v_y скорости точек границы, в момент времени t . Если принять v_n за скорость точки в направлении, перпендикулярном контуру, θ за угол, образованный касательной к контуру и осью Ox (рис. 2.17 а), то уравнение (2.171) преобразуется к виду:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_n \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin\theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos\theta \right) = 0. \quad (2.172)$$

Согласно рисунку 2.17 б, криволинейный участок контура области течения обозначен MN , коррелирующий участок проекции ребра давления - mn . Примем за a длину линии тока между контуром области течения и проекцией ребра давления.

Установим элементарный объем металла, протекающий за время dt через участок границы длиной ds :

$$dV = -dh \left(ads - \frac{1}{2} a^2 d\theta \right). \quad (2.173)$$

Через нормальную скорость перетекающий объем выразится соотношением:

$$dV = v_n h dt ds. \quad (2.174)$$

Приравняв правые части соотношений (2.173) и (2.174), найдем нормальную составляющую скорости течения:

$$v_n = a \frac{d\lambda}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} a \frac{d\theta}{ds} \right), \quad (2.175)$$



Рис. 2.17. К восстановлению границы области течения

где

$$\lambda(t) = \ln \left(\frac{h(t_0)}{h(t)} \right) \quad (2.176)$$

– безразмерное модифицированное время

$$\frac{\partial \lambda}{\partial t} = - \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} > 0, \quad (2.177)$$

а $h = h(t)$ – заданный закон изменения толщины слоя.

В общем случае определение a для произвольного контура сопряжено с рядом математических сложностей. Для простоты рассмотрен контур в виде симметричной кривой относительно оси x , в этом случае длина линии тока $a = \frac{y}{\cos \theta}$ (см. рис. 2.17 а).

Тогда (2.177) получит вид:

$$v_n = \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\lambda}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\theta}{ds} \right). \quad (2.178)$$

После подстановки (2.176) в (2.172), получим:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\lambda}{dt} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{\cos \theta} \frac{d\theta}{ds} \right) \left(\frac{\partial F}{\partial x} \sin \theta + \frac{\partial F}{\partial y} \cos \theta \right) = 0. \quad (2.179)$$

В работе [149] функцию (2.170) задают в виде $F(x, y, t) = y - \varphi(x, t) = 0$, где $y = \varphi(x, t)$ – кусочно-гладкий выпуклый контур симметричный относительно горизонтальной оси x . При этом

$$\frac{\partial F}{\partial t} = - \frac{\partial \varphi}{\partial t}; \quad \frac{\partial F}{\partial x} = - \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1;$$

$$\cos \theta = - \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}; \quad \sin \theta = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Кривизна определяется отношением:

$$\frac{d\theta}{ds} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \left[1 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (2.180)$$

Известные функции подставим в (2.179):

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda} - \varphi \left[1 + \frac{1}{2} \varphi \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] = 0. \quad (2.181)$$

Поскольку при $t = 0$ $h = h_0$ и $\lambda = 0$, начальным условием для $\varphi(x, \lambda)$ будет

$$\lambda = 0, \quad \varphi = \varphi_0(x). \quad (2.182)$$

Тем самым получено эволюционное уравнение для нахождения контура пластической области (2.181) и начальные условия (2.182). Полученная система уравнений (2.181), (2.182) решению не поддается. Однако при рассмотрении конкретного примера, за исключением тривиального случая, когда исходный контур области является кругом, система разрешима.

Допустим, что до деформирования пластическая область ограничивается эллипсом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (2.183)$$

Предположив, что в процессе течения область будет оставаться эллипсом, но с полуосями, зависящими от λ

$$\frac{x^2}{a^2(\lambda)} + \frac{y^2}{b^2(\lambda)} = 1, \quad (2.184)$$

подставив (2.184) в уравнение (2.181) и, определив оттуда $a(\lambda)$ и $b(\lambda)$, при условии (2.182), найдем, что область течения будет эллиптической вида:

$$\frac{x^2}{(a^2 - b^2)e^{-2\lambda} + b^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{ae^{2\lambda}}{(a^2 - b^2 + b^2e^{2\lambda})^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.185)$$

При переходе к пределу $\lambda \rightarrow \infty$, из уравнения (2.185) следует

$$x^2 + y^2 = abe^\lambda, \quad (2.186)$$

т.е. в пределе граница области течения стремится к кругу радиуса

$$R(\lambda) = \sqrt{abe^\lambda}. \quad (2.187)$$

Из условия постоянства объема

$$\pi ab h_0 = \pi R^2(\lambda) h, \quad (2.188)$$

получено выражение для радиуса границы области в конечный момент времени:

$$R(\lambda) = \left(ab \frac{h_0}{h} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.189)$$

Частным случаем подтвержден общий принцип, согласно которому область с любой по форме границей в начальный момент в процессе свободного деформирования стремится в пределе к круговой.

Описанный алгоритм реализован в виде программы для ЭВМ, где контур, ограничивающий пластическую область, может быть задан кусочно-гладкими функциями. Ограничением, накладываемым на возможное описание, является то, что контур должен быть выпуклым. Границы контура разбиваются на участки малой длины, точки стыкующихся концов участков задаются на плоскости координатами (x, y) . Начальные координаты этих узловых точек контура известны и образуют массив координат. Полагаем, что гипотеза перемещения точек по кратчайшей нормали к границам области выполняется, а нормальная составляющая скорости известна (вычислена, исходя из (2.175)). При сжатии пластического слоя отслеживаем перемещения узловых точек контура по линиям тока, вычисляя объем металла (2.173), проходящий через участки контура (расход). После заданного количества итераций, связанных с изменением толщины деформируемого слоя и координат узловых точек, можно визуализировать подвижную границу контура растекающейся области.

Разработанный алгоритм и программная реализация зарегистрированы в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации Роспатента свидетельство №2021618781 о государственной регистрации программы SOVM для ЭВМ [158].

В [76] уравнение (2.169) сводится к некоторой частной форме нелинейного уравнения теплопроводности (2.190), относительно функции $w(x, \tau)$, $K(w) = \frac{1}{2} w^2$:

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(w^2 \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \varphi(x, t_1) \equiv e^{t_1} w(x, \tau), \quad \tau = \frac{e^{t_1}}{2}. \quad (2.190)$$

Рассмотрен другой тип эволюционного уравнения растекания из (2.189). Для этого воспользуемся подстановкой $q = w^2$:

$$4 \frac{\partial q}{\partial \tau} = 2q \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right)^2. \quad (2.192)$$

Ниже представлены все полученные точные решения нелинейного уравнения (2.190):

1. $w(x, \tau) = f(\tau)g(x)$, где:

1a) $f(\tau) = c_1, g(x) = c_2$ – вид решения задачи при течении полосы в направлении параллельном оси Ox ;

1b) $f(\tau) = c_1, g(x) = \sqrt[3]{c_3x + c_4}$ – вид решения задачи при течении области, ограниченной кубической параболой;

1c) $2f^2(\alpha_1 + c_0\tau) = -1, \int \frac{g^2 dg}{\sqrt{c_0g^4 + \alpha_2}} = \pm x + \alpha_3$ – решение задачи о растекании области, ограниченной кривой в виде эллиптического интеграла;

2. $4(\tau - \gamma x) = C_2 + (\gamma w)^2 - 2C_1 \gamma w + C_1^2 \ln(C_1 + \gamma w)^2$ – решение задачи о растекании области, ограниченной параболой;

3. $q \equiv w^2 = -\frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3}{\sqrt{\tau + \tau_0}}$ – решение задачи течения пластической области, ограниченной эллипсом, большая полуось которого совмещена с осью Ox ;

4. $q \equiv w^2 = -\frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3 x^{\frac{2}{3}}}{(\tau + \tau_0)^{\frac{7}{9}}}$ – обобщенное решение задачи течения пластической области, ограниченной эллипсом;

5. $w(x, \tau) = \pm \sqrt{q^2} = \pm \frac{x}{\sqrt{2(\tau - \tau_0)}}$ – решение задачи течения пластической области в виде клина;

6. $q \equiv w^2 = \frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3}{\sqrt{\tau + \tau_0}}$ – решение задачи течения области, границей которой является гипербола, мнимая или действительная ось которой, совпадает с осью Ox в зависимости от знака A_3 ;

7. $q \equiv w^2 = \frac{x^2}{2(\tau + \tau_0)} + \frac{A_3 x^{\frac{2}{3}}}{(\tau + \tau_0)^{\frac{7}{9}}}$ – обобщенное решение задачи о растекании пластического слоя, ограниченного гиперболой.

2.6 Выводы по главе 2

1. Универсальность математических моделей и подхода к теоретическому анализу течения тонких пластических слоев подтверждается результатами решения задач математической физики, полученными при анализе нестационарных процессов тепломассопереноса в технике, биологии и медицине, которые хорошо описываются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных параболического типа.

2. Аналитические решения различных обобщений классической задачи Л. Прандтля представляют интерес в технике. Разработанные математические модели течения «идеальной жидкости» позволили получить точные аналитические решения следующих задач:

– получено решение нестационарных задач методом характеристик интегрированием характеристической системы уравнений с начальными условиями в точках контура области, являющегося линией начального уровня, с определением двух квадратур $J_1(s(p))$, $J_2(s(p))$. Алгоритм работает с шагом Δp с поточечным построением линий уровня до тех пор, пока вся область течения не будет покрыта сеткой линий уровня и линий тока. Тем самым определяется след ребра давлений и кинематика течения;

– решена задача течения слоя между наклонными плитами для круговой области с фиксированной границей, которая образована пазами в одном из инструментов для свободно затекания металла. Основной особенностью этой задачи является переменная толщина слоя. Новым результатом, который получен при решении этой задачи – построение кинематики течения. Доказано, что все линии тока собираются в одной точке и представляют собой эллиптический пучок окружностей, а линии уровня представляются гиперболическим пучком окружностей, при этом ребро давлений вырождается в единственную точку. Решение задачи удалось получить аналитически (без применения приближенных вычислений);

– решена несимметричная задача течения по шероховатым плоскостям пластического слоя, составленного из разнородных сред в форме сектора, которые имеют общую прямолинейную границу. Доказано, что границы пластических областей остаются

прямолинейными на протяжении всего процесса растекания. Получены эволюционные уравнения для восстановления подвижных границ рассматриваемой области. Получено уравнение для нахождения координат точек линии ветвления течения и установлено, что эта линия остается прямой на протяжении всего процесса течения тонкого пластического слоя.

– решена задача о правке листов и полос с помощью одноосного растяжения за пределом упругости. Исследована контактная задача в плоской постановке о пластическом растяжении полосы силами, приложенными на зажатых ее торцах. Обоснованы возможные режимы протекания процесса, которые определяются величинами, как силы сжатия торцов, так и силы растяжения.

3. Получены аналитические решения краевых задач свободного течения слоя, составленного из разнородных сред в плане, в размерном и безразмерном виде с использованием модели «вязкой жидкости». На границе $x = 0$, а также на свободной границе $x = x_f(t)$ оно удовлетворяет краевым условиям в интегральной форме. Следовательно, согласно принципу Сен-Венана, решение справедливо в центральной части области течения. Характер течения в слое не является одномерным, поэтому прямые линии ($x = const$) с течением временем искривляются, причем наблюдается заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы. Полученные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости», в которой не учитываются касательные напряжения: приведены затрудненные течения в одном или нескольких направлениях: прямоугольной пластины с ограничением течения по длинным сторонам и в форме кругового сектора с ограничением течения вдоль радиусов, ограничивающих сектор, также получено решение задачи сжатия полосы с разнородными свойствами по толщине.

4. Для расчета значений различных параметров пластического формоизменения необходимо определиться с выбором математической модели, адекватно описывающей механику реализуемых деформационных процессов. Этапы выбора математической модели пластического течения для конкретного объекта производства реализованы в описанных в данной главе алгоритмах, которые доведены до программной реализации.

ГЛАВА 3. ОБОСНОВАНИЕ И ВЫБОР МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ

Материалы главы 3 соответствуют паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) и относятся к направлениям исследований п. 2: Разработка, обоснование и тестирование эффективных вычислительных методов с применением современных компьютерных технологий; 8. Комплексные исследования научных и технических проблем с применением современной технологии математического моделирования и вычислительного эксперимента, основные положения которых опубликованы автором в работах [192, 193, 203, 204, 210, 211, 212, 247].

Варианты постановок и решения задач пластического течения в тонком слое во многом определяются конфигурацией внешних и внутренних границ области, занимаемой деформируемым металлом слоя, что позволит выбрать ту или иную математическую постановку задачи, численно-аналитическое решение которой приведет к определению важных технологических параметров процесса течения металла при деформировании заготовок для получения объектов необходимых конфигурации и размеров.

Следует отметить, что не во всех случаях возможно полное аналитическое решение сложных задач механики сплошной среды. Для помощи исследователю существуют методы численного решения подобных задач, например, методом конечных элементов, который может расширить число определяемых технологических параметров, необходимых для бездефектной реализации процесса деформирования тонких слоев.

Следовательно, адекватному выбору математической модели для решения задачи механики деформируемого твердого тела в конкретном случае при известных геометрии тела и размерных характеристиках предшествует необходимость классифицировать анализируемые объекты. На принципе общности отдельных признаков построено большинство классификаторов для разнообразных объектов.

3.1 Классификация объектов неканонической формы на основе теории множеств

3.1.1 Гиперпространство и информативность различительных признаков

Классификационные процессы представляют собой постановку оптимизационных задач, решением которых является наполнение конечного числа m классов, объединяемых общностью геометрической формы, отобранными из общего числа деталей, n наименованиями, отвечающими выбранному критерию полезного эффекта [159].

Формализация процессов классификации предполагает, чтобы знания об объектах классификации были представлены определенным образом. При разработке классификационной системы очевидно следует избегать применения трудоемких в подготовке классификационных шифров. Наилучшим вариантом при подготовке данных для классификации по каждому объекту, является тот, который отличается наименьшей вероятностью совершения ошибок, при этом используются признаки, участвующие в проектировании технологии изготовления будущего изделия, с возможностью расчета необходимых характеристик.

При построении алгоритмов автоматической классификации абстрагируются от самого объекта, требующего отнесения к какому-либо множеству сходственных объектов (классу), а оперируют образом объекта, составленным из совокупности признаков. Условно признаки подразделяют на детерминированные, вероятностные и структурные [160]. В технических задачах распознавания используют детерминированные признаки, которые могут быть как логическими, так и имеющими количественное выражение [160]. В большинстве случаев в качестве логических признаков используются суждениями качественного характера, например, наличие некоторых свойств у рассматриваемого объекта, либо признаки, имеющие количественное выражение, но при этом не столько важна численная величина признака, сколько условие его попадания в определенный интервал.

Предложение описывать признаковые пространства набором логических признаков, имеющих указанные свойства, принадлежит Хеммингу [161]. С геометрической точки зрения интерпретации подобного пространства может быть представлено моделью «куба», ограничивающего часть гиперпространства, при этом метрикой ребер гиперкуба, соединяющих вершины, будет число несовпадающих разрядов в любом из двоичных векторов, имеющих n -разрядов. Такие системы получили названия шкал наименований.

Для классификации различных объектов (деталей) больше подходит использование детерминированных признаков, в качестве которых могут быть привлечены конструктивно-технологические признаки. Действительно, общепринято считать, что в качестве конструктивных признаков, содержащих наибольшее количество информации о деталях, могут быть использованы, прежде всего, топологические свойства (форма наружных и внутренних поверхностей, наличие тех или других конструктивных элементов); размерный ряд, включающий габариты, размеры имеющихся элементов, относительные безразмерные соотношения; «шероховатости» функциональных поверхностей, механические свойства материала и другие характеристики, отображенные, например, в чертежах деталей.

При анализе технологических признаков рассматривают тип производства, связанный с программой выпуска деталей, количество и последовательность операций, включенных в технологический процесс; сортамент исходного металла и технологии его разделения на мерные заготовки, способы последующей подготовки заготовок; тип и параметры технологической оснастки; стойкость штампового инструмента; характеристики кузнечно-штамповочного оборудования. По большей части известные классификаторы содержат в том или ином виде признаки геометрической формы, что определяет алгоритм обработки и последовательность операций технологического процесса изготовления детали. При этом образованное из совокупности признаков алгебраическое гиперпространство обладает всеми свойствами n -мерного евклидова пространства [162].

Один и тот же объект может иметь огромное число различных проявлений, которые характеризуют его. Необходимым условием при определении набора признаков, описывающих объект, а значит и размерности пространства признаков, является возможность минимизации количества признаков. Другими словами, на этапе подготовки данных для описания объекта классификации следует использовать не все признаки, характеризующие объект, а включить в набор только наиболее существенные, т.е. которые являются необходимыми и достаточными для дальнейшей достоверной процедуры классификации. При этом алгоритм отбора признаков строится следующим образом.

Анализируют одним из формализованных методов заведомо избыточную априорную систему признаков X_a и включают признаки X_n в ограниченный набор, как обладающих наибольшей информативностью. В комбинаторике имеющиеся сочетания C_a^n могут быть обработаны полным перебором вариантов при ограниченных размерах чисел a и n , но, имея большую размерность пространства признаков, упомянутый метод неосуществим.

Другим доступным методом проверки детерминированных признаков на информативность является метод комитетов [163], математическое описание которого строится на определении ранга матрицы, составленной из коэффициентов заранее составленной системы линейных неравенств. Однако условием использования этого метода остается не столь большая размерность признаковых пространств.

Известны методы на базе распространенного метода Монте-Карло [164], одним из которых является случайный поиск с адаптацией, дающий решение, близкое к оптимальному за число итераций, не превышающее $\sum_{i=0}^n (a - i)$ [165]. Однако область применения метода не выходит за рамки вероятностной постановки задачи, связанной с обработкой только статистически зависимых признаков.

Снижения размерности признакового пространства можно достичь методом, основой которого является известный из теории вероятности критерий Фишера [166], если не предполагается учитывать связи между признаками, т.к. одномерность указанного критерия не позволяет это сделать.

Другим подходом, минимизирующим размерность пространства признаков, является использование меры информативности Шеннона [167], с помощью которой анализируется набор из n признаков с выбором одного или нескольких, снижающих до минимума неопределенность решения, оцениваемую энтропией.

Анализ различительных признаков может быть проведен с использованием меры информативности Кульбака [168], получившей название дивергенции и ставшей популярным критерием оценки информативности за счет многомерности. Еще одной причиной успешного использования критерия – универсальность, которая заключается не только в оценке количества информации, которой обладает анализируемый признак, но и способности разделить образы объектов на классы, что существенно сокращает время расчетов.

3.1.2 Метод экспертного опроса для создания производственной системы

Рассмотрены случаи, в которых геометрия отдельной области либо оригинальна, либо при внешнем сходстве имеет индивидуальные конструктивные особенности. Это означает, что внутри классов можно отобрать выборки областей, репрезентативные признаки которых определяют множество

$$T = \{T_1, T_2, \dots, T_L\}$$

топологически схожих геометрических форм, характеризующих эти геометрические трехмерные области; топологию конкретной области характеризует M признаков [42], которые могут принимать различные значения. В связи с этим будем оперировать множеством $Q_m = \{q_{m_1}, q_{m_2}, \dots, q_{m_n}\}$ возможных значений m -го признака. Определяем признаковое пространство $X = Q_1 \times Q_2 \times \dots \times Q_m$ как произведение возможных значений признаков. Набор признаков $X_i = \{x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{im}\}$ с необходимой степенью подробности описывает образ детали. Процесс классификации сводится к предъявлению эксперту, обладающему необходимыми знаниями и опытом, образа конкретной детали для процедуры идентификации на

наличие у нее определенной геометрической формы T_i (топологии). При утвердительном ответе эксперта образ $X_i \in X$ относится к классу f_i , т.е. к множеству $X = \bigcup_{i=0}^L f_i$ добавляется соответствующий образ детали. Если эксперт не находит общности форм и предъявленный образ детали не обладает сходством с топологией T_i , то данный образ и другие образы X_i , признаки которых не вписываются ни в одну из анализируемых геометрических форм, войдут в класс f_0 .

Разделение экспертом всех предъявленных ему образов X на $L + 1$ класс, объединяющих области со схожей топологией (плоскостных, являющихся объемными, с тонким полотном, с ребрами жесткости, оболочковых, и т.п.), свидетельствует об окончании процедуры классификации образов, описанных признаковыми пространствами, входящими в некоторые множества, каждое из которых характеризуется определенной геометрией. В основе задачи экспертной классификации лежит известная гипотеза о характерности [169], что позволяет для каждого признака, участвующего в описании детали, выстроить значения по характерности, тем самым определить принадлежность к соответствующему классу. Для этой цели на множестве значений признаков Q_m вводится, так называемый, линейный порядок, упорядочивающий их по характерности для геометрической формы T_l . «С точки зрения математики линейный порядок это бинарное отношение r_m^l , обладающее свойствами транзитивности и антирефлексивности, с выполнением условия $(q_{ms}, q_{mt}) \in r_m^l$, если значение q_{ms} , является более характерным для топологии T_l , чем значение q_{mt} . С помощью линейного порядка определяются бинарные отношения, доминирующие по характерности для каждой из часто встречающихся геометрических форм»³² [42, 169]:

$$R_l = \left\{ \begin{array}{l} (x_s, x_t) \in X \times X | \forall m = \overline{1, M} (x_{tm}, x_{sm}) \in r_m^l \text{ и } \exists m_0 \ 1 \leq m_0 \leq m \\ \text{такое, что } (x_{sm_0}, x_{tm_0}) \in r_m^l \ l = \overline{1, L}. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

При анализе признаков очередного образа экспертом принимается решение, что предложенной области соответствует определенная форма, т.е. он однозначно

³² Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

классифицирует рассматриваемую область, на основании признаков образа, наиболее характерными для данной топологии, должен иметь такую же геометрическую форму.

На этой логике строится одно из правил продукционной системы [176]:

$$\text{если } x_s \in f_l \text{ и } (x_t, x_s) \in R_l, \text{ то } x_t \in f_l. \quad (3.2)$$

Если же предъявляемый набор признаков очередного образа области не позволяет отнести ее к анализируемой геометрической форме, то и образ с менее характерным набором признаков этой формой обладать не может. В этом случае к системе продукций добавляется следующее правило:

$$\text{если } x_s \notin f_l \text{ и } (x_t, x_s) \in R_l, \text{ то } x_t \notin f_l. \quad (3.3)$$

На сформулированных правилах (3.2) и (3.3) системы продукций, основанных на гипотезе о характерности, строится опрос эксперта для классификации всех предъявляемых образов при существенном сокращении количества вопросов к эксперту, что упрощает их дальнейшую обработку.

3.2 Теоретико-множественный подход в алгоритме метода экспертной классификации

Введем для формируемых классов f обозначение множества номеров: $K = \{0, 1, \dots, L\}$. Образам X_i из множества X будут соответствовать следующие множества: класс принадлежности C_i^+ содержит номера классов, которым может принадлежать образ детали X_i ; не состоявшийся класс C_i^- содержит номера классов, к которым образ X_i принадлежать не может. Образ анализируемой области будет считаться классифицированным если выполняются условия

$$C_i^+ \cap C_i^- = \emptyset \text{ и } C_i^+ \cup C_i^- = K. \quad (3.4)$$

Обозначим $X^0 \subset X$ подмножество всех классифицируемых образов. Перед началом опроса эксперта $\forall X_i \in X$ все введенные множества являются пустыми:

$$C_i^+ = C_i^- = X^0 = \emptyset.$$

Процедура опроса эксперта заключается в предъявлении ему для идентификации очередного образа $X_i \in X \setminus X^0$. Заключение по образу формируется из номеров классов, к которым, по мнению эксперта, может принадлежать предъявленный образ. Другими словами, по образу X_i определяется явно множество C_i^+ и неявно множество $C_i^- = K \setminus C_i^+$. После обработки образа X_i им пополняется множество $X^0 = X^0 \cup X_i$. Результат классификации образа X_i дает возможность уменьшить неопределенность для ряда других образов. При условии $X^0 = X$ опрос эксперта считается завершенным.

Непротиворечивость и однозначность классификации деталей по геометрической форме считаются достигнутыми, если ее образ будет принадлежать только одному классу. При идентификации экспертом образа $X_i \in f_i$ с определением его принадлежности классу с присущей ему геометрией формы, что приводит к классификации всех других образов множества X_j таких, что $(X_j, X_i) \in R^l$. В этом случае продукционное правило (3.3) для каждого образа $X_j \in X_{il}^+$ позволяет положить $C_s^+ = C_s^+ \cup l$. Если в результате описанных операций на множестве $X \setminus X^0$ останутся X_t , для которых справедливо условие (3.4), то образы $X_s \in X_{jt}^-$ ($t \neq l$) позволяют утверждать, что $C_s^- = C_s^- \cup t$. Построение более эффективного алгоритма выявления взаимоисключающих классов для обсуждаемых образов для каждой из топологий T_t ($t \neq l$) теоретически возможно, при выделении на множестве X_{il}^+ подмножества образов Парето Π_{it} , не доминирующих по отношению к линейному порядку R_t . При этом для каждого образа $X_s \in X$, при выполнении условия $\exists X_j \in \Pi_{it}$, такой, что $(X_j, X_s) \in R_t$ нужно положить $C_s^- = C_s^- \cup t$ [176].

При реализации алгоритма классификации объектов машиностроения не исключены ошибки эксперта, связанные с неправильным определением принадлежности образов к конкретному классу, что противоречит внесенному в базу знаний правилу (3.2), являющемуся частью продукционной системы. Подобная ситуация может возникнуть при отказе отнесения области, которая описывается «более характерными значениями признаков, классу, к которому принадлежит образ с менее характерными значениями признаков для этого класса. Ошибки при

классификации могут быть выявлены в диалоговом режиме при организации оперативной проверки создаваемой классификации на непротиворечивость»³³ [42]. Условием непротиворечивости экспертной классификации является выполнение соотношения $C_i^- \subset \tilde{C}_i^-$ [169] при условии, что $|C_i^+| = l$. К противоречивости построенной классификации приводят ошибки эксперта либо при классификации очередного образа X_i , либо при классификации некоторых образов из множества X^0 . Неправильная классификация того и другого приводит к нарушению правила продукций (3.2). Для возникающей ситуации создадим множество ошибочно классифицированных образов X_{err} . С целью устранения противоречий классификации на этом этапе образы из множества $(X_i, X_j) \in X_{err}$ должны повторно идентифицироваться экспертом. В этом случае возникает несколько ситуаций. Первая, когда эксперт продолжает настаивать на ранее сформулированных им ответах, что приводит к необходимости коррекции используемой модели, т.е. к перестроению используемых отношений r_m^l . Во второй ситуации при предъявлении образов $(X_i, X_j) \in X_{err}$ из множества ошибочно классифицированных, эксперт признает классификацию образа X_i ошибочной, то образ обрабатывается в соответствии с формализованной процедурой исправления ошибки, описанной ранее. Возможна и третья ситуация, в которой повторно анализируются образы из множества X^0 , классифицированные экспертом ошибочно, коррекция ошибки заключается в коррекции классификации указанных образов. Алгоритм исправления ошибок экспертной классификации - следующий [169]:

Блок 1. Формирование множества

$$X_{err} = \{X_j \in X^0 | (X_j, X_i) \in R_i, X_j \notin f_i\} \text{ и } \forall X_j \in X_{err} \text{ полагается } C_j^+ = \{l\}.$$

Блок 2. Формируется множество по отношению к линейному порядку

$$\forall X_j \in X_{err} \forall t \neq l (t = \overline{l, L}) \text{ такое, что}$$

$$X_{err}^{jt} = \{X_q \in X^0 | (X_j, X_q) \in R^t \text{ и } X_q \in f_t\}.$$

³³ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

Блок 3. Внесение корректив в множества

$\forall X_q \in X_{err}^{jt}$ полагают $C_q^+ = \emptyset$ и $X^0 = X^0 \setminus X_q$.

Блок 4. Обнуляет множество $\forall X_q \in X_{err}^{jt} C_q^- = \emptyset$.

Блок 5. Экспертная классификация всех образов множества X .

Блок 6. Конец алгоритма.

Алгоритм экспертной классификации с возможностью коррекции ошибок представлен блок-схемой на рис. 3.1. В качестве признаков информативного набора использовались описания образующих формы:

W^0 – признаки, характерные для внешнего контура сечения;

W^p – признаки внешнего контура на проекции плана детали.

«Логические признаки могут быть описаны и соответственно принимать два возможных значения: 0, если главные контуры образованы кусочно-линейными функциями; 1, если главные контуры»³⁴ [42] являются комбинированными и могут включать криволинейные участки. Таким образом, представленные признаки образующих соответствуют бинарным отношениям:

$$W^0 = \{0|1\}; W^p = \{0|1\}. \quad (3.5)$$

Детализация контуров, образующих проводилась с помощью координат узловых точек:

$$W^0 - Z, X; W^p - X, Y.$$

Размеры деталей и их конструктивных элементов, определяющие размерные характеристики штампового инструмента, и входящие в состав набора различительных признаков, среди которых габаритные размеры $X_{max}, Y_{max}, Z_{max}$ и относительные значения размерных характеристик:

$$\frac{X_{max}}{Y_{max}}; \frac{X_{max}}{Z_{max}}; \frac{Y_{max}}{Z_{max}}; \frac{Y_{max}}{X_{max}}; \frac{Z_{max}}{X_{max}}; \frac{Z_{max}}{Y_{max}}.$$

На программную реализацию алгоритма экспертной классификации объектов, являющуюся составной частью комплекса программ, разработанного в диссертации, получено свидетельство № 2021618779 о регистрации Федеральной службой по

³⁴ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

интеллектуальной собственности Роспатент [170].

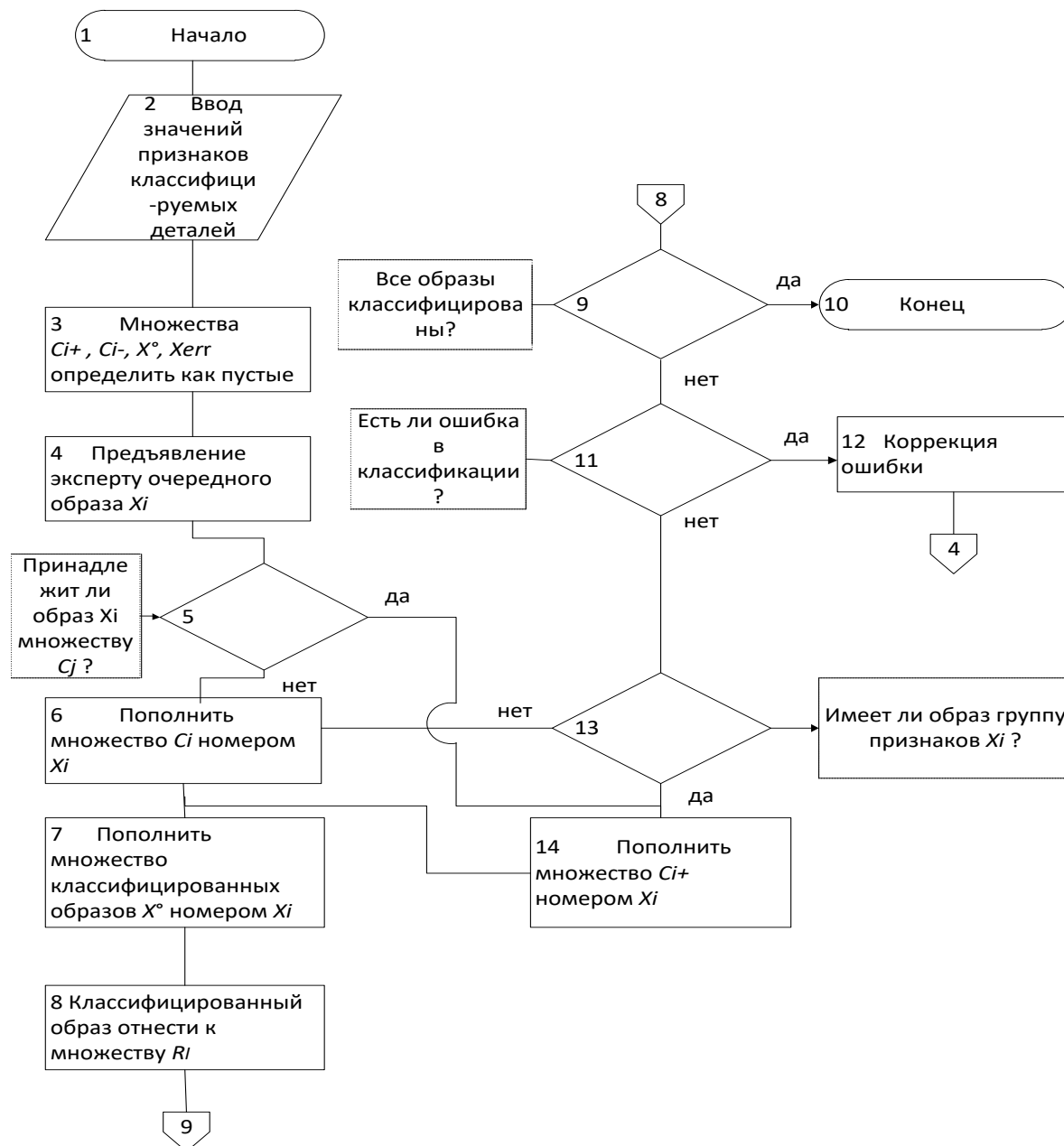


Рис. 3.1. Блок-схема алгоритма, реализующего экспертную классификацию

Опираясь на известные классификационные схемы, одна из которых соответствует рис. 3.2 [42], укрупненно анализируемые детали объединены, 3 группы: не обладающие симметрией, являющиеся осесимметричными и относящиеся к группе комбинированных. Если принять положение, что классификация деталей осуществляется в несколько этапов, то обсуждаемая схема относится к первому уровню иерархической классификационной модели.

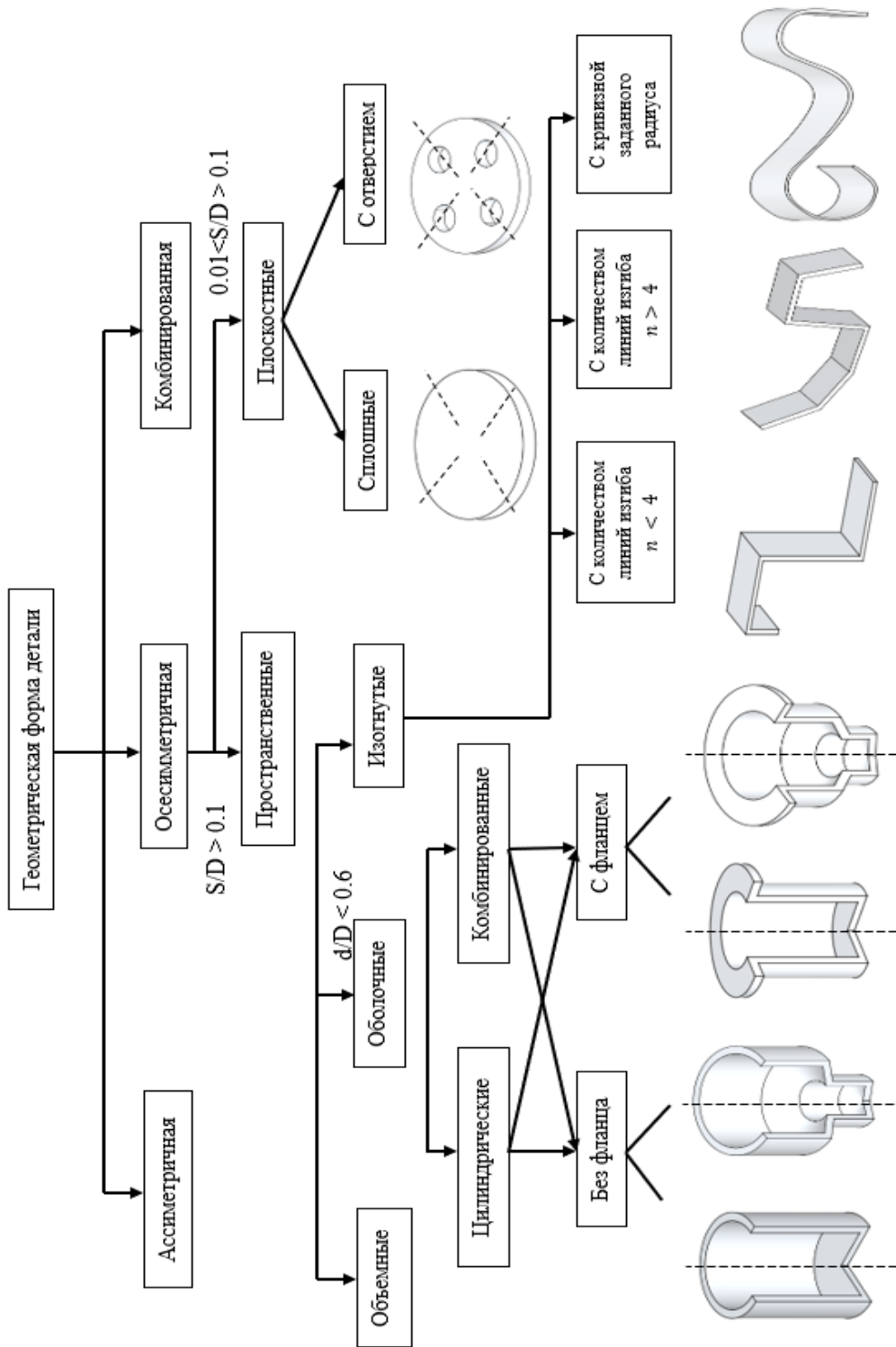


Рис. 3.2. Классификация деталей по признакам геометрической формы

Второму уровню иерархической классификации соответствует объединение в группы плоскостных и пространственных областей. Независимо от масштабного фактора на этом этапе классификации используют набор признаков,

представляющих собой относительные размерные характеристики. В соответствии с третьим уровнем пространственные области объединяют в группы объемных, оболочечных и изогнутых, занимающих многосвязные области, границы которых могут быть прямолинейными, криволинейными или комбинированными.

Классификация объемных областей требует более пристального внимания и будет приведена в следующих разделах.

Оболочки представляют отдельную группу, т.к. в качестве заготовок при их изготовлении используют относительно тонкие материалы, подвергаемые обработке операциями листовой штамповки. Математические модели для расчета технологических параметров приведены далее в главе 5. Рассматриваемые детали можно разделить на цилиндрические и области, имеющих комбинированную форму. С учетом специфики изготовления дополнительно можно разделить детали на детали с фланцем и детали, у которых фланец отсутствует. Отдельное множество составляют пространственные листовые детали с незамкнутым контуром, которые изготавливаются с помощью операции гибки. Разделены по количеству линий изгиба и наличию криволинейных участков, что также отражается на специфике технологических процессов.

Рассмотренный многоуровневый, иерархически выстроенный классификатор деталей, позволяет с помощью экспертного опроса упорядочить отнесение деталей к конечному числу классов.

3.3 Методы распознавания образов в алгоритмах обучения и классификации

К задачам автоматической классификации объектов сохраняется устойчивый интерес исследователей. Известно множество процедур распознавания образов, построенных на применении алгоритмов самообучения. «Обучение без учителя» может базироваться на статистической обработке данных с использованием функций плотности вероятностей, оценки которых проводятся методами моментов

[171], или максимального правдоподобия [172]. Основой метода таксономии [173-175] является заполнение пространства признаков областями (таксонами). Качество такого покрытия может быть оценено заданным критерием, например, с привлечением суммы квадратов ошибки:

$$J = \sum_{j=1}^N \sum_{X \in S_j} \|X - m_j\|^2, \quad (3.6)$$

где m_j - вектор выборочных средних значений для множества образов S_j , относящихся к j -му таксону; N - число таксонов.

Условием подбора критерия является возможность объединения наиболее «похожих» векторов в один таксон. В большинстве случаев понятие «похожести» основано на гипотезе компактности [176], выдвигаемой авторами работ кластерного анализа [184]. Что касается выбора числа таксонов и математической интерпретации мер сходства, то подобные вопросы решаются авторами работ [173-175].

Меру сходства между векторами X и Z , являющихся образами конкретных деталей, может определять евклидово расстояние [185], которое принимается за правило отнесения образов к области, характеризуемой некоторым «центром» класса:

$$R = \|X - Z\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (X - Z)^2}. \quad (3.7)$$

Однако геометрическое евклидово расстояние не является единственным, существуют и другие метрики, применение которых оказывается более эффективным. К таким метрикам относится расстояние Махаланобиса, которое для образа X [161]

$$R = (\bar{X} - \bar{m})^T [C]^{-1} (\bar{X} - \bar{m}), \quad (3.8)$$

где \bar{m} - вектор средних значений; $[C]$ - ковариационная матрица совокупности образов.

Меры сходства не ограничиваются расстояниями, существуют неметрические меры сходства, такие как [168]:

$$S(X, Z) = \frac{\bar{X}^T \bar{Z}}{\|\bar{X}\| \|\bar{Z}\|}. \quad (3.9)$$

Приведенная мера определяется направляющим косинусом угла между векторами \bar{X} и \bar{Z} и достигает максимума при условии коллинеарности векторов.

В качестве двоичной неметрической мерой сходства применяется метрика Танимото [161], функция которой представлена ниже:

$$S(X, Z) = \frac{\bar{X}^T \bar{Z}}{\bar{X}^T \bar{X} + \bar{Z}^T \bar{Z} - \bar{X}^T \bar{Z}}. \quad (3.10)$$

Построение и анализ матриц взаимных корреляций лежит в основе факторного анализа [179], с помощью которого устанавливают влияние ненаблюдаемых переменных (факторов). Данный математический аппарат используется при решении некоторых задачах распознавания.

Можно воспользоваться более универсальными алгоритмами самообучения, которые основываются на использовании методов потенциальных функций [180], «корреляционных плеяд» [181], «масок» [182] и тому подобных.

Некоторые аналитические методы, связанные с решением распознавательных задач, основаны на выборе и построении подходящих дискриминантных функций, описывающих в пространстве признаков разделяющие поверхности между классами образов $d_1(\bar{X}), d_2(\bar{X}), \dots, d_n(\bar{X})$ [183]. При ограничениях, накладываемых на класс функций, построение дискриминантной функции упрощается. Такими параметрами, как весовые коэффициенты W , определяется класс дискриминантных функций $d(\bar{X}) = f(\bar{X}, W_1, W_2, \dots, W_n)$. Алгоритмы обучения «без учителя» (самообучения) в задачах распознавания помогают в итерационном режиме осуществить подбор указанных параметров, изменение величин которых оказывает влияние на ориентировку разделяющей поверхности в пространстве признаков.

Для разделения объектов со сложным описанием необходимо привлечение

дискриминантных функций из нелинейного класса. При использовании потенциальных функций в качестве дискриминантных повышается универсальность методов распознавания, т.к. потенциальные функции допускают, как детерминированную, так и статистическую постановку задач распознавания.

3.4 Построение локального классификатора трехмерных поверхностей

«Любую деталь сложной формы можно разбить на множество конструктивных элементов»³⁵ [42, 184]. В одном из частных случаев, когда детали имеют осесимметричную геометрическую форму, наибольшей информативностью обладают их осевые сечения, границы которых определяются линиями (отрезками прямых или дуговыми участками), соединяющими точки излома контура (узловые точки), которые могут быть представлены на плоскости двумя координатами (z, ρ) . В другом распространенном частном случае удлиненных в плане деталей их геометрическую форму отражает проекция на плоскость, параллельную продольной оси детали, и дополнительные сечения в местах изменения формы.

При анализе осесимметричных деталей их топология \bar{T} может быть представлена в виде набора известных конструктивных признаков в виде:

$$\bar{T} = (\bar{X}_H, \bar{X}_B), \quad (3.11)$$

где \bar{X}_H - признаки образующей наружного контура; \bar{X}_B - признаки образующей внутреннего контура.

Действительно, рассматривая основные варианты технологии пластического деформирования, убеждаемся в том, что при формообразовании заготовки ее металл приобретает геометрию инструмента.

Принимая во внимание ограниченное число базовых формоизменяющих операций обработки давлением объемных заготовок, среди которых высадка,

³⁵ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

редуцирование и различные виды выдавливания, множество поковок для изготовления осесимметричных деталей может быть классифицировано и разделено на 6 подмножеств [185]:

- детали стержневого типа, имеющие утолщение с одного конца получаемые высадкой;
- детали стержневого типа, имеющие участок с утолщением в средней части, получаемые радиальным выдавливанием;
- детали стержневого типа, имеющие утолщения с обоих концов, которые могут быть получены альтернативными вариантами пластического деформирования в разъемных матрицах;
- полые детали типа стаканов, получаемых прямым или обратным выдавливанием;
- полые детали с перемычкой в средней части отверстия, получаемых последовательными операциями обратного выдавливания, либо комбинированным выдавливанием;
- детали, имеющих сквозное отверстие типа колец и втулок, получаемых либо обратным, либо комбинированным выдавливанием с последующей пробивкой перемычки.

Детали, удлиненные в плане [193] представлены в табл. 3.1:

- с прямой линией разъема с отношением $\frac{L_{\text{п}}}{b_{\text{ср}}} > 2,5$; группа 1.1;
- с прямой линией разъема с отношением $1,5 < \frac{L_{\text{п}}}{b_{\text{ср}}} < 2,5$; группа 1.2;
- с изогнутой осью и кривой (ломаной) линией разъема: группа 1.4;
- с вытянутой осью при наличии отростков и вилок: группа 1.5;
- поковки, удлиненные комбинированной формы и имеющие тонкое полотно (слесарный и медицинский инструмент): группа 1.6.

Поковки деталей, штампуемые на молотах вдоль оси заготовки, отнесенные к группе 2 [39] (табл. 3.1):

- крыльчатки и колеса лопаточных машин, штампуемые на бесшаботных и высокоскоростных молотах: группа 2.1.

Поковки, штампуемые на кривошипных горячештамповочных прессах

(КГШП), отнесенные к группам [186] (табл. 3.2):

- осесимметричные поковки, изготавливаемые осадкой в торец или осадкой с элементами выдавливания: группа 1.2 - штампуемые за 2 перехода; группа 1.3 – штампуемые за 3 перехода с использованием заготовительно-предварительного ручья; группа 1.4 – крыльчатки;

- поковки, штампуемые за один переход, при малых размерах возможна много штучная штамповка: группы 2.1

- поковки с удлиненной осью с небольшой разницей в площадях поперечных сечений: группа 2.3 – по две поковки, расположенные валетом;

- поковки слесарного и медицинского инструмента, изготавливаемые течением по поверхностям: группа 2.3.1:

- поковки с осью со значительной разницей в площадях поперечных сечений: группа 3.1 – из заготовок, предварительно обработанных высадкой или выдавливанием; группа 3.2 - из заготовок, предварительно обработанных вальцовкой или поперечно-клиновой прокаткой; группа 3.3 – с затеканием металла в пазы;

- с изогнутой удлиненной осью: группа 4.2 – с применением гибочного ручья; группа 4.3 – в штампах с замком и гибочным ручьем;

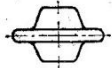
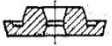
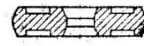
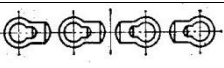
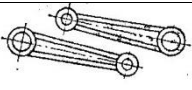
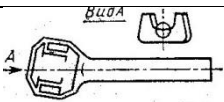
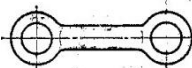

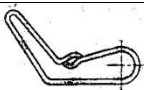
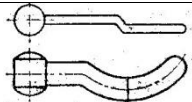
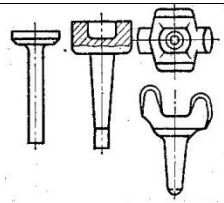
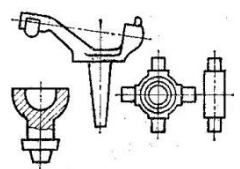
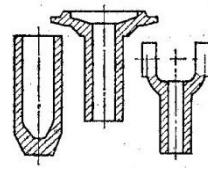
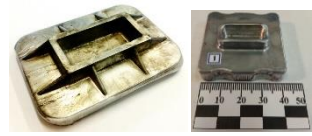
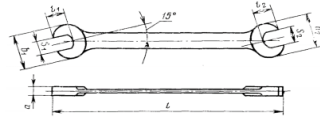

- поковки, штампуемые комбинированными процессами выдавливания и высадки: группа 5;

- поковки с развитым тонким полотном, штампуемые перпендикулярно продольной оси заготовки: группа 6.1 содержит плоские поковки с затеканием металла в ребра; группа 6.2 объединяет поковки слесарного и медицинского инструмента из предварительно профилированных полуфабрикатов; группе 6.3 принадлежат поковки лопастей с тонким протяженным полотном.

Фрагмент классификации молотовых поковок

Группа 1. Поковки, штампуемые перпендикулярно оси заготовки (плашмя)		
Подгруппа 1		
Подгруппа 2		
Подгруппа 4		
Подгруппа 5		
Подгруппа 6		
Группа 2. Поковки, штампуемые вдоль оси заготовки (осадкой в торец)		
Подгруппа 1		
Примечание: подгруппа 6 и группа 2 добавлена автором		

Фрагмент классификации поковок, штампуемых на КГШП

Группа	Подгруппа		
	1	2	3
I			
II			
III			
IV			
V			
VI			

Примечание: группа VI добавлена автором

Поковки, штампуемые на гидравлических прессах, представляют собой оребрѐнные панели (рис. 3.3).



Рис. 3.3. Сварное кольцо, изготовленное сверткой панели с ребрами

Примеры показывают, что классификация базируется на описании наружных и внутренних поверхностей поковок конструктивными признаками, которые позволяют идентифицировать достаточно сложную форму, «однако для

обеспечения возможности применения технологической оснастки с теми или иными особенностями, набор признаков должен содержать конструктивные признаки элементов поковки»³⁶ [42], в том числе количественные признаки в виде размерных характеристик поковки, а также технологические признаки. Наличие в наборе абсолютных значений размеров поволок позволяет классифицировать их по типоразмерам и технологическим особенностям, которые могут быть важны при проектировании штампового инструмента. Безразмерные характеристики в виде относительных или приведенных размеров поволок позволяют провести классификацию топологии независимо от масштабного фактора, что обеспечит возможность инвариантных технологических решений.

В общем случае для описания типового размерного поля поковки потребуется k признаков. В результате подробного анализа топологии типовых поволок установлено, что достаточно сложное сечение или проекция поковки на плоскость разъема штампа могут быть описаны 8-ю признаками с размерным полем вида [42]:

$$R = \{x_1, x_2, \dots, x_8\}, \quad (3.12)$$

где x_i – абсолютные размеры конструктивных элементов поковки, включая габариты, используемые в качестве начальных данных, на основе которых рассчитываются относительные или приведенные безразмерные характеристики.

При проведении технологической подготовки производства поволок предпроектные исследования включают определение таких рассчитываемых технологических характеристик деталей, необходимых для проектирования чертежа поковки, как объем детали V , периметр характерного сечения или проекции P и площадь, ограниченная внешним контуром F , а также масса расчетной поковки и степень сложности детали Φ , а также марка материала детали M . Одной из важных характеристик стальных деталей является химический состав, а именно процентное содержание углерода и легирующих элементов. Дополнительно в набор признаков материала должны быть включены механические характеристики: относительное сужение образца при стандартных

³⁶ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

испытаниях на растяжение Ψ , % и сопротивление деформированию при температуре обработки σ_s^t , МПа.

В результате проведенного анализа установлено, что формализованное описание конкретной детали представляется n -мерным вектором компоненты которого содержат конструктивно-технологические признаки:

$$\bar{X} = \{\bar{T}, \bar{R}, P_\delta, F_\delta, V, \Phi, \psi, \sigma_b\}. \quad (3.13)$$

С помощью разработанных универсальных методов отбора конструктивно-технологических признаков и на их основе формирования априорного набора, на этом этапе избыточного, но общего для всех деталей одного класса, осуществляется возможность перехода от визуального отображения анализируемых деталей чертежами к их формализованному представлению векторами с количеством компонентов n , отображаемыми в евклидовом гиперпространстве. На основе информации априорного набора признаков решаются как классификационные задачи, так и задачи проектирования типовой технологии пластического деформирования. Однако работа с данными, имеющими большое количество разрядов затруднена: этапы подготовки занимает много времени и не исключены ошибки, а обработка также связана с увеличением как времени вычислений, так и объема оперативной памяти компьютера. Поэтому возникает и требует решения задача минимизации размерности признакового пространства.

Как показал анализ математических методов определения информативности признаков, математический аппарат [161], в основе которого лежит концепция дивергенции, является наиболее универсальным инструментом оценки полной средней информации, разделяющей классы φ_i и φ_j :

$$J_{ij} = I(i, j) + I(j, i) = \int_{\bar{X}} [p_i(\bar{X}) - p_j(\bar{X})] U_{ij} d\bar{X}, \quad (3.14)$$

где $p_i(\bar{X})$ и $p_j(\bar{X})$ - плотности вероятностей распределения классов образов φ_i и φ_j ; логарифмы отношения правдоподобия U_{ij} и U_{ji} содержат информацию, отличающую класс φ_i от класса φ_j и наоборот класс φ_j от класса φ_i :

$$U_{ij} = \ln \left[\frac{p_i(\bar{X})}{p_j(\bar{X})} \right]; \quad U_{ji} = \ln \left[\frac{p_j(\bar{X})}{p_i(\bar{X})} \right]. \quad (3.15)$$

Средняя различающая информация для класса φ_i определяется выражением

$$I(i, j) = \int_{\bar{X}} p_i(\bar{X}) U_{ij} d\bar{X}, \quad (3.16)$$

а для класса φ_j определяется соответственно аналогичным интегралом $I(j, i)$.

В качестве критерия минимальной вероятности классификационной ошибки при определении принадлежности образа \bar{X} классу φ_i для всех $j \neq i$ используется выражение:

$$p(\varphi_i)p(\bar{X}|\varphi_i) > p(\varphi_j)p(\bar{X}|\varphi_j). \quad (3.17)$$

При совпадении вероятности появления образов двух рассматриваемых классов разделяющая граница может быть определена соотношением :

$$p_i(\bar{X}) = p_j(\bar{X}). \quad (3.18)$$

Следствие. Вид классификации можно определить по знаку одного из выражений (3.15), например первого, представляющего собой функцию Байеса, которая выбрана в качестве дискриминантной.

Обозначим α ($\alpha=0$ – правильное решение, $\alpha=1$ – ошибка классификации) двоичную функцию потерь. Тогда, при условии распределения признаков по нормальному закону [161], неправильная классификация образа, принадлежащего классу φ_j , оценивается вероятностью:

$$p(u_{ij} > \alpha | \varphi_j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_{ij}}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-\left[\frac{(u_{ij} + \frac{1}{2}r_{ij})^2}{2r_{ij}} \right]} du_{ij} = 1 - \Phi \left(\frac{\alpha + \frac{r_{ij}}{2}}{\sqrt{r_{ij}}} \right), \quad (3.19)$$

аналогично, вероятность неправильной классификации образа, принадлежащего классу φ_i , равна:

$$p(u_{ij} < \alpha | \varphi_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r_{ij}}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{-\left[\frac{(u_{ij} - \frac{1}{2}r_{ij})^2}{2r_{ij}} \right]} du_{ij} = \Phi \left(\frac{\alpha - \frac{r_{ij}}{2}}{\sqrt{r_{ij}}} \right), \quad (3.20)$$

где расстояние Махаланобиса [161] между плотностями вероятностей классов φ_i и φ_j :

$$r_{ij} = (\bar{m}_i - \bar{m}_j)^T [C]^{-1} (\bar{m}_i - \bar{m}_j);$$

m_i, m_j - векторы средних значений признаков; $[C]$ - матрица ковариаций;

функция Лапласа:

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{y^2}{2}} dy;$$

стандартное отклонение случайной величины \bar{x} ;

$$y = \frac{\bar{x} - \bar{m}}{\sigma};$$

σ - среднеквадратичное отклонение соответствующего признака.

При этом вероятность ошибки распознавания будет определяться соотношением:

$$\begin{aligned} p(e) &= p(\varphi_i)p(u_{ij} < \alpha | \varphi_i)p(\varphi_j)p(u_{ij} > \alpha | \varphi_j) = \\ &= p(\varphi_i)\Phi\left(\frac{\alpha - \frac{r_{ij}}{2}}{\sqrt{r_{ij}}}\right) + p(\varphi_j)\left[1 - \Phi\left(\frac{\alpha + \frac{r_{ij}}{2}}{\sqrt{r_{ij}}}\right)\right]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

При равных априорных вероятностях появления классов двоичная функция потерь примет значение $\alpha = 0$, вероятность ошибки распознавания определится выражением:

$$p(e) = \frac{1}{2}\Phi\left(-\frac{1}{2}\sqrt{r_{ij}}\right) + \frac{1}{2}\left[1 - \Phi\left(\frac{1}{2}\sqrt{r_{ij}}\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{1}{2}\sqrt{r_{ij}}}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy. \quad (3.22)$$

При равенстве ковариационных матриц $[C]_i = [C]_j$ расстояние Махаланобиса примет значение $r_{ij} = J_{ij}$, т.е. дивергенция становится метрикой при разделении двух классов. Вероятности ошибки распознавания зависит от «расстояния Махаланобиса r_{ij} , и выражается плотностью одномерного нормального распределения с нулевым средним и единичной дисперсией»³⁷ [42]. Графически эта

³⁷ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е.Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

зависимость представляет собой монотонно убывающую функцию [42, 161], приведенную на рис. 3.4. Вероятность ошибочной классификации не превышает 5%, при расстояниях Махаланобиса $r_{ij} > 11$, поэтому, ограничив вероятность ошибки классификации, решают задачу поиска минимального числа признаков, не ухудшающих качество классификации.

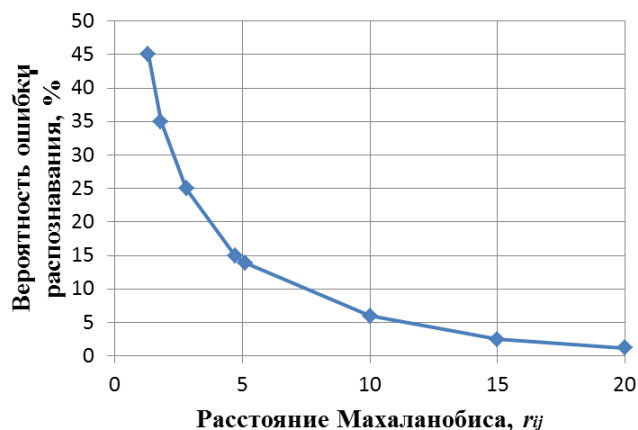


Рис. 3.4. Зависимость вероятности ошибки распознавания от величины расстояния Махаланобиса

Использование концепции дивергенции предоставляет возможность одновременного решения двух задач по упорядочиванию и выбору информативных признаков, а также по разделению образов на классы, при сведении к минимуму ошибок классификации.

3.5 Алгоритм формирования информативного набора признаков и классификации образов объектов неканонической формы

На примере случайно выбранного признака, представляющего собой степень сложности Φ (ГОСТ 7505-89 [188]) деталей рассматриваемой выборки, проведен численный эксперимент с использованием критерия согласия Пирсона χ^2 [187]. Результаты расчетов оформлены в виде гистограммы, представленной на рис. 3.5.

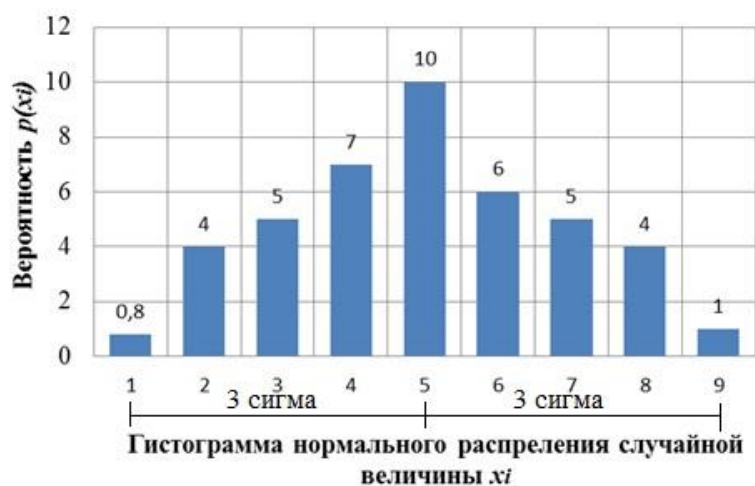


Рис. 3.5. Распределение для случайной величины x_i

«Плотности вероятности распределения деталей определяются математическими ожиданиями \bar{m}_i, \bar{m}_j и соответствующими ковариационными матрицами $[C_i]$ и $[C_j]$ размерностью $n \times n$ (n – размерность вектора признаков). В соответствии со [194], математические ожидания признаков определяются вектором»³⁸ [42]:

$$\bar{m} = \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{X} p(\bar{X}) d\bar{X}. \quad (3.23)$$

«Ковариационная матрица некоторого класса $[C]$ является симметричной и положительно полуопределенной. Элемент C_{lk} , не стоящий на диагонали матрицы, представляет собой ковариацию признаков x_l и x_k (центральный момент второго порядка). Определитель ковариационной матрицы $|C|$ назван обобщенной дисперсией n -мерного распределения»³⁹ [42, 187]. Кроме того, установлено, что распределение аппроксимируется нормальным законом с вероятностью 0,95, при этом мера расхождения χ^2 имеет случайный характер с вероятностью $p(\chi^2) = 0,23$.

На основе разработанного метода составлен пошаговый алгоритм, обеспечивающий формализацию и выполнение этапов минимизации количества признаков и классификации осесимметричных деталей. Блок-схема алгоритма

³⁸ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

³⁹ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

приведена на рис. 3.6, который реализован в виде программы для ЭВМ [170], зарегистрированной в Роспатенте. Исходными данными для расчетов являются бинарные значения логических переменных, а также абсолютные значения конструктивно-технологических признаков. Численные значения относительных признаков априорного набора определяются в процессе вычислений.

После создания априорного набора признаков для всех деталей выборки управление передается блокам 4, 5 с помощью которых проводится вычисление средних значений признаков, действия над ними и определение элементов ковариационных матриц классов φ_i и φ_j . Ход расчетов следующий.

Если признаки являются статистически независимыми, то элемент ковариационной матрицы $C_{lk} = 0$, а поверхности равных плотностей вероятностей в пространстве описываются гиперсферами.

Образы деталей, распределение признаков которых подчиняются нормальному, закону, проявляют тенденцию к образованию одного класса, центр которого определяется вектором средних значений, а форма – ковариационной матрицей [C] [189].

«Если зависимость между исследуемыми признаками функциональная, то линии равных плотностей будут прямыми. В этом случае классы деталей пересекаться не будут»⁴⁰ [42].

Элементы соответствующей ковариационной матрицы рассчитывают с помощью соотношения [42]:

$$C_{lk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x_l - m_l)(x_k - m_k)p(x_l, x_k)dx_l dx_k, \quad (3.24)$$

где x_l, x_k и m_l, m_k – компоненты векторов образов и их математические ожидания соответственно; C_{ll} – диагональный элемент матрицы, являющийся дисперсией l – ой компоненты вектора \bar{X} .

⁴⁰ Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки / Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

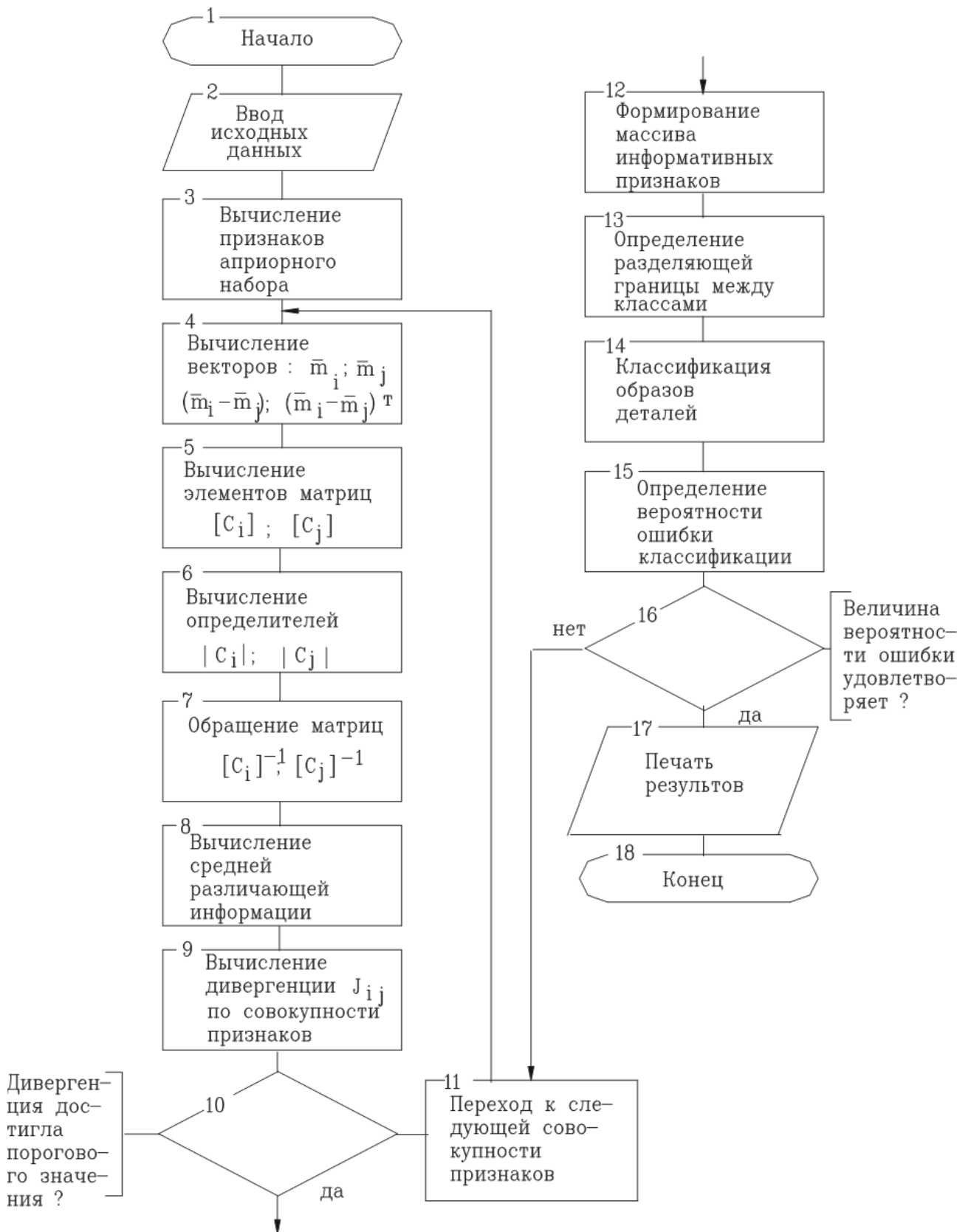


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритма определения информативных признаков и классификации деталей

При аппроксимации математического ожидания выборочным средним значением, вектор средних значений признаков и ковариационную матрицу получим в следующем виде [42, 187, 189]:

$$\bar{m}_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N_i} \bar{X}_{ij}, \quad (3.25)$$

$$[C_i] = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} (\bar{X}_{ij} \bar{X}_{ij}^T - \bar{m}_i \bar{m}_i^T), \quad (3.26)$$

где N_i – количество образов деталей в классе φ_i ; \bar{X}_{ij} – j –й образ детали класса φ_i .

В этом случае плотности нормального распределения классов определяются как [161]:

$$p_i(\bar{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_i|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{X} - \bar{m}_i)^T [C_i]^{-1} (\bar{X} - \bar{m}_i)}, \quad (3.27)$$

$$p_j(\bar{X}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C_j|^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}(\bar{X} - \bar{m}_j)^T [C_j]^{-1} (\bar{X} - \bar{m}_j)}. \quad (3.28)$$

Вычисление определителей ковариационных матриц и обращение этих матриц является следующим этапом работы алгоритма. Эти функции выполняют блоки 6, 7.

Значением логарифма правдоподобия определяется средняя различающая информация. При подставке в формулу (3.15) соответствующих значений плотностей нормального распределения (3.27 и 3.28), после необходимых преобразований получим соотношение:

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \ln \frac{|C_j|}{|C_i|} - \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ [C_i]^{-1} (\bar{X} - \bar{m}_i) (\bar{X} - \bar{m}_i)^T \right\} + \frac{1}{2} \text{tr} \left\{ [C_j]^{-1} (\bar{X} - \bar{m}_j) (\bar{X} - \bar{m}_j)^T \right\}. \quad (3.29)$$

Среднюю различающую информацию для классов φ_i и φ_{ij} , вычисляемую блоком 8 алгоритма, можно представить функцией:

$$I(i, j) = \frac{1}{2} \ln \frac{|C_j|}{|C_i|} - tr \left\{ [C_i] \left([C_j]^{-1} - [C_i]^{-1} \right) \right\} + \frac{1}{2} tr \left\{ [C_j]^{-1} (\bar{m}_i - \bar{m}_j) (\bar{m}_i - \bar{m}_j)^T \right\} \quad (3.30)$$

Теперь с помощью блока 9 алгоритма можно вычислить значение дивергенции:

$$J_{ij} = \frac{1}{2} tr \left\{ ([C_i] - [C_j]) \left([C_j]^{-1} - [C_i]^{-1} \right) \right\} + \frac{1}{2} tr \left\{ \left([C_i]^{-1} + [C_j]^{-1} \right) (\bar{m}_i - \bar{m}_j) (\bar{m}_i - \bar{m}_j)^T \right\}, \quad (3.31)$$

Среди многочисленных свойств дивергенции, по меньшей мере одно - аддитивность, понадобится нам для анализа априорного набора признаков для оценки количества различающей информации, присущей каждому признаку. При сравнении численных значений дивергенции, связанных с относительной важностью признаков, они выстраиваются в порядке убывания значений дивергенции. В рабочий набор отбираются признаки с большими значениями дивергенции. Количественный состав зависит от значения вероятности ошибки классификации (3.21), опосредовано связанного с дивергенцией. За сравнение порогового значения дивергенции с вычисленным отвечает блок 10 алгоритма. В данном случае за пороговое значение дивергенции принималось значение равное 90, т.к. вероятность ошибки классификации уменьшается (см. рис. 3.4) и не превышают 1% при увеличении расстояния Махаланобиса, а значит и дивергенции.

Следующим этапом работы алгоритма является формирование по всем деталям, участвующим в классификации, массива численных значений признаков, отобранных в рабочий набор. Эти функции возложены на блок 12 алгоритма.

Поскольку уравнение (3.29), включающее сумму линейных и квадратичных членов, определяет вид разделяющей поверхности между классами в

информативном признаковом пространстве, то выборочные точки поверхности определяются блоком 13, и устанавливается принадлежность деталей классам φ_i или φ_j с помощью блока 14. Блок 15 ответственен за вычисление вероятности ошибки классификации и передачу его блоку 16 для сравнения рассчитанной величины с пороговым значением, определяющим качество классификации. Расчеты проводятся согласно уравнению (3.22). Если качество классификации неудовлетворительно, то рассматривается очередная совокупность признаков. После обработки всех деталей выборки алгоритм заканчивает работу.

Переход от графического представления деталей соответствующими чертежами к их образам в векторном представлении отображена структурной схемой на рис. 3.7.

С появлением более совершенных алгоритмов искусственного интеллекта, таких как нейронные сети [190-193], с возможностью их обучения на основе использования генетических алгоритмов, решение задач автоматической классификации различных объектов перешло на новый уровень развития. На один из реализованных алгоритмов обучения нейросети с последующей обработкой больших массивов данных получено свидетельство №2025613949 о регистрации программы для ЭВМ Федеральной службой по интеллектуальной собственности Роспатент [194].

Остаётся открытым вопрос автоматической классификации объектов с помощью нейросетевых алгоритмов, включающих этап обучения нейросети по репрезентативным выборкам и собственно этап классификации.

По аналогии с визуальным анализом объектов классификации нейросети необходимо представить информативные изображения, например, проекционные виды в принятом масштабе, а это не что иное, как чертеж детали: в общем виде 3 проекции и дополнительные сечения в случае сложных форм деталей машиностроения.



Рис. 3.7. Переход к векторной форме описания детали

Проведем анализ информативности проекционных изображений на примере простых топологий: фланец со стрежнем (табл. 3.3) и полая деталь (табл. 3.4) с разным сочетанием образующих внешнего и внутреннего контуров.



Таблица 3.3

Возможные сочетания формы образующих фланца и стержневой части

Фланец	Стержневые с фланцем					
	Стержневая часть					
						...
				+		
		+			+	
	+					
	+	+	+	+		
				+		
...						

Таблица 3.4

Возможные сочетания форм внешней и внутренней образующих полых деталей

Форма внешней образующей	Форма внутренней образующей						...
							
			+				
				+		+	
				+			
	+	+		+	+		
						+	
		+					
...							

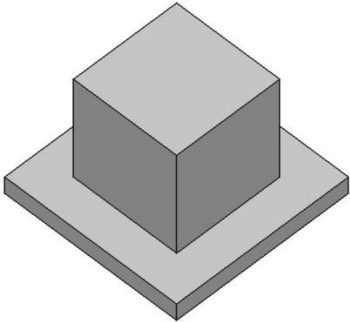
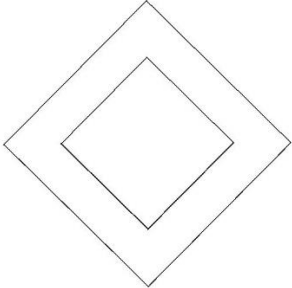
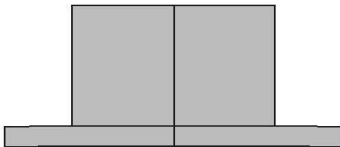
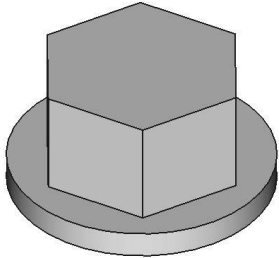
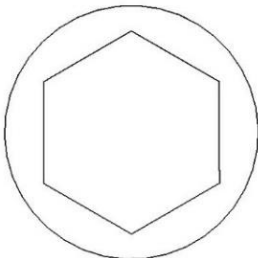
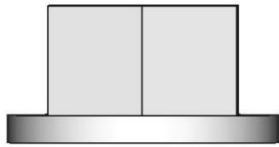
Примечание: знак «+» в таблицах указывает наличие форм образующих в приводимых примерах деталей

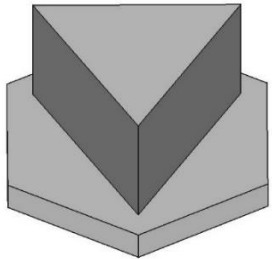
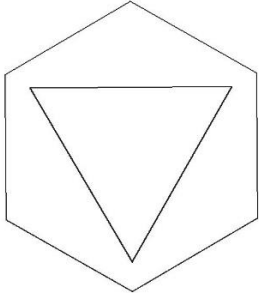
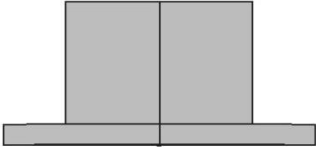
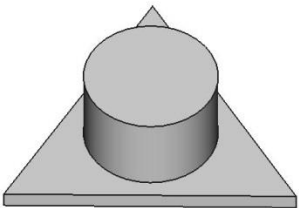
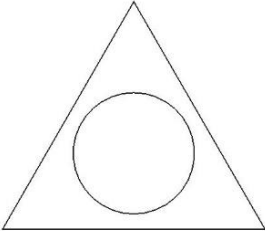

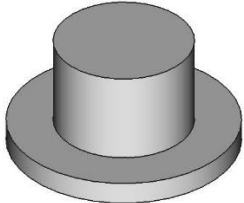
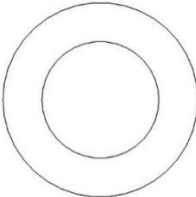

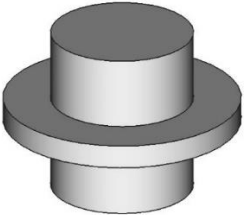
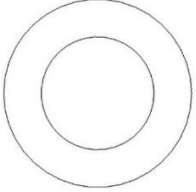
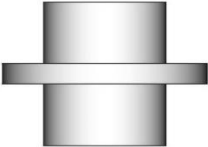
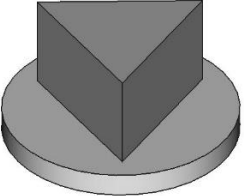
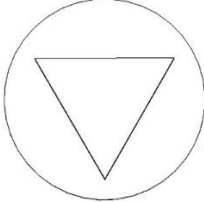

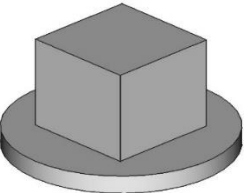
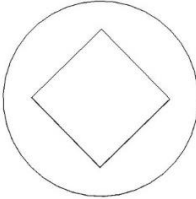

Классификатор полых деталей комбинированной формы

Формы внешней образующей	Формы внутренней образующей						
	Цилиндр	Усеченный конус	Полусфера с отверстием	Сфера с отверстиями	Фланец+ цилиндр+ конус	Полусфера+ конус+ цилиндр	...
Цилиндр с дном	+						
Усеченный конус		+					
Полусфера с отверстием			+				
Сфера с отверстиями				+			
Фланец+ цилиндр+ конус					+		
Полусфера+ конус+ цилиндр						+	
...							

При одинаковом масштабном факторе 3D модели деталей и их проекции показаны в табл. 3.6 – 3.8.

Таблица 3.6

Группа	Топология объемных деталей с фланцем и стержневой частью		
	3D модель	Вид сверху	Фронтальный вид
1	2	3	4
1			
2			

1	2	3	4
3			
4			
5			
6			
7			
8			

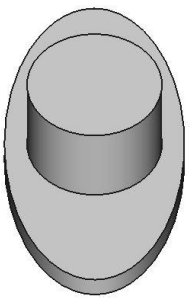
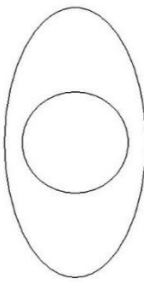


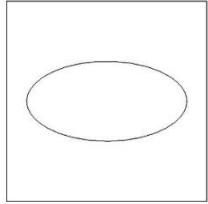

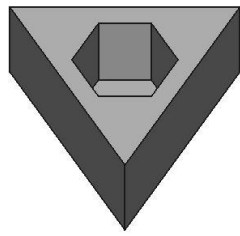
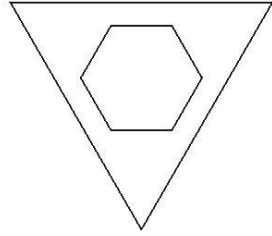
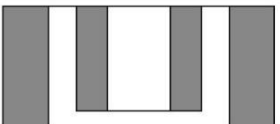
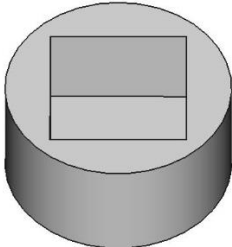
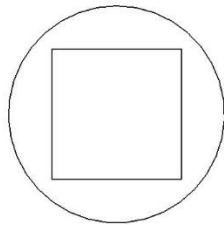

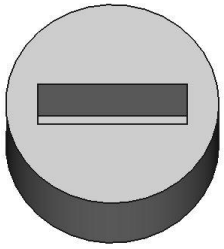
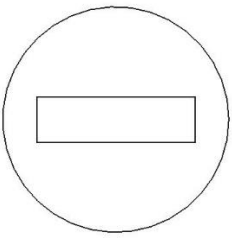

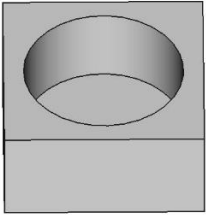
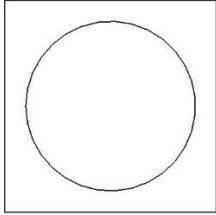

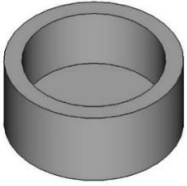
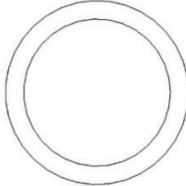

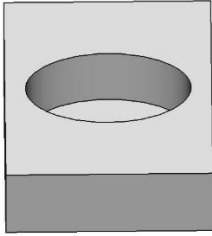
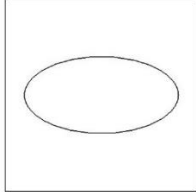

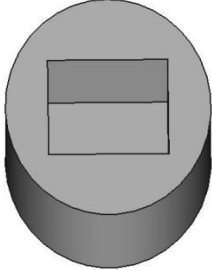
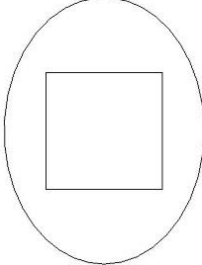

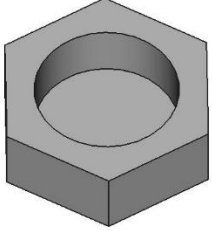
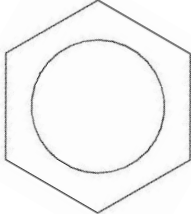

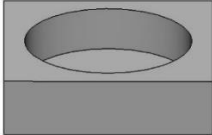
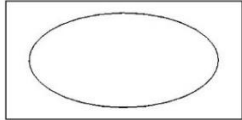

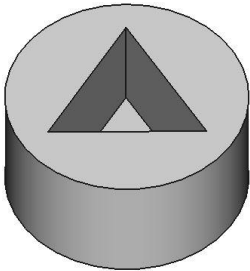
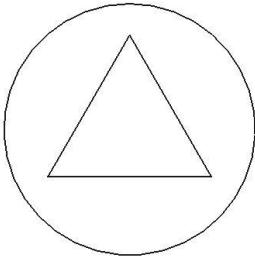
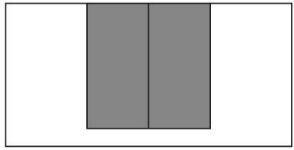
1	2	3	4
9			
10			

Таблица 3.7

группа	Детали объемные полые		
	3D модель	Вид сверху	Разрез
1	2	3	4
1			
2			
3			

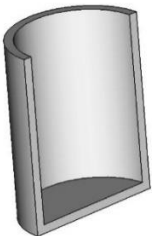
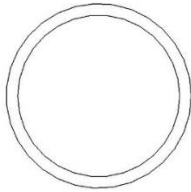


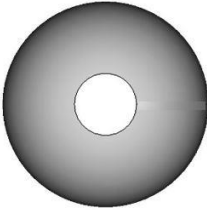
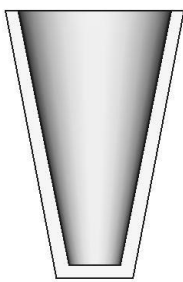

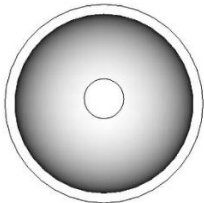
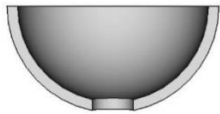
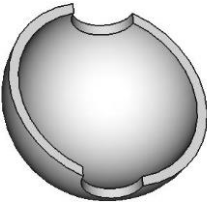
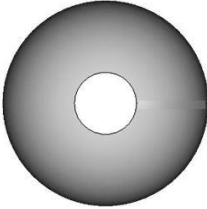
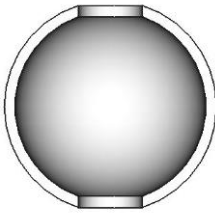
1	2	3	4
4			
5			
6			
7			
8			
9			

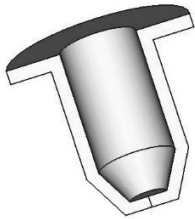
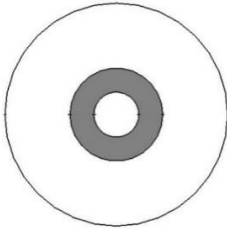
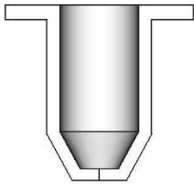

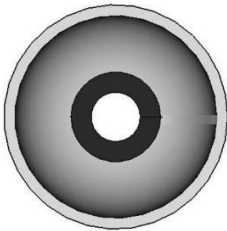
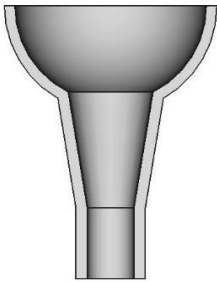
1	2	3	4
10			

Также приведем примеры геометрии оболочковых деталей в табл. 3.8.

Таблица 3.8

Тонкостенные детали из листового металла

Группа	Топология оболочковых деталей		
	3D модель (осевое сечение)	Вид сверху	Разрез
1	2	3	4
1			
2			
3			
4			

1	2	3	4
5			
6			

Нетрудно видеть, что фронтальная проекция у части деталей может совпадать, та же проблема с видами в плане и осевыми сечениями. Другими словами, возможны варианты неправильного отнесения той или иной детали к классам, т.е. неизбежны ошибки при автоматической классификации. Во избежание ошибок при сравнении проекций и других видов изображения требуется дополнительная различающая информация, подготовка и обработка которой потребует дополнительного времени и ресурсов, например увеличенного объема оперативной памяти ЭВМ. Для однозначного отнесения детали к классу «эксперту», в качестве которого будем использовать обученную нейронную сеть, автором предложено предъявлять 3D модели деталей.

Для оптимизации построения компьютерной классификации и для возможности распознавания задаваемых деталей сложной геометрической формы было принято решение использовать нейронные сети для создания базы данных деталей и построения единого классификатора, который в дальнейшем может быть использован для решения различных задач математического моделирования.

3.6 Метод распознавания объектов неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов

Постановка и решение задач распределения объектов по классам зависит от целей классификации. Созданные классификаторы могут быть представлены различными способами. Например, системами классификационных шифров, в табличном виде с примерами распределения объектов по группам или классам или могут быть представлены компьютерными моделями, которые предназначены выполнять распределение объектов по классам. Известно большое количество вычислительных алгоритмов, которые могут быть использованы для решения задач классификации. Классификаторы можно разделить на две категории: классификаторы, основанные на определенных правилах и классификаторы, основанные на вычислительном интеллекте (базирующихся на «мягких» вычислениях). Под «мягкими» вычислениями понимают методологию использования неточных и не строго обоснованных методов и алгоритмов при решении задач. Такие решения не позволяют получить точный результат за приемлемое время, например, *NP*-полные задачи. Область «мягких» вычислений включает такие технологии, как машинное обучение, нечеткую логику и эволюционные алгоритмы. Классификаторы, базирующиеся на правилах, создаются разработчиком, который определяет правила интерпретации входных данных, в отличие от классификаторов на основе «мягких» вычислений, в которых разработчик устанавливает ограничения при интерпретации данных. Машинное обучение в подобных системах отвечает за генерацию правил, обеспечивающих корректную интерпретацию входных и выходных данных.

Как правило, классификаторы, созданные с помощью нейросетевых алгоритмов, основаны на распознавании образов задаваемых объектов. Однако речь идет не только об обработке образов, в качестве которых используются двумерные изображения, сканируемые оптически. Существует системы распознавания, использующие для обработки одномерные, двумерные и трехмерные сигналы различной природы, поступающих от любых датчиков, например: текст, звук,

изображение и т. п. При компьютерной обработке входные данные, в данном случае геометрические формы задаваемых деталей, без потери общности должны быть представлены в двоичной форме. Если предположить, что вектор, формируемый для распознавания объектов, задан каким-то иным способом (не двоичным), то распознавание образов приобретает гораздо более широкое значение для практических приложений.

Существует множество методов, которые могут быть использованы для решения задач классификации, в том числе:

- 1) Логистическая регрессия – статистический метод, используемый для прогнозирования бинарных исходов на основе набора входных переменных [195];
- 2) Деревья решений – иерархические модели, использующие древо-видную структуру для принятия решений на основе входных переменных [196];
- 3) Случайные леса – метод, объединяющий несколько деревьев решений для получения более точных прогнозов [197];
- 4) Нейронные сети – алгоритм машинного обучения, в основе которого лежит структура и функции человеческого мозга [198];
- 5) Машины опорных векторов – алгоритм, который можно использовать как для классификации, так и для регрессии [199].

В рассматриваемой работе используется метод построения искусственной нейронной сети для распознавания и классификации задаваемых деталей с помощью глубокого обучения. Процесс обучения в глубоких сетях [200] опирается на два ключевых механизма: обратное распространение и градиентный спуск [159]. Обратное распространение вычисляет градиенты ошибок, а градиентный спуск использует их для настройки весов сети. Таким образом, минимизируется выбранная функция потерь, которая используется для оценки эффективности модели. Они количественно оценивают разницу между прогнозируемым и фактическим выходом, направляя процесс оптимизации. Следует также отметить, что выбор функции потерь зависит от конкретной задачи классификации. Забегая вперед, можно сказать, что в результате применения алгоритма глубокого обучения [200, 201] удастся классифицировать детали с точностью до 99,1%.

3.6.1 Компьютерное моделирование на основе генеративных моделей

Для создания компьютерной классификации с применением машинного обучения было принято решение использовать язык программирования *Python* [202]. В качестве основного инструмента был выбран фреймворк *TensorFlow*, объединяющий множество моделей и алгоритмов глубокого обучения. Библиотека предназначена для работы с числами и создания моделей машинного обучения. Выбор данного фреймворка обусловлен широким спектром его возможностей, в том числе гибкостью в изменении архитектуры.

В первую очередь требовалось подготовить набор входных данных, описывающих геометрическую форму выборки деталей. Набор данных для классификации деталей содержал 400 образцов для обучения по 5 признакам, наличие или отсутствие фланца, формы внутренней и внешней образующих, формы фланца и его стержневой части. Данные по стандарту были разделены на два набора: обучающий и тестовый.

Для создания обучающих наборов были использованы генеративные модели машинного обучения [200, 201]. Вместо простого создания моделей с использованием случайных точек, генератор создает детали на основе распределения, изученного в процессе обучения. Похожий алгоритм реализован в работах [203] и [204], в них нейронная сеть для генерации рельефов фрактальных поверхностей основана на методе случайного смещения средней точки.

Нейросетевая модель используется для генерации новых данных, с помощью вероятностного подхода. В основе моделирования лежит распознавание по основным признакам, которое описано выше.

В рассматриваемой задаче архитектура модели представляет собой одноточечное кодирование для целевых данных [205]. Результатом являются три выходных нейрона. Структура сети представлена на рисунке 3.8.

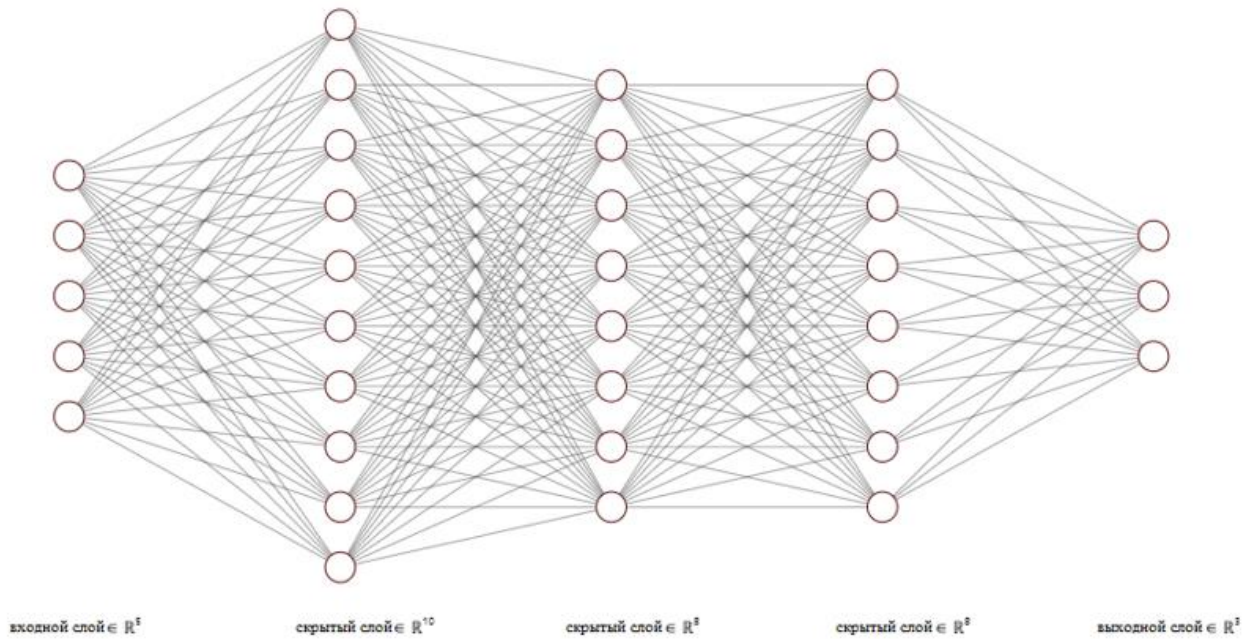


Рис. 3.8. Структура нейросетевой модели для классификации деталей

В качестве функции потерь была выбрана перекрестная энтропия для количественной оценки разницы между двумя распределениями вероятностей [206]. Эта функция позволяет оценить, насколько хорошо работает модель классификации, сравнивая фактический и ожидаемый результаты. Упрощенно математически функцию можно представить в виде:

$$C(p_t, p_p) = \sum_{i=1}^k p_t[i] \cdot \ln(p_p[i]), \quad (3.32)$$

где C – перекрестная энтропия, p_t – эталонная вероятность, p_p – вероятность каждого класса, k – количество классов. В предложенной классификации значение перекрестной энтропии составило порядка 0,007, что свидетельствует о схожести распределения друг относительно друга. Кроме того, в некоторых случаях образуются расхождения с заранее заданной эталонной моделью, что усложняет определение класса. Математически эту задачу можно представить так, существует некоторый набор данных из пар (x_i, y_i) , в котором задан эталонный ответ y_i , являющийся не точным значением признака Y , а распределением вероятностей на множестве Y и осуществляется предсказание с вероятностью $p(y_i|x_i, \theta)$, которое нужно уточнить до эталонного значения распределения $p_t(y_i|x_i)$. Фактически речь

идет о том, что если множество Y непрерывно, то задача приближения, предсказанного заранее распределения, к эталонному виду означает задачу сближения функций плотности вероятностей. Представленная постановка задачи может быть рассмотрена по-разному, в зависимости от того, что мы принимаем за “расстояние” между функциями. Чаще всего используется так называемое расхождение Кульбака-Лейблера, описывающее относительную энтропию, т. е. некую несимметричную метрику сходства между двумя вероятностями. Описанную величину можно рассмотреть, как в дискретном виде (3.33), так и в непрерывном виде (3.34), в зависимости от сформулированной задачи:

$$D(P||Q) = \mathbb{E}(x \sim p) \lg \frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{x \in X} P(x) \lg \frac{P(x)}{Q(x)}, \quad (3.33)$$

где $P(x), Q(x)$ – функции вероятности.

$$D(p||q) = \mathbb{E}(x \sim p) \lg \frac{p(x)}{q(x)} = \int_{x \in X} p(x) \lg \frac{p(x)}{q(x)}, \quad (3.34)$$

где $p(x), q(x)$ – функции плотности вероятности. Пользуясь свойствами логарифмов, справедливо перейти к виду:

$$D(P||Q) = \sum_{x \in X} P(x) \lg P(x) - \sum_{x \in X} P(x) \lg Q(x). \quad (3.35)$$

Здесь первое слагаемое является дифференциальной энтропией случайной величины в непрерывном случае, а второе – перекрестной энтропией. Так как классификатор основывается на обучении нейросетевой модели, имеется некоторое количество обучающих пар (x_i, y_i) , при этом точно известно, что $y_i \in Y$. Следовательно, его можно представить, как вырожденное распределение вероятностей на множестве Y , т. е. имеющее только одно возможное значение y_i с вероятностью равной единице. Тогда для вычисления перекрестной энтропии между эталонным и предсказанным распределением удобнее всего будет использовать дельта-функцию Дирака [207]:

$$C(\delta((y - y_t), p(y_i|x_i, \theta))) = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta((y - y_t) \lg p(y_i|x_i, \theta) dy = \quad (3.36)$$

$$= -\lg p(y_i|x_i, \theta),$$

где $\delta(y - y_t)$ – дельта-функция Дирака, которая выражает эталонное распределение, $p(y_i|x_i, \theta)$ – нормальное распределение. Фактически, полученное значение выражения (3.36) можно использовать для минимизации перекрестной энтропии между эталонным и прогнозируемым распределением. Поскольку оба аргумента в формуле (3.36) являются не числами, а функциями от y и подынтегральное выражение не равно нулю лишь в одной точке y_t , то минимизация $-\lg p(y_i|x_i, \theta)$ равнозначна максимизации $p(y_i|x_i, \theta)$. Модель обучается с помощью перекрестной энтропии, которая путем преобразований по формуле (3.36) приводит к минимизации значений среднеквадратического отклонения, если в модели принимаем нормальное распределение y .

Из раздела *Images* в *TensorBoard* в процессе обучения можно отследить то, какими были модели во время процесса обучения. Процесс обучения модели представлен на рисунке 3.9.

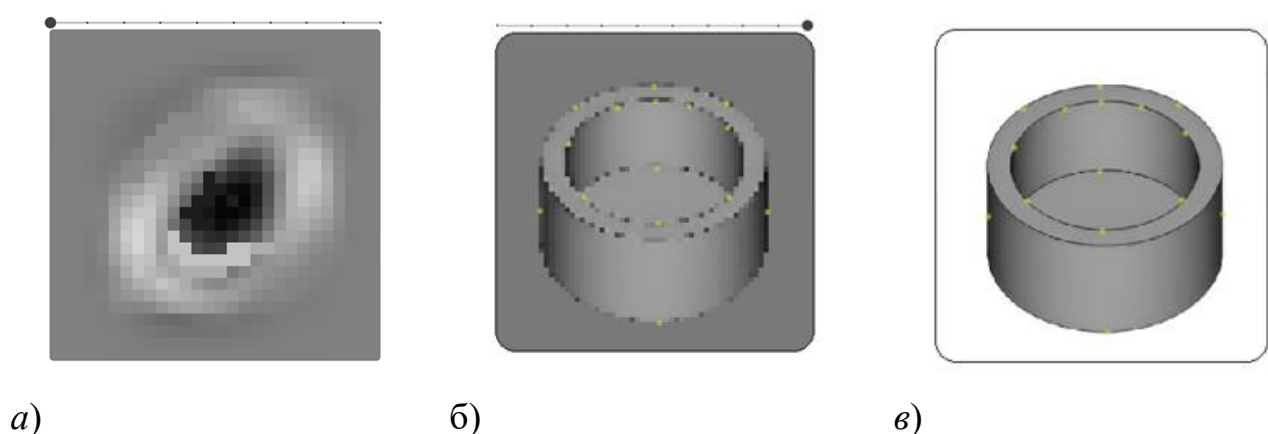


Рис. 3.9. Процесс обучения в *TensorFlow*

В ходе машинного обучения была достигнута высокая точность распознавания и классификации деталей до 99,1%. На рисунке 3.10 можно видеть график изменения скалярной величины, характеризующей заданную точность.

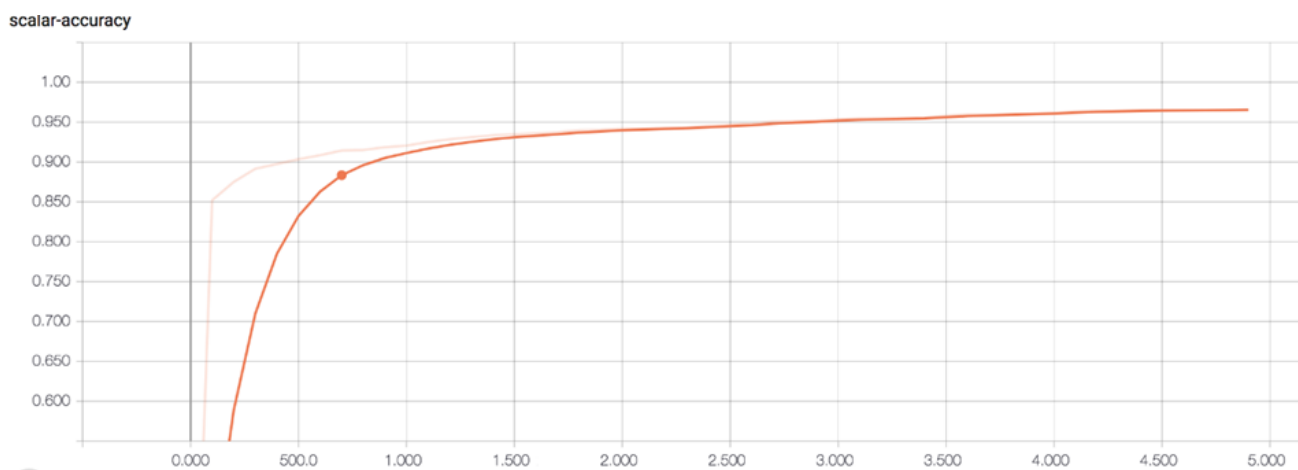


Рис. 3.10. Точность машинного обучения

3.6.2 Верификация классификатора на выбранных трехмерных и генеративных моделях

Метод распознавания и дальнейшей классификации деталей неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов позволяет распознать задаваемую на входе модель и распределить ее в нужную категорию. В таблице 3.8 представлены значения точности и полноты распознавания объектов после отработки алгоритма (детали пронумерованы условно).

Таблица 3.9

Характеристики объектов алгоритма машинного обучения

Значение	1	2	3	4	5
Точность	0,87	0,94	0,95	0,99	0,98
Полнота	0,85	0,87	0,86	0,88	0,88

Из таблицы 3.9 видно, что при формировании выборки объектов отсеивается не более 15% неинформативных входных данных. С помощью нейросетевого алгоритма удалось распознать все предъявляемые на входе детали. Некоторые

сложности при определении возникли для полых деталей в связи со сложностью определения границ их внутренней образующей.

Из графика (см. рис. 3.10) видно, что созданный классификатор определяет класс задаваемых деталей с точностью 99,1%. Опираясь на приведенные результаты, классификатор можно использовать при выборе математической модели для решения ряда задач для деталей с различной геометрией. В том числе, для классификации объектов в задачах механики сплошной среды: о свободном растекании в тонком слое (аналог задачи Прандтля) [208, 209] или течения тонкого слоя с наложением ограничений в одном или нескольких направлениях.

Поскольку в рассмотренных классификаторах форма детали определяет выбор оборудования и типовую технологию ее изготовления, в том числе состав и последовательность операций пластического деформирования, то для характерных групп изделий необходимо осуществить выбор одной из разработанных математических моделей расчета технологических параметров: динамических (напряжений, температур, сил деформирования) и кинематических (перемещений, деформаций, скоростей деформаций). Согласно совокупности решенных задач течения в тонких пластических слоях, описанных и применённых на практике, математические модели для аналитического отыскания технологических параметров указанных течений, укладываются в схему выбора, приведенную на рис. 3.11.

Физическое и механическое поведение сплошной среды характеризуются соответствующими тензорными уравнениями, в первом случае, описываемыми взаимосвязью шаровых тензоров $T_{\sigma}^0 = f_1(T_{\varepsilon}^0)$, а во втором случае девиаторов $D_{\sigma} = f_2(D_{\varepsilon})$ напряжений и деформаций. Физические соотношения учитывают реакцию среды на деформационные процессы в ней. Например, от производного инварианта тензора напряжений, представляющим собой скалярную величину вида $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, T)$ зависит выбор математической модели среды, что позволяет составить замкнутую систему дифференциальных уравнений для математического описания ее движения и внутреннего состояния.



Рис. 3.11. Схема выбора математической модели для анализа течения металла в деформируемом слое

3.7 Выводы по главе 3

1. Сопротивление деформированию зависит от возникающих в металле напряжений, картину дополняют кинематические и деформационные параметры. Для расчета значений перечисленных параметров по вариантам технологии пластического формоизменения необходимо определиться с выбором математической модели, адекватно описывающей механику реализуемых деформационных процессов. Метод и этапы выбора математической модели пластического течения для конкретного объекта производства воплощены в описанных в данной главе алгоритмах, которые доведены до программной реализации.

2. Разработан **метод перехода от визуального отображения объектов, к их абстрактным образам**, описываемым наборами различительных логических и детерминированных признаков, которые используются в разработке технологических процессов пластического деформирования. С помощью алгоритма минимизации численности признаков, необходимых для классификации деталей, в том числе с тонкими полотнами, которые подлежат изготовлению способами пластического деформирования, осуществлен отбор наиболее информативных признаков, что существенно снижает размерность признакового гиперпространства и упрощает подготовку исходных данных о деталях, сокращает как время расчетов и объем необходимой оперативной памяти ЭВМ. Универсальность алгоритма состоит в том, что наряду с понижением размерности признакового пространства, удастся провести автоматическую классификацию деталей по значению и знаку используемых дискриминантных функций.

3. Альтернативным подходом является использование в классификационных процессах 3D моделей деталей, где в качестве эксперта, осуществляющего классификацию, нейросеть. Создан **метод распознавания объектов неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов**. Для обучения нейросети необходимо использовать алгоритмы глубокого обучения.

Алгоритмы распознавания в соответствии с набором информативных признаков и нейросетевые алгоритмы доведены до программных реализаций, зарегистрированных Роспатентом с выдачей свидетельств, которые вошли в комплекс программ, разработанный в диссертации.

4. В результате исследований созданы укрупненные группы объектов согласно имеющимся и разработанным классификаторам. Созданные группы позволяют перейти к генерированию технологии пластического деформирования с определением состава и последовательности операций.

5. С помощью разработанной методологии осуществляется поэтапный выбор математической модели для расчета важных параметров, которые в оценке напряженно-деформированного состояния материала и в прочностных расчетах. Собственно расчеты проводятся по выбранной математической модели из возможных вариантов, разработанных и представленных в главе 2.

ГЛАВА 4. ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ ДЛЯ СТЕСНЕННОГО ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ

Новизна материалов главы 4 соответствует паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) в направлениях исследований и определяется пунктом 5 направлений исследований: Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей и изложена автором на моделях течения тонких слоев в материалах публикаций [210, 211, 212, 213, 214, 218, 219, 221, 222, 223, 224, 226, 227, 228, 229, 230, 231, 232, 233, 235].

Известен ряд постановок краевых задач теории пластичности [19–24, 28, 29, 33–35] для сходных условий деформирования, в которых рассматривается течение в относительно тонком слое с затеканием металла в узкие каналы с формированием стенок или ребер [210, 211].

Развитием математического аппарата механики деформируемого твердого тела является получение определяющих уравнений и уравнений состояния в аналитическом виде [212] для оценки давлений на контактных поверхностях, силовых и деформационных параметров, а также распределение скоростей перемещений материальных точек в рассматриваемом объеме деформируемого тела [208, 209].

4.1 Математическая модель решения аналога задачи Л. Прандтля применительно к прямоугольному телу, занимающему односвязную область

4.1.1 Объект исследования и расчетная схема

Рассматривается новая математическая модель изготовления коробчатой детали прямоугольной формы (рис. 4.1), по внешнему контуру которой расположены стенки с толщиной, соизмеримой с толщиной ее донной части [214]. Под воздействием внешней нагрузки металл деформируется при условии превышения интенсивностью напряжений предела текучести. Упругими деформациями штампа пренебрегаем ввиду их малости. Формоизменение заготовки может осуществляться различными операциями в зависимости от конструкции штампа, большинство которых основано на сжатии штампом металла заготовки. Для поковок с относительно малой толщиной силовые параметры оцениваются в соответствии с теорией течения в сравнительно тонком пластическом слое в изложении Ильюшина А. А. Двумерная математическая модель описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения [33]. В случае плоского деформированного состояния принимаем условие полной пластичности [19, 60, 215]. Касательные напряжения в слое не учитываются ввиду малости и нормальные напряжения будут главными, два из них приближенно равны, а третье нормальное напряжение, постоянное по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент. На контуре, ограничивающим область течения, достаточно задать одно краевое условие. Для подтверждения кинематических гипотез в качестве примера возьмем объект в виде коробки с вертикальными стенками, изображенной на рис. 4.1 и имеющей габаритные размеры $120 \times 100 \times 60$ мм. Металл поковки – алюминиевый сплав АМц ГОСТ 4784-2019 [216].

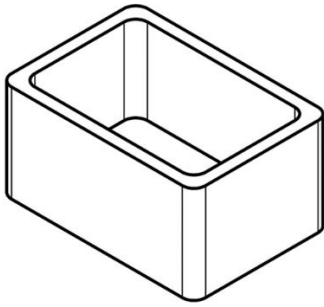


Рис. 4.1. Прямоугольная коробка

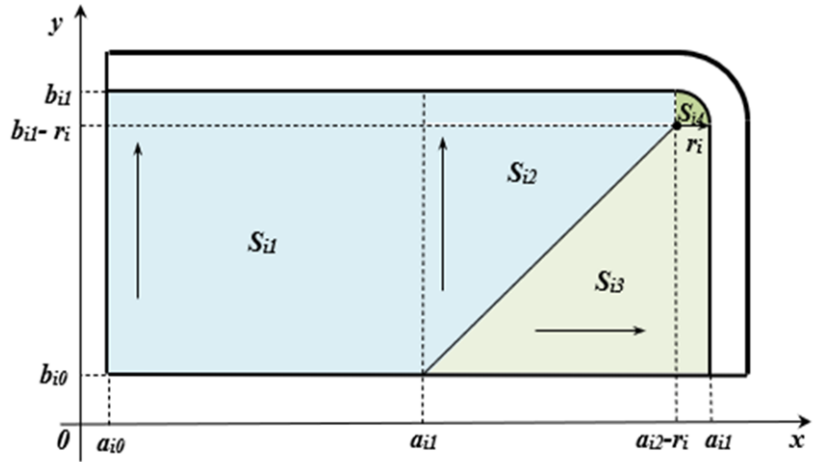


Рис. 4.2. Расчетная схема части односвязной области

Рассматриваемая коробчатая поковка имеет прямоугольную форму в плане, стенки которой закруглены в углах ($R=1,6$ мм). В соответствии с принятой расчетной схемой, оси выбранной системы координат параллельны осями симметрии поковки, поэтому ограничимся рассмотрением первого квадранта (рис. 4.2) [217].

Толщина донной части поковки $h(t)$ много меньше размеров в плане: $2L$ – в направлении оси Ox и $2B$ – в направлении оси Oy , и H – в направлении оси Oz .

В каждый фиксированный момент пластический слой имеет постоянную толщину $h = h(t)$, а заполняющий стенки металл находится в упругом состоянии. Проекция поковки на плоскость, нормальную направлению действия внешней силы, занимает область, ограниченную внешним контуром:

$$\Gamma_1 : f_1(x, y) = 0. \quad (4.1)$$

В соответствии с принятыми допущениями в системе действуют напряжения [224]:

$$\sigma_x \approx \sigma_y = -q, \quad -\sigma_z = p, \quad (4.2)$$

$$\tau_{xy} = 0. \quad (4.3)$$

При выполнении условия пластичности [4, 19, 28, 40, 47, 58, 215]:

$$\sigma_s = p - q. \quad (4.4)$$

Затеканием металла в зазор между инструментом увеличивается высота боковых стенок. Предположим, что пластическая деформации возникает в «тонких полосах скольжения, при этом поперечные сечения заготовки остаются плоскими.

Будем считать, что линии тока являются прямыми, перпендикулярными к линиям уровня. На линиях уровня контактное давление остается постоянным»⁴¹ [19, 48, 209, 217].

Разобьем четверть объекта (см. рис. 4.2) на подобласти S_{ij} с характерным течением металла, обозначенного стрелками, дополнительно выделив радиусные участки. Координаты характерных точек по оси Ox обозначим – a , по оси Oy – b .

4.1.2 Границы выделенных пластических областей

Рассматриваемая область $S_i(x, y)$ состоит из четырех подобластей с характерным течением металла:

$$S_i = \bigcup_{j=1}^4 S_{ij}(x, y). \quad (4.5)$$

Границы рассматриваемых подобластей S_{i1} , S_{i2} и S_{i3} состоят их отрезков прямых, поэтому координаты точек, расположенных на этих прямых (рис. 4.3), могут быть вычислены следующим образом:

$$S_{ij}(x, y) = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} f_{i-1j}(x) \leq x \leq f_{ij}(x) \\ g_{ij-1}(y) \leq y \leq g_{ij}(y) \end{array} \right\} \quad (4.6)$$

где $f_{ij}(x)$ и $g_{ij}(y)$ известные функции своих аргументов.

Представим границы подобластей следующими неравенствами (4.7) – (4.9):

$$S_{i1} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_{i0} \leq x \leq a_{i1} \\ b_{i0} \leq y \leq b_{i1} \end{array} \right\} \quad (4.7)$$

$$S_{i2} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_{i1} \leq x \leq a_{i2} - r_i \\ x - (a_{i1} - b_{i0}) \leq y \leq b_{i1} \end{array} \right\} \quad (4.8)$$

⁴¹ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212. ISSN: 2074-0530

$$S_{i3} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} y + (a_{i1} - b_{i0}) \leq x \leq a_{i2} \\ b_{i0} \leq y \leq b_{i1} - r_i \end{array} \right. . \quad (4.9)$$

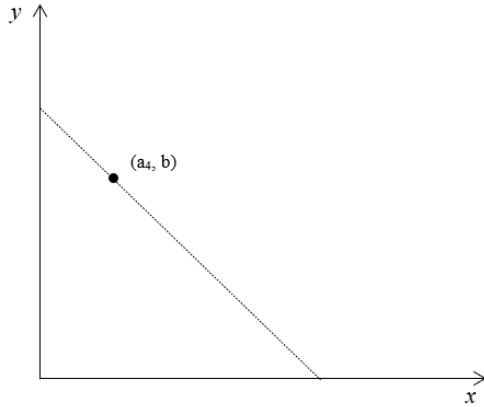


Рис. 4.3. К составлению уравнения прямолинейной границы

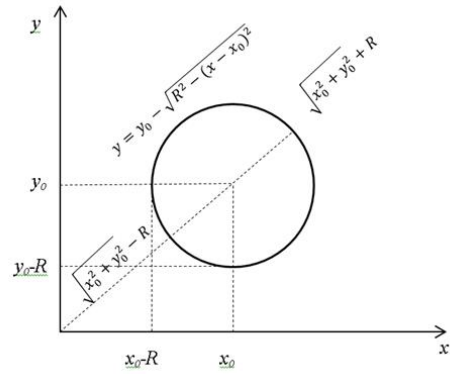


Рис. 4.4. Схема к описанию границ подобластей, ограниченных дугами окружностей

Подобласть S_{i4} ограничена дугой окружности радиусом r_1 с центральным углом $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 4.2). Для вычисления координат точек границы составим уравнение окружности, согласно схеме на рис. 4.4 и решим его относительно y :

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2, \\ (y - y_0)^2 - (R^2 - (x - x_0)^2) &= 0, \\ y - y_0 &= \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad y = y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \\ y &= y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Отсюда границу подобласти S_{14} представим неравенствами (4.7):

$$S_{i4} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r_i \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x - (a_{i2} - r_i))^2 + (y - (b_{i1} - r_i))^2 \leq r_i^2, \\ a_{i2} - r_i \leq x \leq a_{i2}, \\ b_{i1} \leq y \leq (b_{i1} - r_i) - \sqrt{r_1^2 - (x - (a_{i2} - r_i))^2} \end{array} \right. . \quad (4.11)$$

4.1.3 Постановка краевой задачи в односвязной области

Рассмотрим прямоугольную заготовку, для изготовления полового прямоугольного параллелепипеда без одной из внешних плоскостей. Поставим

необходимым условие равномерного заполнения металлом полостей с образованием боковых стенок параллелепипеда. В этом случае ширина канала должна быть выбрана пропорциональной расходу металла в каждой его точке [45, 217, 218, 219]. Такой выбор позволит уменьшить «неодинаковость» высоты стенок параллелепипеда и возможность образования излишнего истончения боковых плоскостей [220].

Предположим, что наличие малых упругих деформации штампового инструмента даст возможность не учитывать их, т.е. внешние границы выделенных подобластей будем считать неизменными в процессе деформирования [24, 74, 88, 92].

Уравнения краевой задачи (4.12–4.14), основанной на модели «идеальной жидкости», запишем в виде [19, 21, 33, 60, 77, 135, 217, 219, 221]:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (4.14)$$

где h – толщина внешней области; $\vec{v} = \vec{v}(u, v)$ – вектор скорости перемещения;

$\lambda(t) = \ln \left(\frac{h_0}{h(t)} \right)$ – степень деформации по А. А. Ильюшину:

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt}. \quad (4.15)$$

4.1.4 Алгоритм решения краевой задачи в односвязной области

Решение представим для каждой подобласти пластического течения расчетной схемы (см. рис. 4.2) [213].

Для подобласти

$$S_{i1} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} a_{i0} \leq x \leq a_{i1} \\ b_{i0} \leq y \leq b_{i1} \end{array} \right.$$

граничными условиями являются:

$$\begin{aligned} y = b_{i0}, v = 0, \\ y = b_{i1}, p = 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Поскольку в подобласти компонента вектора скорости перемещения в направлении оси Ox равна $u=0$, то уравнение (4.12) примет вид: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а (4.13) запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$, решая последнее, получим:

$$p_{i1} = -\frac{2\tau_s}{h_1}y + C_{1i1}. \quad (4.17)$$

Воспользовавшись граничными условиями (4.16) при $y = b_{i1}$ уравнение (4.17) примет вид

$$2\tau_s = -\frac{2\tau_s b_{i1}}{h} + C_{1i1},$$

тогда, найдя постоянную интегрирования $C_{1i1} = 2\tau_s(1 + \frac{b_{i1}}{h})$, после подстановки в (4.17) получим давление на контактной поверхности:

$$p_{s_{i1}}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h}(y - b_{i1}). \quad (4.18)$$

Уравнение несжимаемости (4.14) при тех же граничных условиях определится выражением $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dh}{dt}$, в правую часть которого подставим значение частной производной, полученное ранее (4.15):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt}. \quad (4.19)$$

Решением уравнения (4.19) будет значение компоненты вектора скорости в направлении оси Oy :

$$v = -\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt} y + C_{1i2}. \quad (4.20)$$

Используя граничные условия (4.16) ($y = b_{i0}, v = 0$), найдем произвольную постоянную интегрирования $C_{1i2} = \frac{b_{i0}}{h(t)} \frac{dh}{dt}$, при подстановке которой в (4.20), будет известно уравнение для компоненты скорости течения в подобласти:

$$v_{i1} = -\frac{1}{h_1(t)}(y - b_{i0})\frac{dh_1}{dt}. \quad (4.21)$$

Силу, необходимую для перевода металла подобласти S_{i1} в пластическое состояние найдем с помощью интегрирования выражения (4.18):

$$\begin{aligned} P_{S_{i1}}^{(1)} &= \iint_{S_{i1}} p_{S_{i1}}(y) dx dy = \int_{a_{i0}}^{a_{i1}} dx \int_{b_{i0}}^{b_{i1}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_{i0}) \right) dy = \\ &= \int_{a_{i0}}^{a_{i1}} \left((2\tau_s(b_{i1} - b_{i0})) - \frac{2\tau_s}{2h_1}(b_{i1} - b_{i0})^2 \right) dx = \\ &= (a_{i1} - a_{i0}) \left(2\tau_s(b - b_2)a_4 - \frac{\tau_s}{h_1}(b - b_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.22)$$

Переходим к подобласти S_{i2} , имеющей границы, соответствующие (4.8):

$$S_{i2} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_{i1} \leq x \leq a_{i2} - r_i \\ x - (a_{i1} - b_{i0}) \leq y \leq b_{i1} \end{array} \right\}.$$

Воспользуемся системой уравнений краевой задачи (4.12 - 4.14) при граничных условиях:

$$\begin{aligned} y = x - (a_{i1} - b_{i0}), v = 0 \quad (u \equiv 0), \\ y = b_{i1}, p = 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Уравнение (4.12) квазистатического равновесия примет вид $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а уравнение (4.13) запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_i}$, решением которого будет соотношение $p = -\frac{2\tau_s}{h_i}y + C_{2i1}$. С помощью граничных условий (4.23) находим давление на контактной поверхности в рассматриваемой подобласти:

$$p_{S_{i2}}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_{i1}). \quad (4.24)$$

Из уравнения несжимаемости (4.14) находим компоненту вектора скорости течения в подобласти

$$v_{i2} = -\frac{1}{h_i(t)}\frac{dh_i}{dt}y + C_{2i2}, \quad (4.25)$$

$$C_{2i2} = \frac{1}{h_i(t)}\frac{dh_i}{dt}(-x + (a_{i1} - b_{i0})),$$

Следовательно, компонента вектора скорости течения в направлении оси Oy в

рассматриваемой подобласти:

$$v_{i2} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} ((y-x) + (a_{i1} - b_{i0})). \quad (4.26)$$

Найдем силу деформирования в подобласти S_{i2}

$$\begin{aligned} P_{S_{i2}}^{(1)} &= \iint_{S_{i2}} p_{S_{i2}}(y) dx dy = \int_{a_{i1}}^{a_{i2}-r_i} dx \int_{x-(a_{i1}-b_{i0})}^{b_{i1}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1} (y - b_{i1}) \right) dy = \\ &= \int_{a_{i1}}^{a_{i2}-r_i} \left(2\tau_s y - \frac{\tau_s}{h_1} (y - b_{i1})^2 \right) \Big|_{x-(a_{i1}-b_{i0})}^{b_{i1}} dx = \\ &= \int_{a_{i1}}^{a_{i2}-r_i} \left(2\tau_s (b_{i1} - x + (a_{i1} - b_{i0})) - \frac{\tau_s}{h_1} (x - (a_{i1} - b_{i0}) - b_{i1})^2 \right) dx = \\ &= -\tau_s (b_{i1} - x + (a_{i1} - b_{i0}))^2 \Big|_{a_{i1}}^{a_{i2}-r_i} - \frac{\tau_s}{3h_i} (x - (a_{i1} - b_{i0}) - b_{i1})^3 \Big|_{a_{i1}}^{a_{i2}-r_i} \end{aligned} \quad (4.27)$$

и окончательно:

$$\begin{aligned} P_{S_{i2}}^{(1)} &= -\tau_s ((b_{i1} - a_{i2} + r_i + a_{i1} - b_{i0})^2 - (b_{i1} - b_{i0})^2) - \\ &= -\frac{\tau_s}{3h_i} ((b_{i1} - a_{i2} + r_i + a_{i1} - b_{i0})^3 - (b_{i1} - b_{i0})^3). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Перейдем к подобласти S_{i3} с границами (4.9):

$$S_{i3} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} y + (a_{i1} - b_{i0}) \leq x \leq a_{i2} \\ b_{i0} \leq y \leq b_{i1} - r_i \end{array} \right.$$

Здесь $x = y + (a_{i1} - b_{i0})$ линия раздела течения, вдоль которой $u = 0$ ($v \equiv 0$) и при $x = a_{i2}$, $p = 2\tau_s$. В подобласти S_{i3} система уравнений (4.12) – (4.14) преобразуется к следующему виду:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_i}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{h(t)} \frac{dh}{dt}. \quad (4.29)$$

Давление на контактной поверхности в пределах подобласти:

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_i} x + C_{3i1}. \quad (4.30)$$

Подставив граничные условия для подобласти в (4.30), найдем постоянную интегрирования $C_{3i1} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_i} a_{i2}$ и давление на контакте:

$$p_{S_{i3}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_i}(x - a_{i2}). \quad (4.31)$$

а также компоненту вектора скорости течения вдоль оси Ox :

$$u = -\frac{1}{h_i(t)} \frac{dh_i(t)}{dt} x + C_{3i2}. \quad (4.32)$$

Используя граничные условия в подобласти, найдем произвольную постоянную интегрирования $C_{3i2} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (y + (a_{i1} - b_{i0}))$ и наконец, получим выражение для расчета компоненты вектора скорости течения в направлении оси x :

$$u = -\frac{1}{h_i(t)} \frac{dh_i(t)}{dt} (x - y - (a_{i1} - b_{i0})). \quad (4.33)$$

Силу деформирования находим интегрированием давления по площади в пределах границ подобласти пластического течения S_{i3} :

$$\begin{aligned} P_{S_{i3}}^{(1)} &= \iint_{S_{i3}} p(x) dx dy = \int_{b_{i0}}^{b_{i1}-r_i} dy \int_{y+(a_{i1}-b_{i0})}^{a_{i2}} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_{i2})) dx; \quad (4.34) \\ &= \int_{b_{i0}}^{b_{i1}-r_i} dy \left(2\tau_s x \Big|_{y+(a_{i1}-b_{i0})}^{a_{i2}} - \frac{\tau_s}{h_1} (x - a_{i2})^2 \Big|_{y+(a_{i1}-b_{i0})}^{a_{i2}} \right) = \\ &= \int_{b_{i0}}^{b_{i1}-r_i} (2\tau_s(a_{i2} - y - (a_{i1} - b_{i0})) + \frac{\tau_s}{h_1}(a_{i2} - y - (a_{i1} - b_{i0}))^2) dy = \\ &= -\tau_s(a_{i2} - y - (a_{i1} - b_{i0}))^2 \Big|_{b_{i0}}^{b_{i1}-r_i} + \frac{\tau_s}{3h_1}(a_{i2} - y - (a_{i1} - b_{i0}))^3 \Big|_{b_{i0}}^{b_{i1}-r_i} = \\ &= \tau_s \left((a_{i2} - b_{i1} + r_i - (a_{i1} - b_{i0}))^2 - (a_{i2} - a_{i1})^2 \right) + \\ &\quad + \frac{\tau_s}{3h_1} \left((a_{i2} - y - (a_{i1} - b_{i0}))^3 - (a_{i2} - a_{i1})^3 \right). \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению пластической области S_{i4} с границами (4.11). Совершим переход к полярной системе координат:

$$S_{i4} = \left\{ (x, y): 0 \leq \rho \leq r_i \Rightarrow \begin{cases} (x - (a_{i2} - r_i))^2 + (y - (b_{i1} - r_i))^2 \leq r_i^2, \\ a_{i2} - r_i \leq x \leq a_{i2}, \\ b_{i1} \leq y \leq (b_{i1} - r_i) - \sqrt{r_i^2 - (x - (a_{i2} - r_i))^2} \end{cases} \right.$$

Из условий на контуре при $\rho = 0, v_\varphi = 0$, а при $\rho = r_1$ контактное давление максимально при $p = 2\tau_s$. Линии тока в подобласти S_{i4} образуют пучок лучей с центром в точке с координатами $(a_{i2} - r_i; b_{i1} - r_i)$. Используя приведенные граничные условия в подобласти и, преобразуя первое уравнение квазистатического равновесия (4.12) к виду $\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_i}$, после интегрирования

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_i}\rho + C_{4i1} \text{ и определения произвольной постоянной интегрирования}$$

$$2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_i}r_i = C_{4i1}, \text{ давление на контактной поверхности определится, как:}$$

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_i}(\rho - r_i). \quad (4.35)$$

С учетом условия несжимаемости (4.14) скорость течения в подобласти выразится дифференциальным уравнением первого порядка

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_i} \frac{dh_i(t)}{dt} = 0, \quad (4.36)$$

решением которого будет радиальная компонента вектора скорости:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_i} \frac{dh_i(t)}{dt}. \quad (4.37)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{i4} , найдем двойным интегрированием вычисленного контактного давления (4.35) по площади:

$$\begin{aligned} P_{S_{i4}} &= \iint_{S_{i4}} p_{S_{i4}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r_i} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_i}(\rho - r_i))\rho d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2\tau_s \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{r_i} - \frac{2\tau_s \rho^3}{3h_i} \Big|_0^{r_i} + \frac{2\tau_s \rho^2}{2h_i} \Big|_0^{r_i} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\tau_s r_{1i}^2 + \frac{1}{3\tau_s} \tau_s \frac{r_i^3}{h_i} \right). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Суммарная сила деформирования в рассмотренной области будет представлена соотношением:

$$P_\Sigma = \sum_{i,j}^n P_{S_{i,j}}. \quad (4.39)$$

Еще одним примером деталей, занимающих односвязную область (рис. 4.5), являются лопасти различных конструкций. В приведенном примере тело поковки лопасти разбито на участки с переменной толщиной, границы которых являются линейными функциями. Алгоритм решения данной задачи является типовым, и мы не будем на нем останавливаться. Отметим только, что для изготовления поковки данной детали разработаны новые технологические процессы, техническая новизна которых защищена патентами на изобретения: в одном случае это выдавливание в штампе с разъемной матрицей [222], в другом – технология жидкой штамповки спаренной поковки [223]. Во втором случае после кристаллизации расплава давление не снимается, за счет чего поковка доштамповывается в твердом состоянии до конечной толщины полотна.

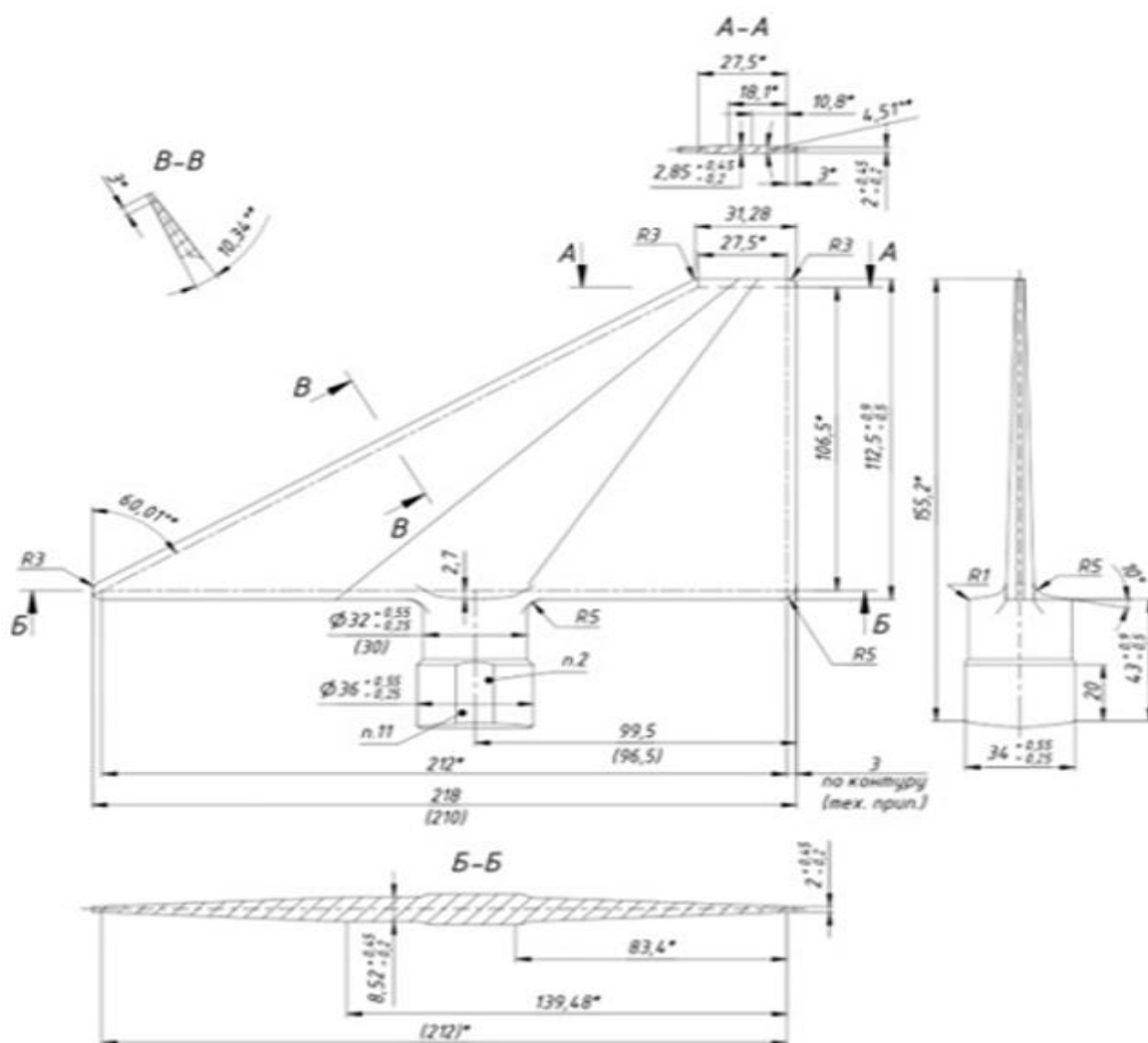


Рис. 4.5 Рисунок поковки «лопасть»

4.2 Решение аналога задачи Л. Прандтля, применительно к прямоугольному телу с контурными ребрами, занимающему двусвязную область

4.2.1 Объект исследования и расчетная схема

Для верификации разработанных математических моделей и согласованности кинематических гипотез рассчитаем технологические параметры для изготовления поковки с контурными ребрами [224], изображенную на рис. 4.6 и имеющую габаритные размеры в плане $a \times b$ мм. Металл поковки – алюминиевый сплав АМц ГОСТ 4784-2019 [216]. В соответствии с принятой расчетной схемой оси выбранной системы координат совпадают с осями симметрии фланца, поэтому ограничимся рассмотрением первого квадранта (рис. 4.7) [225].

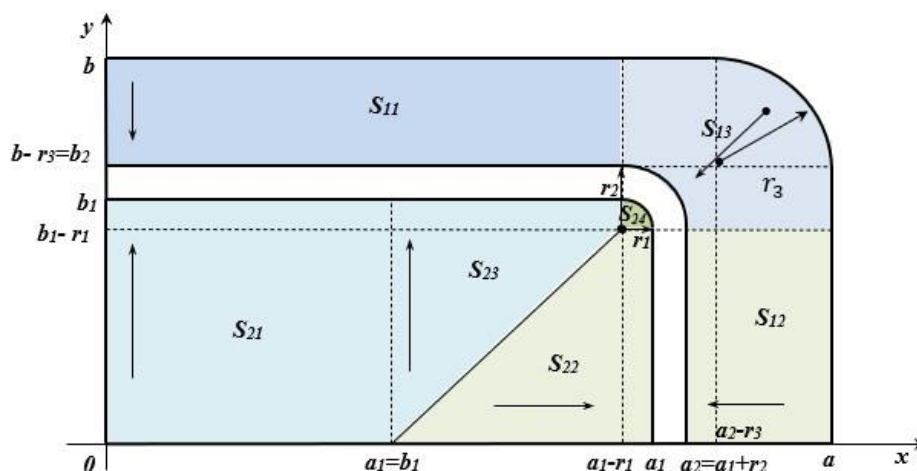
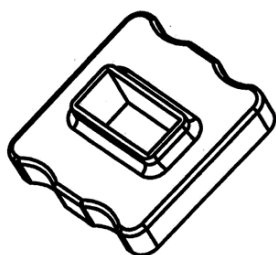


Рис. 4.6. Фланец с контурными ребрами

Рис. 4.7. Расчетная схема для рассматриваемой пластической области

Разобьем четверть фланца на подобласти S_{ij} с характерным течением металла, обозначенного стрелками, дополнительно выделив радиусные участки. Координаты характерных точек по оси X обозначим – a , по оси Y – b .

4.2.2 Границы выделенных пластических областей с характерным течением:

$S_1(x, y)$ – внешних и $S_2(x, y)$ – внутренних

Согласно расчетной схеме (см. рис. 4.7) для рассматриваемой пластической области справедливо равенство [226]:

$$S(x, y) = S_1(x, y) + S_2(x, y). \quad (4.40)$$

Границы рассматриваемых областей S_1 и S_2 состоят из отрезков прямых (см. рис. 4.3) и частей окружностей (см. рис. 4.4). Поэтому координаты точек, расположенных на этих прямых, могут быть вычислены по рассмотренным ранее зависимостям (4.6), а точки дуг окружностей по формулам (4.10).

Рассмотрим внешнюю область $S_1(x, y)$, которая состоит из четырех подобластей с характерным течением металла. Представим границы подобластей следующими неравенствами (4.41) – (4.43):

$$S_{11} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_1 - r_1 \\ b - r_3 \leq y \leq b \end{array} \right\}, \quad (4.41)$$

$$S_{12} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 + r_2 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right\}, \quad (4.42)$$

$$S_{13} = \bigcup_{k=1}^3 S_{13k}. \quad (4.43)$$

Подобласть S_{13} ограничена дугами окружностей радиусами r_2 и r_3 (см. рис. 4.7).

Для вычисления координат точек границы составим уравнение окружности, согласно схеме (см. рис. 4.4), и решим его относительно y , как это сделано в (4.10).

Отсюда границу подобласти S_{13} представим неравенствами (4.44):

$$S_{131} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin \varphi} \\ \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b - r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\}, \quad (4.44)$$

$$S_{132} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos\varphi} \\ 0 \leq \varphi \leq \arctg \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \end{array} \right.,$$

$$S_{133} = \left\{ (\rho, \varphi): \begin{array}{l} r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \\ \arctg \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \leq \varphi \leq \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b - r_1} \end{array} \right..$$

Вид функции ρ_φ вычислим отдельно. Для этого опишем границу области S_{133} , представленную четвертью окружности радиуса r_3 с центром в точке $(a - r_3; b - r_1)$. Для описания рассматриваемой границы запишем уравнение окружности в декартовой системе координат:

$$(x - (a - r_3))^2 + (y - (b - r_1))^2 = r_3^2. \quad (4.45)$$

Согласно формулам пересчета координат (x, y) на (ρ, φ) , перейдем к более удобной полярной системе координат:

$$x = \rho \cos\varphi, \quad y = \rho \sin\varphi. \quad (4.46)$$

В новых переменных уравнение окружности (4.45) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} & (\rho \cos\varphi - (a - r_3))^2 + (\rho \sin\varphi - (b - r_1))^2 = r_3^2, \\ & \rho^2 - 2\rho(a - r_3)\cos\varphi + (a - r_3)^2 - 2\rho(b - r_1)\sin\varphi + (b - r_1)^2 - r_3^2 = 0, \\ & \rho^2 - 2\rho((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi) + ((a - r_3)^2 + (b - r_1)^2 - r_3^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.47)$$

После выделения полного квадрата из квадратного трехчлена:

$$\begin{aligned} & \rho^2 - 2\rho((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi) + ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi)^2 - \\ & - ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi)^2 - ((a - r_3)^2 + (b - r_1)^2 - r_3^2) = 0. \end{aligned}$$

Граница контура пластической области будет описана уравнением:

$$\begin{aligned} & \rho_\varphi = (a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi + \\ & + \sqrt{((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_1)\sin\varphi)^2 - ((a - r_3)^2 + (b - r_1)^2 - r_3^2)}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Проанализируем внутреннюю область $S_2(x, y)$, представленную четырьмя подобластями с характерным течением металла:

$$S_2 = \bigcup_{j=1}^4 S_{2j}(x, y). \quad (4.49)$$

Для обоснования границ подобластей S_{22} и S_{23} рассмотрим уравнение прямой линии (4.6) для вычисления координат (x, y) точек, расположенных на этой прямой:

$$\begin{aligned} y &= x - (a_1 - b_1), \\ x &= y + (a_1 - b_1). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Воспользовавшись схемой (см. рис. 4.4), составим уравнение окружности (4.10), являющейся границей подобласти S_{24} :

$$(x - (a_2 - r_1))^2 + (y - (b_1 + r_1))^2 = r_1^2. \quad (4.51)$$

Теперь можно представить границы подобластей области течения $S_2(x, y)$ следующими неравенствами (4.52) – (4.55):

$$S_{21} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_1 - b_1 \\ 0 \leq y \leq b_1 \end{array} \right\}, \quad (4.52)$$

$$S_{22} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} y + a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 \\ 0 \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right\} \quad (4.53)$$

$$S_{23} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 - r_1 \\ x - (a_1 - b_1) \leq y \leq b_1 \end{array} \right\} \quad (4.54)$$

$$S_{24} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} (x - (a_2 - r_1))^2 + (y - (b_1 + r_1))^2 = r_1^2 \\ 0 \leq \rho \leq r_1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \quad (4.55)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b - r_1 \leq y \leq (b_1 - r_1) + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_1 + r_1))^2} \\ a_1 - r_1 \leq x \leq a_1 \end{array} \right\}.$$

4.2.3 Краевая задача в двусвязной области и алгоритм ее решения

Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в двусвязной области $S(x, y)$ [226], где

$$S(x, y) = \bigcup_{i=1}^2 S_{ij}(x, y).$$

Поскольку здесь также используется модель «идеальной жидкости», воспользуемся уравнениями ранее рассмотренной краевой задачи (4.12 –4.14). В соответствии с построенным алгоритмом решение данной задачи представим для каждой области пластического течения расчетной схемы (см. рис. 4.7).

Внешняя область объединяет три подобласти.

$$S_1(x, y) = \bigcup_{j=1}^3 S_{1j}(x, y).$$

Для подобласти

$$S_{11} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_1 - r_1 \\ 0 \leq y \leq b \end{array} \right.$$

граничными условиями являются:

$$\begin{aligned} y = b, v = 0, \\ y = b_2, p = 2\tau_s. \end{aligned} \tag{4.56}$$

Поскольку в подобласти скорость течения в направлении оси x равна $u \equiv 0$, то уравнение (4.12) примет вид: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а (4.13) запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$, решая последнее, получим [227]:

$$p_{11} = -\frac{2\tau_s}{h_1} y + C_{111}. \tag{4.57}$$

Воспользовавшись граничными условиями (4.56) при $y = b_2$ уравнение (4.57) примет вид $2\tau_s = -\frac{2\tau_s b_2}{h_1} + C_{111}$, тогда, найдя постоянную интегрирования $C_{111} = 2\tau_s(1 + \frac{b_2}{h_1})$, после подстановки в (4.57) получим давление на контактной поверхности:

$$p_{s_{11}}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2). \tag{4.58}$$

Из условия несжимаемости (4.14) [210] при тех же (4.56) граничных условиях, получим выражение $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}$, в правую часть которого подставим

значение производной, полученное ранее $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}$. Решением этого уравнения будет:

$$v = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} y + C_{112}. \quad (4.59)$$

Используя первые граничные условия из (4.56) ($y = b, v = 0$), найдем произвольную постоянную интегрирования $C_{112} = \frac{b}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}$. Тогда компоненты вектора скорости течения в направлении оси Oy в подобласти S_{11} имеют вид:

$$v_{11} = -\frac{1}{h_1(t)} (y - b) \frac{dh_1}{dt}. \quad (4.60)$$

Сила деформирования в S_{11} найдем с помощью двойного интеграла, который легко сводится к повторному

$$\begin{aligned} P_{S_{11}}^{(1)} &= \iint_{S_{11}} p_{S_{11}}(y) dx dy = \int_0^{a_1-r_1} dx \int_{b_2}^b \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1} (y - b_2) \right) dy = \\ &= \int_0^{a_1-r_1} \left((2\tau_s(b - b_2)) - \frac{2\tau_s}{2h_1} (y - b_2)^2 \Big|_{b_2}^b \right) dx = \\ &= (a_1 - r_1) \left(2\tau_s(b - b_2) - \frac{\tau_s}{h_1} (b - b_2)^2 \right). \end{aligned} \quad (4.61)$$

В области S_{12} , с границам (4.42):

$$S_{12} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 + r_2 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right\}.$$

Воспользуемся системой уравнений краевой задачи (4.12–4.14). При граничных условиях:

$$\begin{aligned} x = a, u &= 0, \\ (v \equiv 0 \text{ скорость течения в направлении оси } Oy,) & \\ x = a_1 + r_2, p &= 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.62)$$

Уравнение (4.12) квазистатического равновесия примет вид $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а уравнение (4.13) запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$, решением которого будет соотношение

$p = -\frac{2\tau_s}{h_1}y + C_{112}$. Очевидно, с учетом граничных условий (4.62), определим давление на контактной поверхности в рассматриваемой подобласти:

$$p_{S_{12}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a). \quad (4.63)$$

Из условия несжимаемости (4.14) выразим компоненту скорости течения в направлении оси Oy в подобласти $u_{12} = -\frac{1}{h_1(t)}\frac{dh_1}{dt}x + C_{121}$. Еще раз обратимся к граничным условиям (4.62) для вычисления произвольной постоянной интегрирования $C_{121} = \frac{1}{h_1(t)}\frac{dh_1}{dt}a$, что приведет нас к выражению для компоненты вектора скорости течения в направлении оси Oy в рассматриваемой подобласти:

$$v_{12} = -\frac{1}{h_1(t)}\frac{dh_1}{dt}(x - a). \quad (4.64)$$

Найдем силу деформирования в подобласти S_{12} двойным интегрированием контактного давления по её площади:

$$P_{S_{12}}^{(1)} = \iint_{S_{12}} p_{S_{12}}(x) dx dy = \int_0^{b_1-r_1} dy \int_{a_1+r_2}^a (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a)) dx$$

и окончательно:

$$P_{S_{12}}^{(1)} = (b_1 - r_1)(2\tau_s(a - (a_1 + r_2))) + \frac{\tau_s}{h_1}(a - (a_1 + r_2))^2. \quad (4.65)$$

Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в области S_{13} . Разобьем эту область (см. рис. 4.7) на три подобласти и обозначим их соответственно S_{131} , S_{132} , S_{133} , как показано на рис. 4.8, т.е. область является объединением указанных подобластей: $S_{13} = S_{131} \cup S_{132} \cup S_{133}$.

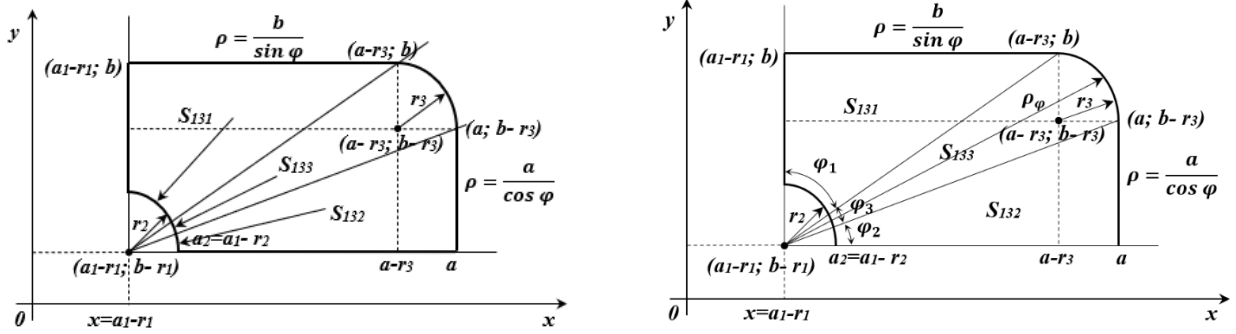
Переменные параметры, участвующие в описании границ подобластей, описаны следующими неравенствами:

$$S_{131} = \begin{cases} \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ r_2 \leq \rho \leq \frac{b}{\sin \varphi} \end{cases}, \quad (4.66)$$

$$S_{132} = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)}, \\ r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \varphi} \end{cases}, \quad (4.67)$$

$$S_{133} = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1}, \\ r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \end{cases}, \quad (4.68)$$

где ρ_φ будет вычислено отдельно.



а)

б)

Рис. 4.8. Схема разбиения подобласти S_{13} : a – направления течения материала; b – геометрические параметры области

Опишем аналитически границу области S_{133} , представляющую собой часть окружности радиуса r_3 с центром в точке с координатами $(a - r_3, b - r_3)$:

$$(x - (a - r_3))^2 + (y - (b - r_3))^2 = r_3^2.$$

Воспользуемся полярной системой координат и сделаем замену переменных:

$$x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi.$$

Подставим новые переменные в уравнение окружности. В этом случае уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2\rho(a - r_3)\cos\varphi + (a - r_3)^2 - 2\rho(b - r_3)\sin\varphi + (b - r_3)^2 &= r_3^2, \\ \rho^2 - 2\rho((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) + ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2) &= 0. \end{aligned}$$

Выделим полный квадрат из квадратного трехчлена

$$\begin{aligned} \rho^2 - 2\rho((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) + ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 - \\ - ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 + ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2) &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left(\rho - ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) \right)^2 - ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 + \\ & + ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2) = 0. \end{aligned}$$

В этом случае уравнение части внешней границы подобласти S_{133} задается уравнением

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) + \\ & + \sqrt{((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 - ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2)}. \end{aligned} \quad (4.69)$$

В области S_{131}

$$tg\varphi = \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \Rightarrow \varphi = \arctg \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1}.$$

Уравнения краевой задачи в этой области в полярной системе координат имеют вид

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\rho}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (4.70)$$

$$\frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{v_\varphi}{\sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2}}. \quad (4.71)$$

Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке $(a - r_1, b - r_1)$. Условие несжимаемости в полярной системе координат имеет вид

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{\partial v_\varphi}{\rho \partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (4.72)$$

$\lambda(t) = \ln \left(\frac{h_0}{h_1(t)} \right)$ – степень деформации по Ильюшину А. А.:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt}.$$

Заметим, что во всей области S_{13} угловая компонента вектора скорости $v_\varphi \equiv 0$. Это означает, что условие несжимаемости будет иметь вид

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1(t)} \cdot \frac{dh_1}{dt} = 0. \quad (4.73)$$

Граничные условия в области S_{131} запишутся:

$$\text{при } \rho = \frac{b}{\sin\varphi}, v_\varphi = 0; \quad (4.74)$$

$$\text{при } \rho = 0, p = 2\tau_s.$$

Используя эти граничные условия, найдем решения исходной системы (4.70) – (4.71), имеющей в этой области следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0; \quad (4.75)$$

Давление на контактной поверхности в пределах подобласти:

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_1}x + C_{131}. \quad (4.76)$$

Подставив граничные условия для подобласти (4.74) в уравнение (4.76), найдем $C_{131} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1}a_0$ и давление на контакте:

$$p_{S_{13}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_0), \quad (4.77)$$

а также компоненту вектора скорости течения по радиусу находим из условия несжимаемости. Условие несжимаемости в виде (4.72) является линейным дифференциальным уравнением первого порядка. Найдем решение этого уравнения с помощью метода вариации произвольных постоянных.

$$v = -\frac{\rho^2}{2h} \frac{dh}{dt} + C \Rightarrow$$

Это означает, что радиальная компонента вектора скорости перемещения

$$v_\rho = \frac{C}{\rho} - \frac{\rho}{h_1} \frac{dh_1}{dt}.$$

Найдем постоянную интегрирования из граничного условия. Легко видеть, что

$$C = -\frac{b^2}{2\sin^2\varphi h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}.$$

Тогда радиальная компонента вектора скорости перемещения примет окончательно вид

$$v_\rho = -\frac{b^2}{2\sin^2\varphi \rho h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} - \frac{\rho}{h_1} \frac{dh_1}{dt}$$

или

$$v_\rho = -\frac{1}{2h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} \left(\frac{b^2}{\rho \sin^2 \varphi} + \rho \right). \quad (4.78)$$

Находим суммарную силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{131} , вычислив двойной интеграл от давления в пределах границ подобласти пластического течения:

$$\begin{aligned} P_{S_{131}} &= \iint_{S_{131}} p(x) \rho d\rho d\varphi = \int_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{r_2}^{\frac{b}{\sin \varphi}} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2)) \rho d\rho = \quad (4.79) \\ &= \int_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{\rho^3}{3} + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \rho^2 \right) \Big|_{r_2}^{\frac{b}{\sin \varphi}} d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\tau_s \left(1 + \frac{r_2}{h_1} \right) b^2 \frac{1}{\sin^2 \varphi} - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{b^3}{3} \frac{1}{\sin^3 \varphi} - \tau_s r_2^2 + \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{r_2^3}{3} - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \right) d\varphi = \\ &= -\tau_s \left(1 + \frac{r_2}{h_1} \right) b^2 \operatorname{ctg} \varphi \Big|_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2\tau_s}{3h_1} b^2 \int_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin^3 \varphi} - \\ &\quad - \tau_s r_2^2 \varphi \Big|_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{r_2^3}{3} \varphi \Big|_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Окончательно

$$\begin{aligned} P_{S_{131}} &= \left(1 + \frac{r_2}{h_1} \right) b^2 \frac{1}{\operatorname{tg} \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} - \\ &\quad - \frac{2\tau_s}{3h_1} b^2 \left(-\frac{\cos \varphi}{2\sin^2 \varphi} + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right| \right) \Big|_{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}}^{\frac{\pi}{2}} - \\ &\quad - \tau_s r_2^2 \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1} \right) + \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{r_2^3}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1} \right). \end{aligned}$$

После упрощения получаем

$$\begin{aligned}
 P_{S_{131}} = & \left(1 + \frac{r_2}{h_1}\right) b^2 \frac{b_1 - r_1}{(a - a_1) - (r_3 - r_1)} - \\
 & - \frac{2\tau_s}{3h_1} b^2 \left(\frac{(b_1 - r_1) \sqrt{(b_1 - r_1)^2 + ((a - a_1) - (r_3 - r_1))^2}}{((a - a_1) - (r_3 - r_1))^2} + \right. \\
 & + \frac{3}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right| \left. \right) - \tau_s r_2^2 \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right) + \\
 & + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \right).
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

Перейдем к рассмотрению пластической области S_{132} с границами (4.67):

$$S_{132} = \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)}, \\ r_2 \leq \rho \leq \frac{a}{\cos \varphi} \end{cases},$$

Граничные условия в этой области принимают вид

$$\begin{aligned}
 \rho = \frac{a}{\cos \varphi}, v_\rho = 0; \\
 \rho = r_2, p = 2\tau_s.
 \end{aligned} \tag{4.81}$$

Используя эти граничные условия, найдем решения исходной системы (4.70) – (4.71), имеющей в этой области следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0. \tag{4.82}$$

Решив эту систему и найдя постоянную интегрирования, получаем давление на контактной поверхности

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1} (\rho - r_2). \tag{4.83}$$

С учетом условия несжимаемости (4.73):

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} = 0,$$

решая которое, будет найдена радиальная компонента вектора скорости:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{a^2}{\rho \cos^2 \varphi} + \rho \right). \quad (4.84)$$

Силу деформирования, которая приходится на подобласть S_{132} , найдем с помощью интегрирования контактного давления по подобласти:

$$\begin{aligned} P_{S_{132}} &= \iint_{S_{14}} p_{S_{132}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} d\varphi \int_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2)) \rho d\rho \quad (4.85) \\ &= \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} \left(\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{\rho^3}{3} + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \rho^2 \right) \Big|_{r_2}^{\frac{a}{\cos \varphi}} d\varphi = \\ &= \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} \left(\tau_s \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{a^3}{3 \cos^3 \varphi} + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \frac{a^2}{\cos^2 \varphi} - \tau_s r_2^2 + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \right) d\varphi \\ &= \tau_s a^2 \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} - \frac{2\tau_s a^3}{h_1} \frac{1}{3} \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi} + \\ &\quad + \frac{\tau_s r_2 a^2}{h_1} \operatorname{tg} \varphi \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} - \\ &\quad - \tau_s r_2^2 \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}. \end{aligned}$$

Для $P_{S_{132}}$

$$\begin{aligned} P_{S_{132}} &= \tau_s a^2 \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \frac{2\tau_s a^3}{h_1} \frac{1}{3} \left(\frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| \right) \Big|_0^{\operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}} + \\ &\quad + \frac{\tau_s r_2 a^2}{h_1} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \tau_s r_2^2 \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} + \\ &\quad + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)} - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}. \end{aligned}$$

И окончательно получим

$$\begin{aligned}
 P_{S_{132}} = & \tau_s a^2 \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} - \frac{2\tau_s}{h_1} - \\
 & - \frac{2\tau_s a^3}{h_1} \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \sqrt{1 + \left(\frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \right)^2} + \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} + \frac{\pi}{4}}{2} \right) \right| \right) + \\
 & + \frac{\tau_s r_2 a^2}{h_1} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} - \tau_s r_2^2 \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} + \frac{2\tau_s r_2^3}{h_1} \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} - \\
 & - \frac{\tau_s r_2^3}{h_1} \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)}. \tag{4.86}
 \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению пластической области S_{133} с границами (4.68):

$$S_{133} = \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{arctg} \frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \leq \varphi \leq \operatorname{arctg} \frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} \\ r_2 \leq \rho \leq \rho_\varphi \end{array} \right.$$

Граничные условия в этой области принимают вид

$$\rho = \rho_\varphi, v_\rho = 0; \tag{4.87}$$

$$\rho = r_2, \quad p = 2\tau_s,$$

где

$$\begin{aligned}
 \rho_\varphi = & ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) + \\
 & + \sqrt{((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 - ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2)}.
 \end{aligned}$$

Используя эти граничные условия, найдем решения исходной системы (4.70) – (4.71), имеющей в этой области следующий вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\rho \partial \varphi} = 0. \tag{4.88}$$

Решив эту систему и найдя постоянную интегрирования, получаем давление на контактной поверхности

$$p_{133} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2). \tag{4.89}$$

Из условия несжимаемости (4.73) получим радиальную компоненту вектора скорости перемещения

$$v_\rho = \frac{c}{\rho} - \frac{\rho}{h_1} \frac{dh_1}{dt}.$$

Используя граничное условие (4.87), находим постоянную интегрирования c и, соответственно, радиальную скорость:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(\frac{\rho_\varphi^2}{\rho} - \rho \right). \quad (4.90)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{133} , найдем интегрированием вычисленного контактного давления по площади подобласти:

$$\begin{aligned} P_{S_{133}} &= \iint_{S_{133}} p_{S_{133}} \rho d\rho d\varphi = \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} d\varphi \int_{r_2}^{\rho_\varphi} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_2) \right) \rho d\rho = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{\rho^3}{3} + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \rho^2 \right) \Big|_{r_2}^{\rho_\varphi} d\varphi = \\ &= \int_{\arctg \frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\arctg \frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (\rho_\varphi^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (\rho_\varphi^3 - r_2^3) \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.91)$$

Для дальнейшего интегрирования рассмотрим отдельно функцию ρ_φ . Эта функция содержит различные нелинейные комбинации тригонометрических функций, поэтому необходимы дальнейшие упрощения.

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= ((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi) + \\ &+ \sqrt{((a - r_3)\cos\varphi + (b - r_3)\sin\varphi)^2 - ((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2)}. \end{aligned}$$

Преобразуем сочетания тригонометрических функций с помощью стандартных тригонометрических соотношений

$$\begin{aligned} \rho_\varphi &= \sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2} \left(\frac{(a - r_3)}{\sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2}} \cos\varphi + \frac{(b - r_3)}{\sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2}} \sin\varphi \right) + \\ &+ \left(((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2) \left(\frac{(a - r_3)}{\sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2}} \cos\varphi + \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{(b - r_3)}{\sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2}} \sin \varphi \Big)^2 - \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} \Big).$$

В этом случае сумму тригонометрических функций можно свернуть с помощью формулы синуса суммы двух аргументов:

$$\rho_\varphi = \sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2} \sin \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) + \left(\left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 \right) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) - \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Возведем в квадрат левую и правую части последнего соотношения. В результате упрощений получим следующее соотношение:

$$\rho_\varphi^2 = 2 \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 \right) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) + 2 \sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2} \sin \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) \cdot \left(\left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 \right) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) - \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right)^{\frac{1}{2}} - \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right) \right).$$

Заменим второе слагаемое на эквивалентное с учетом бесконечно малых выражений. Получим приближенное значение для функции ρ_φ^2 , где $\alpha_2(\varphi)$ и $\alpha_3(\varphi)$ бесконечно малые функции более высокого порядка

$$\rho_\varphi^2 = 4 \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 \right) \sin^2 \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) + 2 \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right) + \alpha_2(\varphi).$$

Проведем подобные преобразования для вычисления функции ρ_φ^3 и пренебрежем малыми величинами. В результате получим:

$$\rho_\varphi^3 = 2\sqrt{2} \left(\sqrt{(a - r_3)^2 + (b - r_3)^2} \sin \left(\varphi + \arctg \frac{(a - r_3)}{(b - r_3)} \right) \right)^3 - 2\sqrt{2} \left((a - r_3)^2 + (b - r_3)^2 - r_3^2 \right)^{\frac{3}{2}} + \alpha_3(\varphi).$$

В выражениях для ρ_φ^2 и ρ_φ^3 заменим значения

$$\sin\left(\varphi + \operatorname{arctg}\frac{(a - r_3)}{(b - r_3)}\right)$$

единицей. Эта замена возможна, так как значение аргумента приближается к $\frac{\pi}{2}$. Тогда выражение для вычисления силы деформирования в подобласти S_{133} примет следующий вид

$$P_{S_{133}}^{(1)} = \int_{\operatorname{arctg}\frac{b-r_3}{a-(a_1-r_1)}}^{\operatorname{arctg}\frac{(a-a_1)-(r_3-r_1)}{b_1-r_1}} \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a - r_3)^2 + 2(b - r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a - r_3)^3 + (b - r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right) d\varphi.$$

После интегрирования и подстановки пределов интегрирования получаем значение для силы деформирования в данной подобласти

$$P_{S_{133}}^{(1)} = \left(\operatorname{arctg}\frac{(a - a_1) - (r_3 - r_1)}{b_1 - r_1} - \operatorname{arctg}\frac{b - r_3}{a - (a_1 - r_1)} \right) \cdot \left(\left(\tau_s + \frac{\tau_s r_2}{h_1} \right) (2(a - r_3)^2 + 2(b - r_3)^2 - 2r_3^2 - r_2^2) - \frac{2\tau_s}{3h_1} (2\sqrt{2}((a - r_3)^3 + (b - r_3)^3 - 2r_3^3) - r_2^3) \right). \quad (4.92)$$

Необходимо заметить, что выражение (4.92) дает приближенное значение для силы деформирования в области S_{133} . Такой результат можно считать допустимым для инженерных расчетов в силу малости этой области. В реальных поковках эта область может выродиться в линию раздела течений. В дальнейшем исследовании этот случай рассмотрен и для него получено точное аналитическое решение.

Применим рассмотренный алгоритм решения краевой задачи, описанной системой дифференциальных уравнений (4.70) – (4.72), к пластической области поковки фланца S_2 , в состав которой входят подобласти с характерным течением металла

$$S_2(x, y) = \bigcup_{j=1}^4 S_{2j}(x, y).$$

Начнем с подобласти S_{21} , имеющей линейные границы (4.52):

$$S_{21} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_1 - b_1 \\ 0 \leq y \leq b_1 \end{array} \right\}.$$

Рассмотрим граничные условия в подобласти, где при $x = 0$ на жесткой границе компонента вектора скорости течения в направлении оси Ox $u \equiv 0$.

$$\begin{aligned} y = 0, v = 0, \\ y = b_1, p = 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.93)$$

На границе канала $y = b_1$, формирующего участок контурного ребра, при затекании в него металла контактное давление $p = 2\tau_s$ достигает максимального значения. При этих условиях уравнения системы (4.70) – (4.71) относительно неизвестного давления примут вид

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_2}.$$

Решая второе, определим давление на контакте с инструментом

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_2}y + C_{212}.$$

С помощью граничных условий найдем постоянную C_{212} , а значит и контактное давление в подобласти S_{21} :

$$p_{S_{21}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y - b_1). \quad (4.94)$$

Из уравнения несжимаемости (4.72) компонента вектора скорости течения в направлении оси Oy будет иметь вид:

$$v = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} y + C_{212}.$$

Исходя из граничных условий (4.93), $C_{212} = 0$, тогда компоненту вектора скорости течения в направлении оси Oy представим в виде зависимости:

$$v_{S_{21}} = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} y. \quad (4.95)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{21} , вычислим двойным интегрированием контактного давления по площади:

$$P_{S_{21}} = \iint_{S_{21}} p_{S_{21}}(x) dx dy = \iint_{S_{21}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y - b_1) \right) dx dy = \quad (4.96)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{a_1-b_1} dx \int_0^{b_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y - b_1)\right) dy = \\
 &= \int_0^{a_1-b_1} \left(2\tau_s b_1 + \frac{2\tau_s}{2h_2}(b_1)^2\right) dx = (a_1 - b_1) \left(2\tau_s b_1 + \frac{2\tau_s}{2h_2}(b_1)^2\right).
 \end{aligned}$$

В следующей подобласти S_{22} с границами, определенными неравенствами (4.53):

$$S_{22} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} y + a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 \\ 0 \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right.$$

с граничными условиями при $x = y + a_1 - b_1$ компонента скорости $u = 0$ и компонента скорости течения в направлении оси Oy $v \equiv 0$, при $x = a_1$ т.е. на границе канала, в который затекает металл с образованием ребра жёсткости, контактные давления $p = 2\tau_s$ максимальны. Уравнения краевой задачи (1.70) и (1.71) в этой области имеют вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_2}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Решением первого уравнения будет давление на контактной поверхности

$$p_{S_{22}}(x) = -\frac{2\tau_s}{h_2}(x - a_1) + C_{221}.$$

С помощью граничных условий в подобласти определяем постоянную интегрирования $C_{221} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_2}a$ и определяем давление на контактной поверхности инструмента с подобластью S_{22} :

$$p_{S_{22}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(x - a_1). \quad (4.97)$$

При подстановке в условие несжимаемости (4.72) граничных условий, определенных для подобласти, находим компоненту вектора скорости течения в направлении оси Ox

$$u_{S_{22}} = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} y + C_{222}, \text{ где } C_{222} = \frac{a}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} (y + a_1 - b_1).$$

Откуда скорость в подобласти S_{22} :

$$u_{S_{22}} = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} (x - y - (a_1 - b_1)). \quad (4.98)$$

Сила деформирования в подобласти, приходящаяся на подобласть S_{22} :

$$\begin{aligned} P_{S_{22}} &= \iint_{S_{22}} p_{S_{22}}(x) dx dy = \iint_{S_{22}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2} (x - a_1) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{b_1 - r_1} \left(2\tau_s(x - a_1) - \frac{\tau_s}{h_2} (x - a_1)^2 \right) \Big|_{y + a_1 - b_1}^{a_1} dy = \\ &= \int_0^{b_1 - r_1} \left(-2\tau_s(y - b_1) + \frac{\tau_s}{h_2} (y - b_1)^2 \right) dy = \\ &= -\tau_s(y - b_1)^2 + \frac{\tau_s}{3h_2} (y - b_1)^3 \Big|_0^{b_1 - r_1} = \tau_s(r_1^2 - b_1^2) - \frac{\tau_s}{3h_2} (r_1^3 - b_1^3). \end{aligned} \quad (4.99)$$

Подобласть S_{23} ограничена линейными участками в соответствии с условиями (4.54)

$$S_{23} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 - r_1 \\ x - (a_1 - b_1) \leq y \leq b_1 \end{array} \right.$$

В подобласти в соответствии с расчетной схемой (см. рис. 4.6) приняты следующие граничные условия:

$$\text{при } y = x - (a_1 - b_1), v = 0, (u \equiv 0),$$

скорость течения в направлении оси Ox , на линии $y = b_1$, являющейся горизонтальной границей канала, в котором затекающий металл образует ребро жёсткости, возникают максимальные контактные давления $p = 2\tau_s$. Принимая сказанное во внимание, преобразуем уравнения равновесия (4.70) и (4.71) к виду

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_2}.$$

Решением второго уравнения является выражение для давления на контактной поверхности:

$$p_{S_{23}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2} (y - b_1). \quad (4.100)$$

Уравнение несжимаемости (4.72) поможет определить скорость течения в направлении оси Oy

$$v = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} y + C_{232},$$

постоянную интегрирования определим из граничных условий на контуре

$$C_{232} = \frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} (x - (a_1 - b_1)).$$

Теперь можно определить составляющую вектора скорости в направлении оси Oy :

$$v_{S_{23}} = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2(t)}{dt} (y - x + (a_1 - b_1)). \quad (4.101)$$

Силовые параметры деформирования для подобласти S_{23} определим по принятому алгоритму решения:

$$\begin{aligned} P_{S_{23}} &= \iint_{S_{23}} p_{S_{23}}(x) dx dy = \iint_{S_{23}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2} (y - b_1) \right) dx dy = \\ &= \int_{a_1 - b_1}^{a_1 - r_1} dx \int_{x - (a_1 - b_1)}^{b_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2} (y - b_1) \right) dy = \\ &= \int_{a_1 - b_1}^{a_1 - r_1} \left(2\tau_s y + \frac{\tau_s}{h_2} (y - b_1)^2 \right) \Big|_{x - (a_1 - b_1)}^{b_1} dx = \int_{a_1 - b_1}^{a_1 - r_1} \left(2\tau_s (-x + a_1) + \frac{\tau_s}{h_2} (x - a_1)^2 \right) dx = \\ &= -\tau_s (x - a_1)^2 \Big|_{a_1 - b_1}^{a_1 - r_1} - \frac{\tau_s}{3h_2} (x - a_1)^3 \Big|_{a_1 - b_1}^{a_1 - r_1} = \tau_s ((r_1)^2 - (b_1)^2) - \frac{\tau_s}{3h_2} ((r_1)^3 - (b_1)^3). \end{aligned} \quad (4.102)$$

Перейдем к рассмотрению подобласти S_{24} , границы которой описаны соотношениями (4.55):

$$S_{24} = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ -\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 - r_1 \leq x \leq a_1 \\ (x, y): b_1 - r_1 \leq y \leq b_1 - r_1 + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_1 - r_1))^2} \end{cases}$$

В соответствии с принятой моделью течения металла, линии тока образуют пучок лучей, берущих начало в точке $(a_1 - r_1, b_1 - r_1)$ и при значении радиуса $\rho = 0$ угловая компонента вектора скорости $v_\varphi = 0$, при $\rho = r_1$ на границе канала, в который затекает металл, образуя ребро жесткости, контактное давление достигает максимального значения $p = 2\tau_s$. Подставляя граничные условия для подобласти в

уравнения (4.70) $\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$ и (4.71) $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, решается первое уравнение относительно искомого давления на контактной поверхности

$$p(\rho, \varphi) = -\frac{2\tau_s}{h_2}\rho + C_{241},$$

после определения произвольной постоянной интегрирования $2\tau_s = -\frac{2\tau_s}{h_2}r_1 + C_{124}$

или $C_{241} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_2}r_1$, найдем давление на контактной поверхности:

$$p(\rho, \varphi) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(\rho - r_1). \quad (4.103)$$

Проинтегрируем условие несжимаемости (4.72), записанное в полярной системе координат, с учетом граничных условий:

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_2} \frac{dh_2(t)}{dt} = 0. \quad (4.104)$$

Для интегрирования (4.104) воспользуемся методом вариации произвольных постоянных

$$v(\rho) = -\frac{\rho^2}{2h_2} \frac{dh_2}{dt} + C.$$

Очевидно, что в данном случае $C=0$. Радиальная компонента вектора скорости

$$v(\rho) = -\frac{\rho}{2h_2} \frac{dh_2}{dt}. \quad (4.105)$$

Сила деформирования в подобласти, приходящаяся на подобласть S_{24} :

$$\begin{aligned} P_{S_{24}} &= \iint_{S_{24}} P(\rho, \varphi) \rho \, d\rho d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(\rho - r_1)\right) \rho d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{2\tau_s}{2} r_1^2 - \frac{2\tau_s}{h_2} \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{r_1} + \frac{2\tau_s r_1}{h_2} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{r_1} \right) = \left(2\tau_s r_1^2 + \frac{1}{3} \frac{2\tau_s r_1^3}{h_2} \right) \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.106)$$

Суммарная сила деформирования четверти двухсвязной области

$$P_\Sigma = \sum_{i,j}^n P_{S_{ij}}. \quad (4.107)$$

И, окончательный результат для двухсвязной области

$$P_{\text{фл}} = 4 \cdot \sum_{i=1}^7 P_{S_i}$$

4.3 Математическая модель решения аналога задачи Л. Прандтля применительно к квази-прямоугольному телу с ребрами жесткости, занимающему многосвязную область

4.3.1 Объект исследования и расчетная схема

Будем использовать математическую модель в постановке «идеальной жидкости» для анализа технологических параметров штамповки поковки прямоугольного фланца с ребрами жесткости, изображенную на рис. 4.9 и имеющую габаритные размеры 130×90×26 мм [224, 228, 229] и занимающую многосвязную область. Металл поковки – алюминиевый сплав АМц ГОСТ 4784-2019 [216].

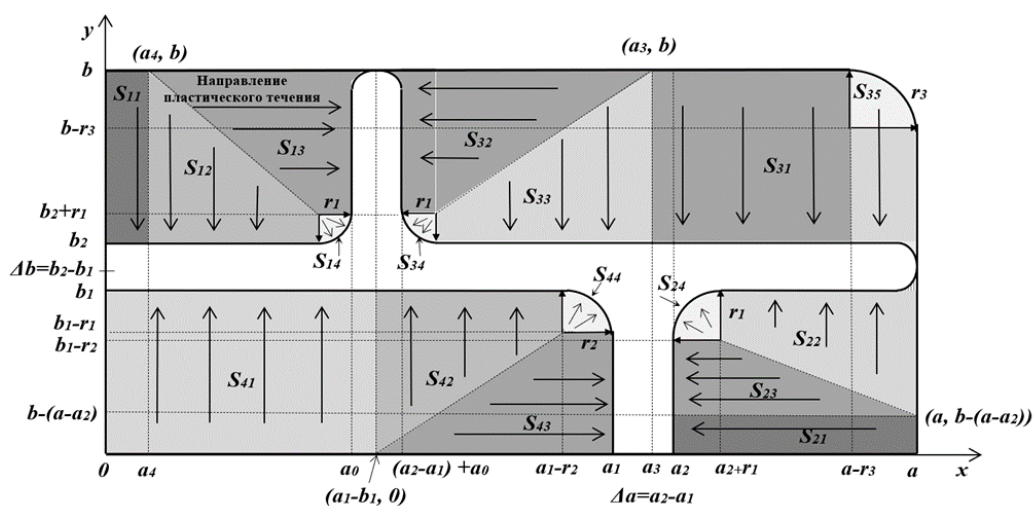
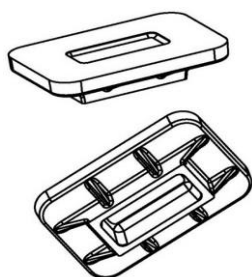


Рис. 4.9.

Многосвязная
область течения

Рис. 4.10. Расчетная схема многосвязной области

В соответствии с принятой расчетной схемой оси выбранной системы координат совпадают с осями симметрии многосвязной области, поэтому ограничимся рассмотрением первого квадранта (рис. 4.10). Разобьем четверть области на подобласти S_{ij} с характерным течением металла, обозначенного стрелками, дополнительно выделив радиусные участки. Координаты характерных точек по оси Ox обозначим – a , по оси Oy – b .

4.3.2 Границы выделенных пластических областей с характерным течением материала

Начнем рассмотрение с внешних областей. Обозначенная как $S_1(x, y)$, состоит из четырех подобластей с характерным течением металла:

$$S_1 = \bigcup_{j=1}^4 S_{1j}(x, y) \quad (4.108)$$

Границы выделенных подобластей S_{11} , S_{12} и S_{13} состоят их отрезков прямых, поэтому координаты точек, расположенных на этих прямых, могут быть вычислены следующим образом:

$$y - b = -(x - a_4) \text{ или } x = -y + (b + a_4). \quad (4.109)$$

Представим границы подобластей следующими неравенствами (4.110) – (4.112):

$$S_{11} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_4; \\ b_2 \leq y \leq b; \end{array} \right. \quad (4.110)$$

$$S_{12} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_4 \leq x \leq a_0 - r_1; \\ b_2 \leq y \leq -x + (b + a_4); \end{array} \right. \quad (4.111)$$

$$S_{13} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} -y + (b + a_4) \leq x \leq a_0; \\ b_2 + r_1 \leq y \leq b \end{array} \right. \quad (4.112)$$

Подобласть S_{14} ограничена дугой окружности радиусом r_1 с центральным углом $\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 4.4).

Для вычисления координат точек границы составим уравнение окружности, согласно схеме на рис. 4.4, и решим его относительно y по аналогии с (4.11):

$$\begin{aligned} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 &= R^2, \\ (y - y_0)^2 - (R^2 - (x - x_0)^2) &= 0, \\ y &= y_0 \pm \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}, \quad y = y_0 - \sqrt{R^2 - (x - x_0)^2}. \end{aligned}$$

Отсюда границу подобласти S_{14} представим неравенствами (4.113):

$$S_{14} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \end{array} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x - (a_0 - r_1))^2 + (y - (b_2 + r_1))^2 \leq r_1^2 \\ a_0 - r_1 \leq x \leq a_0 \\ b_2 \leq y \leq (b_2 + r_1) - \sqrt{r_1^2 - (x - (a_0 - r_1))^2} \end{array} \right. \right. \quad (4.113)$$

Перейдем к области $S_2(x, y)$, состоящей также из четырех подобластей с характерным течением металла:

$$S_2 = \bigcup_{j=1}^4 S_{2j}(x, y) \quad (4.114)$$

Для обоснования границ подобластей S_{22} и S_{23} рассмотрим уравнение прямой (4.115) для вычисления координат (x, y) точек, расположенных на этой прямой:

$$\begin{aligned} y - (b - (a - a_2)) &= -(x - a), \\ y &= -x + a + b - a + a_2, \\ y &= -x + b + a_2, \text{ или } x = -y + b + a_2, \end{aligned} \quad (4.115)$$

Воспользовавшись схемой (см. рис. 4.4), составим уравнение окружности (4.116), являющейся границей подобласти S_{24} :

$$(x - (a_2 - r_1))^2 + (y - (b_1 + r_1))^2 = r_1^2. \quad (4.116)$$

Теперь можно представить границы подобластей области течения $S_2(x, y)$ следующими неравенствами (4.117) – (4.120):

$$S_{21} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_2 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b - (a - a_2) \end{array} \right\}; \quad (4.117)$$

$$S_{22} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_2 + r_1 \leq x \leq a \\ -x + b + a_2 \leq y \leq b_1 \end{array} \right\}; \quad (4.118)$$

$$S_{23} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_2 \leq x \leq -y + b + a_2 \\ b - (a - a_2) \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right\}; \quad (4.119)$$

$$S_{24} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} (x - (a_2 - r_1))^2 + (y - (b_1 + r_1))^2 = r_1^2 \\ 0 \leq \rho \leq r_1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq -\frac{3\pi}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \quad (4.120)$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} b - r_1 \leq y \leq (b_1 - r_1) + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_2 + r_1))^2} \\ a_2 \leq x \leq a_2 + r_1 \end{array} \right.$$

При разбиении области $S_3(x, y)$ на подобласти с характерным течением металла $S_3 = \bigcup_{j=1}^5 S_{3j}(x, y)$ учтем, что, согласно расчетной схеме (см. рис. 4.10), три из них имеют линейные границы, которые могут быть представлены по аналогии с предыдущей областью неравенствами (4.121 – 4.123):

$$S_{31} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_3 \leq x \leq a - r_3; \\ b_2 \leq y \leq b \end{array} \right.; \quad (4.121)$$

$$S_{32} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_0 + (a_2 - a_1) + r_1 \leq x \leq y - b + a_3 \\ b_2 + r_1 \leq y \leq b \end{array} \right., \quad (4.122)$$

где

$$\Delta = b_2 - b_1; y - b = x - a_1; x = y - b + a_1.$$

$$S_{33} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_0 + (a_2 - a_1) + r_1 \leq x \leq y - b + a_3 \\ b_2 \leq y \leq x + b - a_3 \end{array} \right. \quad (4.123)$$

Подобласти S_{34} и S_{35} имеют границы в виде дуг окружностей радиусами r_1 и r_3 соответственно. Координаты точек, принадлежащих дугам окружностей, найдем по (4.124):

$$x = a_0 + (b_2 - b_1) + r_1 - \sqrt{r_1^2 - (y - (b_2 + r_1))^2} \leq x \leq a_0 + (b_2 - b_1) + r_1, \\ b_2 \leq y \leq b_2 + r_1, \quad (4.124)$$

$$(x - (a - r_3))^2 + (y - (b - r_3))^2 = r_3^2, y = (b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2}.$$

Представим границы подобластей рассматриваемой области течения неравенствами (4.125) и (4.126):

$$S_{34} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} (x - (a_0 + (a_2 - a_1) + r_1))^2 + (y - (b_2 + r_1))^2 = r_1^2 \\ 0 \leq \rho \leq r_1 \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{array} \right.; \quad (4.125)$$

$$S_{35} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_2 - r_3 \leq x \leq a \\ b_2 \leq y \leq (b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \end{array} \right. \quad (4.126)$$

Согласно расчетной схеме (см. рис. 4.10), осталось рассмотреть внутреннюю область $S_4(x, y)$. Область включает четыре подобласти (4.127):

$$S_4 = \bigcup_{j=1}^4 S_{4j}(x, y). \quad (4.127)$$

Подобласти, ограниченные отрезками прямых, с координатами точек, принадлежащих этим отрезкам,

$$y = x - (a_1 - b_1), \text{ или } x = y - (a_1 - b_1) \quad (4.128)$$

имеют границы, описанные неравенствами (4.129) – (4.131):

$$S_{41} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_0; \\ 0 \leq y \leq b_1; \end{array} \right. \quad (4.129)$$

$$S_{42} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 - r_2; \\ x - (a_1 - b_1) \leq y \leq b_1; \end{array} \right. \quad (4.130)$$

$$S_{43} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} y + (a_1 - b_1) \leq x \leq a_1; \\ 0 \leq y \leq b_1 - r_2. \end{array} \right. \quad (4.131)$$

Граница подобласти S_{44} в виде дуги окружности

$$(x - (a_1 - r_2))^2 + (y - (b_1 - r_2))^2 = r_2^2, \quad (4.132)$$

определяющаяся точками с координатами:

$$a_1 - r_2 \leq x \leq a_1, \quad a_1 - r_1 \leq y \leq (b_1 - r_2) + \sqrt{r_2^2 - (x - (a_1 - r_2))^2} \quad (4.133)$$

и описывается неравенствами (4.134):

$$S_{44} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} (x - (a_1 - r_2))^2 + (y - (b_1 - r_2))^2 = r_2^2 \\ 0 \leq \rho \leq r_2 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad (4.134)$$

4.3.3 Постановка краевой задачи в многосвязной области

Рассмотрим задачу об осадке пластического слоя в многосвязной области

$$S(x, y) = \bigcup_{i=1}^4 S_{ij}(x, y).$$

Поскольку решение будем искать, используя уже известную модель «идеальной жидкости», то уравнения краевой задачи останутся такими же, т.е. воспользуемся уравнениями (4.12 – 4.14):

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

4.3.4 Алгоритм решения краевой задачи в многосвязной области

Решение также как и в предыдущих случаях, будем представлять последовательно для каждой области пластического течения расчетной схемы (см. рис. 4.9) [224 - 231].

Внешняя область:

$$S_1(x, y) = \bigcup_{j=1}^4 S_{1j}(x, y)$$

объединяет четыре подобласти. Для подобласти

$$S_{11} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_4 \\ b_2 \leq y \leq b \end{array} \right.$$

граничными условиями являются:

$$\begin{aligned} y = b, v &= 0, \\ y = b_2, p &= 2\tau_s. \end{aligned} \tag{4.134}$$

Поскольку в подобласти компонента вектора скорости течения в направлении оси Ox равна $u \equiv 0$, то первое уравнение системы примет вид: $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а второе запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$, решая последнее, получим:

$$p_{11} = -\frac{2\tau_s}{h_1}y + C_{111}. \quad (4.135)$$

Воспользовавшись граничными условиями (4.134) при $y=b_2$ уравнение (4.135) примет вид $2\tau_s = -\frac{2\tau_s b_2}{h_1} + C_{111}$, тогда, найдя постоянную интегрирования $C_{111} = 2\tau_s(1 + \frac{b_2}{h_1})$, после подстановки в (4.135) получим давление на контактной поверхности:

$$p_{s_{11}}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2). \quad (4.136)$$

Условие несжимаемости (4.14) при тех же граничных условиях определится выражением $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}$, в правую часть которого подставим значение частной производной, полученное ранее (4.15):

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}.$$

Значение компоненты вектора скорости в направлении оси Oy в подобласти S_{11} :

$$v = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} y + C_{112}. \quad (4.137)$$

Воспользуемся граничными условиями (4.134) ($y = b, v = 0$):

$$C_{112} = \frac{b}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}.$$

Тогда компонента вектора скорости течения в направлении оси Oy подобласти S_{11} :

$$v_{11} = -\frac{1}{h_1(t)}(y - b) \frac{dh_1}{dt}. \quad (4.138)$$

Проинтегрировав контактное давление по площади подобласти S_{11} находим силу деформирования:

$$\begin{aligned} P_{S_{11}}^{(1)} &= \iint_{S_{11}} p_{s_{11}}(y) dx dy = \int_0^{a_4} dx \int_{b_2}^b \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2) \right) dy = \\ &= \int_0^{a_4} \left((2\tau_s(b - b_2)) - \frac{2\tau_s}{2h_1}(y - b_2)^2 \Big|_{b_2}^b \right) dx = \\ &= 2\tau_s(b - b_2)a_4 - \frac{\tau_s}{h_1}(b - b_2)^2. \end{aligned} \quad (4.139)$$

В области S_{12} , с границам (4.111).

$$S_{12} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} a_4 \leq x \leq a_0 - r_1 \\ b_2 \leq y \leq -x + (b + a_4) \end{array} \right\}.$$

Воспользуемся той же системой уравнений краевой задачи (4.12 – 4.14). В соответствии с расчетной схемой (см. рис. 4.9) примем следующие условия на контуре:

$$\begin{aligned} y = -x + (b + a_1), v = 0 \quad (u \equiv 0), \\ y = b_2, p = 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.140)$$

Уравнение (4.12) квазистатического равновесия примет вид $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, а уравнение (4.13) запишется $\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$, решением которого будет соотношение $p = -\frac{2\tau_s}{h_1}y + C_{112}$. Очевидно, с учетом условий (4.140) на контуре, определим давление на контактной поверхности в рассматриваемой подобласти:

$$p_{S_{12}}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2). \quad (4.141)$$

Из уравнения несжимаемости (4.14) выразим компоненту вектора скорости течения в подобласти

$$v_{12} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} y + C_{122},$$

Еще раз используем условия на контуре (4.140) для вычисления произвольной постоянной интегрирования

$$C_{122} = \frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} (-x + (b + a_4)).$$

Подстановкой постоянной интегрирования в выражение компоненты вектора скорости течения в направлении оси Oy получим соотношение:

$$v_{12} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} ((y + x) - (b + a_4)). \quad (4.142)$$

Найдем силу деформирования в подобласти S_{12} с помощью двойного интеграла контактного давления по её площади:

$$\begin{aligned}
 P_{S_{12}}^{(1)} &= \iint p_{S_{12}}(y) dx dy = \int_{a_4}^{a_0-r_1} dx \int_{b_2}^{-x+(b+a_4)} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y-b_2) \right) dy - \\
 &- \int_{a_4}^{a_0-r_1} dx \left(2\tau_s(-x+b+a_4-b_2) - \frac{2\tau_s}{2h_1}(y-b_2)^2 \right) \Big|_{b_2}^{-x+(b+a_4)} = \\
 &= -2\tau_s \frac{(-x+b+a_4-b_2)^2}{2} \Big|_{a_4}^{a_0-r_1} - \frac{\tau_s}{3h_1} (-x+(b+a_4)-b_2)^3 \Big|_{a_4}^{a_0-r_1} = \quad (4.143) \\
 &= -\tau_s (-x+b+a_4-b_2)^2 \Big|_{a_4}^{a_0-r_1} + \frac{\tau_s}{3h_1} (-a_0+r_1+(b+a_4)-b_2)^3 - \\
 &\quad - \frac{\tau_s}{3h_1} ((b+a_4)-b_2)^3
 \end{aligned}$$

и окончательно:

$$\begin{aligned}
 P_{S_{12}}^{(1)} &= \tau_s (b-b_2)^2 - \tau_s (a_4 - a_0 + r_1 + b - b_2)^2 + \\
 &+ \frac{\tau_s}{3h_1} ((a_4 - a_0 + r_1 + b - b_2)^3 - (a_4 + b - b_2)^3). \quad (4.144)
 \end{aligned}$$

Перейдем к подобласти S_{13} с границами (4.112):

$$S_{13} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} -y + (b - a_4) \leq x \leq a_0 \\ b_2 + r_1 \leq y \leq b \end{array} \right. .$$

Здесь $x = -y + b - a_4$ линия раздела течения, вдоль которой $v = 0$ и $x = a_0$, $p = 2\tau_s$. Используя условия на контуре, преобразуем исходную систему уравнений к следующему виду:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{dl}{dt}. \quad (4.145)$$

Давление на контактной поверхности в пределах подобласти:

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_1} x + C_{131}. \quad (4.146)$$

Подставив условия на контуре подобласти в (4.146), найдем постоянную интегрирования $C_{131} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1} a_0$ и давление на контакте:

$$p_{S_{13}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1} (x - a_0), \quad (4.147)$$

а также компоненту вектора скорости течения вдоль оси Ox :

$$u = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} x + C_{132}.$$

Используя граничные условия для подобласти, найдем произвольную постоянную интегрирования $C_{132} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (-y + b - a_4)$ и наконец, получим выражение для расчета компоненты вектора скорости течения в направлении оси Ox :

$$u = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (x + y - (b + a_4)). \quad (4.148)$$

Силу деформирования найдем повторным интегрированием давления по площади в пределах границ подобласти пластического течения S_{13} :

$$\begin{aligned} P_{S_{13}} &= \iint_{S_{31}} p(x) dx dy = \int_{b_2+r_1}^b dy \int_{-y+(b-a_4)}^{a_0} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_0)) dx = \quad (4.149) \\ &= \int_{b_2+r_1}^b dy \left(2\tau_s x \Big|_{-y+b-a_4}^{a_0} - \frac{\tau_s}{h_1} (x - a_0)^2 \Big|_{-y+b-a_4}^{a_0} \right) = \\ &= \int_{b_2+r_1}^b (2\tau_s(y - b + a_0 + a_4) + \frac{\tau_s}{h_1}(y - b + a_0 + a_4)^2) dy = \\ &= \tau_s(y - b + a_0 + a_4)^2 \Big|_{b_2+r_1}^b + \frac{\tau_s}{3h_1}(y - b + a_0 + a_4)^3 \Big|_{b_2+r_1}^b = \\ &= \tau_s((a_0 + a_4)^2 - (b_2 + r_1 - b + a_0 + a_4)^2) + \frac{\tau_s}{3h_1}((a_0 + a_4)^3 - (b_2 + r_1 - b + a_0 + a_4)^3). \end{aligned}$$

Перейдем к рассмотрению пластической области S_{14} с границами (4.113):

$$S_{14} = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y): & a_0 - r_1 \leq a_0 \\ & b_2 \leq y \leq (b_2 + r_1) - \sqrt{r_1^2 - (x - (a_0 - r_1))^2} \end{cases}$$

где при $\rho = 0, v_\varphi = 0$, а при $\rho = r_1$ контактное давление максимально $p = 2\tau_s$.

Линии тока в подобласти S_{14} могут быть представлены лучами, исходящими из точки с координатами $(a_0 - r_1, b_2 + r_1)$. Используя принятые граничные условия в подобласти, преобразуя первое уравнение статического равновесия к виду $\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$,

после интегрирования $p = -\frac{2\tau_s}{h} \rho + C_{114}$ и определения произвольной постоянной

интегрирования $2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1}r_1 = C_{114}$. Давление на контактной поверхности определится следующим образом:

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_1). \quad (4.150)$$

Уравнение несжимаемости для определения радиальной скорости имеет вид

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} = 0,$$

В результате решения которого получим радиальную компоненту вектора скорости в рассматриваемой подобласти:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1(t)}{dt}. \quad (4.151)$$

Силу деформирования, приходящуюся на подобласть S_{14} , с помощью двойного интеграла, вычисленного контактного давления по площади:

$$\begin{aligned} P_{S_{14}} &= \iint_{S_{14}} p_{S_{14}} \rho \, d\rho \, d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 d\varphi \int_0^{r_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_1)\right) \rho \, d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(2\tau_s \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{r_1} - \frac{2\tau_s \rho^3}{3h_1} \Big|_0^{r_1} + \frac{2\tau_s r_1 \rho^2}{2h_1} \Big|_0^{r_1} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\tau_s r_1^2 + \frac{1}{3} \tau_s \frac{r_1^3}{h_1} \right). \end{aligned} \quad (4.152)$$

Применим рассмотренный алгоритм решения краевой задачи, описанной исходной системой дифференциальных уравнений (4.12 – 4.14), для пластической области поковки фланца S_2 , разбитой на четыре подобласти с характерным течением металла

$$S_2(x, y) = \bigcup_{j=1}^4 S_{2j}(x, y).$$

Начнем с подобласти S_{21} , имеющей линейные границы, описанные (4.117):

$$S_{21} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} a_2 \leq x \leq a \\ 0 \leq y \leq b - (a - a_2) \end{array} \right\}$$

Рассмотрим граничные условия в подобласти, где при $x = a$ на жесткой границе компонента вектора скорости вдоль оси Ox $u = 0$. По принятой схеме течения компонента вектора скорости в направлении оси Oy равна $v \equiv 0$. На

границе канала $x = a_2$, формирующего ребро жесткости, при затекании в него металла контактное давление $p = 2\tau_s$ достигает максимального значения. При этих условиях уравнения исходной системы квазистатического равновесия относительно неизвестной величины давления примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1}, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0.$$

Решая первое уравнение, определим давление на контакте с инструментом

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_1}x + C_{121}.$$

С помощью принятых граничных условий найдем постоянную C_{121} , и соответственно контактное давление в подобласти S_{21} :

$$p_{S_{21}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2). \quad (4.153)$$

Из условия несжимаемости, получим соотношение для определения компоненты вектора скорости течения в направлении оси Ox

$$u = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} x + C_{221}.$$

подставим граничные условия и найдем $C_{221} = \frac{a}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt}$, а компоненты вектора скорости течения в направлении оси Ox представим в виде зависимостей:

$$u_{S_{21}} = \frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (x - a), \quad v_{S_{21}} = 0. \quad (4.154)$$

Сила деформирования, приходящая на подобласть S_{21} :

$$\begin{aligned} P_{S_{21}} &= \iint_{S_{21}} p_{S_{21}}(x) dx dy = \iint_{S_{21}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2) \right) dx dy = \\ &= \int_0^{b-(a-a_2)} dy \int_{a_2}^a \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2) \right) dx = \\ &= \int_0^{b-(a-a_2)} \left(2\tau_s(a - a_2) + \frac{2\tau_s}{2h_1}(a - a_2)^2 \right) dy = \\ &= \left(2\tau_s(a - a_2) + \frac{\tau_s}{h_1}(a - a_2)^2 \right) (b - (a - a_2)). \end{aligned} \quad (4.155)$$

В следующей подобласти S_{22} с границами, определенными условиями (4.118):

$$S_{22} = \left\{ (x, y) : \begin{array}{l} r_1 + a_2 \leq x \leq a \\ -x + b + a_2 \leq y \leq b_1 \end{array} \right.$$

При условии $y = -x + b + a_2$ и $v = 0$ скорость течения в направлении оси Ox $u \equiv 0$. Если $y = b_1$, то контактное давление $p = 2\tau_s$ максимально. С учетом сказанного первые уравнения исходной системы, примут вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}.$$

Из второго уравнения получим давление на контактной поверхности

$$p_{S_{22}}(x) = -\frac{2\tau_s}{h_1}y + C_{321}.$$

Из граничных условий на контуре подобласти определяем $C_{321} = \frac{2\tau_s}{h_1}b_1 + 2\tau_s$. Тогда давление на контактной поверхности инструмента с подобластью S_{22} :

$$p_{S_{22}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_1). \quad (4.156)$$

При подстановке в уравнение несжимаемости граничных условий, определенных для подобласти, находим компоненту вектора скорости течения в направлении оси Oy $v_{S_{22}} = -\frac{1}{h(t)}\frac{dh(t)}{dt}y + C_{223}$ и постоянную интегрирования $C_{223} = \frac{a}{h(t)}\frac{dh(t)}{dt}(-x + b - a_2)$.

Компонента вектора скорости течения вдоль оси Oy в подобласти S_{22} имеет вид:

$$v_{S_{22}} = -\frac{1}{h(t)}\frac{dh(t)}{dt}(y + x - b - a_2). \quad (4.157)$$

Таким образом, сила деформирования, приходящаяся на подобласть S_{22} :

$$\begin{aligned} P_{S_{22}} &= \iint_{S_{22}} p_{S_{22}}(x) dx dy = \iint_{S_{22}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h}(y - b_2) \right) dx dy = \\ &= \int_{a_2+r_1}^a dx \int_{-x+b+a_2}^{b_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h}(y - b_2) \right) dy = \end{aligned} \quad (4.158)$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{a_2+r_1}^a dx \left(2\tau_s(b_1 + x - b - a_2) - \frac{2\tau_s}{h}(-x + b + a_2 - b_1)^2 \right) = \\
 &= \int_{a_2-r_1}^{a_2} \left(2\tau_s(x + (b_1 - b - a_2)) - \frac{\tau_s}{h}(x + (b_1 - b - a_2))^2 \right) dx = \\
 &= \tau_s(x + (b_1 - b - a_2))^2 \Big|_{a_2+r_1}^{a_1} - \frac{\tau_s}{3h}(x + (b_1 - b - a_2))^3 \Big|_{a_2+r_1}^a = \\
 &= \tau_s(a + b_1 - b - a_2)^2 - \tau_s(r_1 + b_1 - b)^2 - \frac{\tau_s}{3h}((a + b_1 - b - a_2)^3 - (r_1 + b_1 - b)^3).
 \end{aligned}$$

Подобласть S_{23} ограничена линейными участками (4.119):

$$S_{23} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_2 \leq x \leq -y + b + a_2 \\ b - (a - a_2) \leq y \leq b_1 - r_1 \end{array} \right.$$

В подобласти в соответствии с расчетной схемой (см. рис. 4.9) приняты следующие граничные условия: при

$$x = -y + b - a_2, u = 0, v \equiv 0,$$

v – компонента вектора скорости течения в направлении оси Oy . На линии $x = a_2$, являющейся вертикальной границей канала, в котором затекающий металл образует ребро жёсткости, возникают максимальные контактные давления $p = 2\tau_s$.

Принимая сказанное во внимание, преобразуем уравнения равновесия исходной системы к виду $\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$; $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$. Из первого уравнения найдем давление на контактной поверхности:

$$p_{S_{23}}(x) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2). \quad (4.159)$$

Из условия несжимаемости определим скорость в направлении оси Ox

$$u = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} x + C_{223}, \text{ где } C_{223} = \frac{a}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (-y + b - a_2).$$

Подставим найденное выражение в уравнение скорости u , тогда получим:

$$u_{S_{23}} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (x + y - (b - a_2)). \quad (4.160)$$

Сила, необходимая для деформирования подобласти S_{23} :

$$\begin{aligned}
 P_{S_{23}} &= \iint_{S_{23}} p_{S_{23}}(x) dx dy = \iint_{S_{23}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2) \right) dx dy = \\
 &= \int_{b-(a-a_2)}^{b_1-r_1} dy \int_{a_2}^{-y+(b+a_2)} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - a_2) \right) dx = \\
 &= \int_{b-(a-a_2)}^{b_1-r_1} \left(2\tau_s(-y + b) + \frac{\tau_s}{h_1}(x - a_2)^2 \Big|_{a_2}^{-y + (b + a_2)} \right) dy = \\
 &= -\tau_s(y - b)^2 \Big|_{b - (a - a_2)}^{b_1 - r_1} - \frac{\tau_s}{3h_1}(y - b)^3 \Big|_{b - (a - a_2)}^{b_1 - r_1} = \\
 &= \tau_s((b - b_1 + r_1)^2 - (a - a_2)^2) - \frac{\tau_s}{3h_1}((b - b_1 + r_1)^3 - (a - a_2)^3).
 \end{aligned} \tag{4.161}$$

Перейдем к рассмотрению подобласти S_{24} , границы которой описаны соотношением (4.120):

$$S_{24} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ -\pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (x, y): b_1 - r_1 \leq y \leq b_1 - r_1 + \sqrt{r_1^2 - (x - (a_2 - r_1))^2} \\ a_2 \leq x \leq a_2 + r_1 \end{array} \right.$$

Согласно схеме течения металла линии тока являются отрезками прямых, исходящих из общего центра с координатами $(a_2 + r_1, b_1 - r_1)$. При значении текущего радиуса $\rho = 0$ тангенциальная составляющая скорости $v_\varphi = 0$. На границе канала при $\rho = r_1$ металл затекает в ребро жесткости, в этих условиях контактное давление принято максимальным $p = 2\tau_s$. Подставляя граничные условия для подобласти в уравнения (4.12) $\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_1}$ и (4.13) $\frac{\partial p}{\partial \varphi} = 0$, решаем первое относительно искомого давления на контактной поверхности

$p(\rho, \varphi) = -\frac{2\tau_s}{h_1}\rho + C_{124}$, после определения произвольной постоянной интегрирования $2\tau_s = -\frac{2\tau_s}{h_1}r_1 + C_{124}$ или $C_{124} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s}{h_1}r_1$, найдем давление на контакте:

$$p(\rho, \varphi) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_1). \tag{4.162}$$

Условие несжимаемости запишем в полярной системе координат:

$$\frac{\partial v_\rho}{\partial \rho} + \frac{v_\rho}{\rho} + \frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} = 0. \quad (4.163)$$

Получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое имеет очевидное решение:

$$v = -\frac{\rho^2}{2h} \frac{dh}{dt} + C \Rightarrow \text{очевидно } C=0.$$

Радиальная компонента вектора скорости течения

$$v(\rho) = -\frac{\rho}{2h_1} \frac{dh_1}{dt}. \quad (4.164)$$

Сила деформирования в S_{24} вычисляем с помощью двойного интеграла

$$\begin{aligned} P_{S_{24}} &= \iint_{S_{24}} P(\rho, \varphi) \rho \, d\rho d\varphi = \int_{-\pi}^{-\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_0^{r_1} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_1)) \rho \, d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(\frac{2\tau_s}{2} r_1^2 - \frac{2\tau_s}{h_1} \frac{\rho^3}{3} \right) \Big|_0^{r_1} + \frac{2\tau_s r_1}{h_1} \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{r_1} \right) = \left(2\tau_s r_1^2 + \frac{1}{3} \frac{2\tau_s r_1^3}{h_1} \right) \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Перейдем к рассмотрению области течения S_3 , объединяющей пять подобластей:

$$S_3(x, y) = \bigcup_{j=1}^5 S_{3j}(x, y).$$

Подобласть S_{31} имеет линейные границы, определяемые выражением (4.121):

$$S_{31} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_3 \leq x \leq a - r_3 \\ b_2 \leq y \leq b \end{array} \right\}.$$

В соответствии с расчетной схемой условия на контуре подобласти имеют вид:

$$\begin{aligned} y = b, v &= 0, \\ y = b_2, p &= 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Поскольку в подобласти компонента вектора скорости течения в направлении оси Ox равна $u \equiv 0$, то уравнение первое уравнение исходной системы примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0, \text{ а второе запишется } \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1}, \text{ решая последнее, получим:}$$

$$p_{31} = -\frac{2\tau_s}{h_1} y + C_{311}. \quad (4.167)$$

Воспользовавшись граничными условиями (4.166) при $y = b_2$ уравнение (4.167) примет вид $2\tau_s = -\frac{2\tau_s b_2}{h_1} + C_{311}$, тогда, найдя постоянную интегрирования $C_{311} = 2\tau_s(1 + \frac{b_2}{h_1})$, после подстановки в (4.167) получим давление на контактной поверхности:

$$p_{31}(y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2). \quad (4.168)$$

Подставим граничные условия (4.166) в условие несжимаемости получим выражение $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{d\lambda}{dt}$, в правую часть которого подставим значение производной, полученное ранее $\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}$. Решением этого уравнения будет компонента вектора скорости вдоль оси Oy :

$$v_{31} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt} y + C_{311}. \quad (4.169)$$

Используя граничные условия (4.166) ($y = b, v = 0$), найдем произвольную постоянную интегрирования $C_{311} = \frac{b}{h_1(t)} \frac{dh_1}{dt}$. При подстановке в (4.169) получим выражение для компоненты вектора скорости перемещения в подобласти:

$$v_{31} = -\frac{1}{h_1(t)}(y - b) \frac{dh_1}{dt}. \quad (4.170)$$

Силу деформирования на подобласть S_{31} находим интегрированием контактного давления по площади, занимаемой подобластью:

$$\begin{aligned} P_{S_{31}} &= \iint_{S_{31}} p_{S_{31}}(y) dx dy = \int_{a_3}^{a-r_3} dx \int_{b_2}^b (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2)) dy = \\ &= (a - a_3 + r_3) \left(2\tau_s(b - b_2) + \frac{2\tau_s}{2h_1}(y - b_2)^2 \Big|_{b_2}^b \right) = \\ &= (a - a_3 + r_3) \left(2\tau_s(b - b_2) + \frac{\tau_s(b-b_2)^2}{h_1} \right). \end{aligned} \quad (4.171)$$

Перейдем к подобласти S_{32} с границами (4.122):

$$S_{32} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_0 + a_2 - a_1 + r_1 \leq x \leq a_3 \\ b_2 \leq y \leq x + b - a_3 \end{array} \right\}.$$

Условия на контуре:

$$\text{при } y = x + b - a_3 \quad v = 0 \quad (u \equiv 0);$$

$$\text{при } y = b_2 \quad p = 2\tau_s,$$

т.е. граничные условия определяются выражениями (4.172).

$$\begin{aligned} y = x + b - a_3, \quad v = 0 \quad (u \equiv 0); \\ y = b_2, \quad p = 2\tau_s. \end{aligned} \quad (4.172)$$

С учетом условий на контуре система разрешающих уравнений преобразуется к виду:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1}; \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{d\lambda}{dt}. \quad (4.173)$$

Интегрированием первого уравнения системы (4.173) определим контактное давление в подобласти:

$$p_{S_{32}} = -\frac{2\tau_s}{h_1}x + C_{321}. \quad (4.174)$$

С учетом граничных условий (4.172) найдем C_{321} и, следовательно, давление на контакте:

$$p_{S_{32}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2), \quad (4.175)$$

а также компоненту вектора скорости течения вдоль оси Ox

$$u_{S_{32}} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} y + C_{322}.$$

Используя граничные условия, найдем произвольную постоянную интегрирования

$$C_{322} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (x + b - a_3),$$

и наконец, получим выражение для расчета компоненты вектора скорости течения в направлении оси Ox :

$$u_{S_{32}} = -\frac{1}{h_1(t)} \frac{dh_1(t)}{dt} (x + y - (b - a_3)). \quad (4.176)$$

Силу деформирования найдем двойным интегрированием давления по площади в пределах границ подобласти пластического течения S_{32} :

$$\begin{aligned}
 P_{S_{32}}^{(3)} &= \iint_{S_{32}} p_{S_{32}}(y) dx dy = \int_{a_0+a_2-a_1+r_1}^{a_3} dx \int_{b_2}^{x+b_1-a_3} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y-b_2)) dy = \\
 &= \int_{a_0+a_2-a_1+r_1}^{a_3} dx (2\tau_s(x+b-a_3-b_2) - \frac{\tau_s}{h_1}(x+b-a_3-b_2)^2) = \\
 &= \tau_s(x+b-a_3-b_2)^2 \Big|_{a_0+a_2-a_1+r_1}^{a_3} - \frac{\tau_s}{3h_1}(x+b-a_3-b_2)^3 \Big|_{a_0+a_2-a_1+r_1}^{a_3} . \\
 P_{S_{32}}^{(3)} &= \tau_s((b-b_2)^2 - (a_0+r_1+a_2-a_1)^2) - \frac{\tau_s}{3h_1}((b-b_2)^3 - \\
 &\quad - (a_0+r_1+a_2-a_1+b-b_2)^3). \tag{4.177}
 \end{aligned}$$

Перейдем к подобласти S_{33} с границами (4.123):

$$S_{33} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_0 + a_2 - a_1 \leq x \leq y - (b - a_3) \\ b_2 + r_1 \leq y \leq b \end{array} \right. .$$

Граничные условия:

$$\begin{aligned}
 y &= x - b + a_3, u = 0 (v \equiv 0); \tag{4.178} \\
 x &= a_0 + a_2 - a_1, p = 2\tau_s.
 \end{aligned}$$

Величина давления на контакте в пределах подобласти:

$$p_{33}(x, y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - (a_0 + a_2 - a_1)). \tag{4.179}$$

Вектора скорости течения по оси Ox :

$$u = -\frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{dt} (x + y + (b - a_1)).$$

Силовые параметры для деформирования подобласти S_{32} :

$$\begin{aligned}
 P_{S_{33}}^{(3)} &= \iint_{S_{33}} p_{S_{33}}(x) dx dy = \\
 &= \int_{b_2+r_1}^b dy \int_{a_0+a_2-a_1}^{y-(b-a_3)} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - (a_0 + a_2 - a_1))) dx = \\
 &= \int_{b_2+r_1}^b (2\tau_s(y - b + a_3 - a_0 - a_2 + a_1) -
 \end{aligned} \tag{4.180}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{2\tau_s}{h_1}((x - (a_0 + a_2 - a_1))^2) \Big|_{a_0 + a_2 - a_1}^{y - b + a_3} dy = \\
 = & \int_{b_2 + r_1}^b (2\tau_s(y - b + a_3 - a_0 - a_2 + a_1) - \frac{2\tau_s}{h_1}((y - b + a_3 - (a_0 + a_2 - a_1))^2)) dy = \\
 & = (\tau_s((y - b + a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^2) - \frac{\tau_s}{3h_1}((y - b + a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^3)) \Big|_{b_2 + r_1}^b = \\
 = & \tau_s((a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^2 - (b_2 + r_1 - b + a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^2) - \\
 & - \frac{\tau_s}{3h_1}((a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^3 - (b_2 + r_1 - b + a_1 - a_0 - a_2 + a_3)^3).
 \end{aligned}$$

Перейдем к подобласти S_{34} с границами (4.125):

$$S_{34} = \begin{cases} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ \pi \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

или

$$S_{34} = \left\{ (x, y): \begin{aligned} & a_0 + (a_2 - a_1) + r_1 - \sqrt{r_1^2 - (y - (b_2 - r_1))^2} \leq x \leq a_0 + (a_2 - a_1), \\ & b_2 \leq y \leq b_2 + r_1 \end{aligned} \right.$$

Условия на контуре подобласти:

$$\begin{aligned}
 \rho &= 0, v = 0; \\
 \rho &= r_1, p = 2\tau_s.
 \end{aligned} \tag{4.181}$$

Тогда давление на контакте:

$$p_{S_{34}}(x, y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(\rho - r_1). \tag{4.182}$$

Радиальная компонента вектора скорости течения подобласти:

$$v(\rho) = -\frac{\rho}{h_1} \frac{dh_1}{dt}. \tag{4.183}$$

Сила деформирования по подобласти:

$$P_{S_{34}}^{(3)} = \iint_{S_{34}} p_{S_{34}}(\rho, \varphi) \rho d\rho d\varphi = \frac{\pi}{2} \left(\tau_s r_1^2 + \frac{1}{2} \frac{\tau_s r_1^3}{h_1} \right). \tag{4.184}$$

Перейдем к подобласти S_{35} с границами (4.126):

$$S_{35} = \left\{ (x, y): \begin{aligned} & a - r_3 \leq x \leq a \\ & b_2 \leq y \leq (b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \end{aligned} \right.$$

Условия на контуре:

$$\begin{aligned}
 y &= (b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2}, v = 0, u = 0, \\
 y &= b_2, p = 2\tau_s, \\
 x &= a, v = 0, u = 0.
 \end{aligned}
 \tag{4.185}$$

С учетом принятых условий (4.185) при решении первых уравнений исходной системы получим давление на контакте:

$$p_{35}(x, y) = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(y - b_2),
 \tag{4.186}$$

а решая преобразованное условие несжимаемости в виде

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{h_1} \frac{dh_1}{dt},$$

$$v = -\frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} y + C_{135}, \text{ где } C_{135} = \frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left((b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \right),$$

получим компоненту вектора скорости течения в направлении оси Oy:

$$v_{35} = -\frac{1}{h_1} \frac{dh_1(t)}{dt} \left(y - (b - r_3) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \right).
 \tag{4.187}$$

Силу деформирования определим с помощью интегрирования функции, описывающей давление, по области S_{35} :

$$\begin{aligned}
 P_{S_{35}}^{(3)} &= \iint_{S_{35}} p_{35}(y) dx dy = \int_{a-r_3}^b dx \int_{b_2}^{(b-r_3)+\sqrt{r_3^2-(x-(a-r_3))^2}} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_1}(x - b_2) \right) dy = \\
 &= \int_{a-r_3}^a \left(2\tau_s(b - r_3 - b_2) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\tau_s}{h_1} \left((b - r_3 - b_2) + \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \right)^2 \right) dx = \\
 &= \int_{a-r_3}^a \left(2\tau_s((b - r_3) - b_2) dx + 2\tau_s \int_{a-r_3}^a \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} dx - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{a-r_3}^a \frac{\tau_s}{h_1} \left((b - r_3 - b_2)^2 + 2(b - r_3 - b_2) \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} \right) dx \right) +
 \end{aligned}
 \tag{4.188}$$

$$\begin{aligned}
 & +r_3^2 - (x - (a - r_3))^2 dx = \\
 & = 2\tau_s \left((b - r_3 - b_2)r_3 + \frac{r_3^2\pi}{3} \right) - \frac{\tau_s}{h_1} (b - r_3 - b_2)^2 r_3 - \\
 & - \frac{2\tau_s}{h_1} (b - r_3 - b_2) \frac{r_3^2\pi}{3} + \frac{\tau_s}{h_1} r_3^3 - \frac{2\tau_s}{3h_1} (x - (a - r_3))^3 \Big|_a^{a - r_3}.
 \end{aligned}$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\int_{a-r_3}^a \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} d(x - (a - r_3)).$$

Такой интеграл можно вычислить стандартными методами, проинтегрировав по частям. Для этого сделаем замену переменных

$$x_1 = x - (a - r_3); d(x - (a - r_3)) = dx_1.$$

Пределы интегрирования в этом случае изменятся следующим образом

$$\text{если } x = (a - r_3) \Rightarrow x_1 = 0,$$

$$\text{если } x = a \Rightarrow x_1 = a - (a - r_3) = r_3.$$

Далее, после замены исходный интеграл примет вид

$$\int_0^{r_3} \sqrt{r_3^2 - x_1^2} dx_1 = x_1 \sqrt{r_3^2 - x_1^2} \Big|_0^{r_3} + 2 \int \frac{x_1^2 - r_3^2 + r_3^2}{\sqrt{r_3^2 - x_1^2}} dx_1 = 2 \int \sqrt{r_3^2 - x_1^2} dx + 2r_3^2 \int \frac{dx_1}{\sqrt{r_3^2 - x_1^2}}.$$

Следовательно,

$$\int_{a-r_3}^a \sqrt{r_3^2 - (x - (a - r_3))^2} dx = \frac{2}{3} r_3^2 \arcsin \frac{x_1}{r_3} \Big|_0^{r_3} = \frac{r_3^2}{3} \pi.$$

Окончательно силу деформирования, приходящуюся на область S_{35} , запишем в виде соотношения (4.189):

$$\begin{aligned}
 P_{S_{35}}^{(3)} & = 2\tau_s ((b - r_3 - b_2)r_3) - \frac{\tau_s}{h_1} ((b - r_3 - b_2)^2 + r_3^2) + \\
 & + 2\tau_s \left(1 - \frac{b - r_3 - b_2}{h_1} \right) \frac{\pi r_3^2}{3} + \frac{\tau_s}{3h_1} r_3^3.
 \end{aligned} \tag{4.189}$$

Рассмотрим область S_4 состоящую из четырех подобластей (4.127):

$$S_4(x, y) = \bigcup_{j=1}^4 S_{4j}(x, y).$$

Рассмотрим последовательно эти подобласти. Итак, подобласть S_{41} имеет границы (4.129):

$$S_{41} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} 0 \leq x \leq a_0 \\ 0 \leq y_0 \leq b_1 \end{array} \right.$$

В этой подобласти условиями на контуре являются:

$$\begin{aligned} y = 0, v = 0; \\ y = b_1, p = 2\tau_s. \end{aligned} \tag{4.190}$$

Уравнения краевой задачи в этой подобласти принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_s}{h_2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{dt}, \end{aligned} \tag{4.191}$$

$u \equiv 0$ – компонента вектора скорости перемещения в направлении оси Ox и тогда, решая второе уравнение системы (4.191):

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_2}y + C_{141}, \text{ где } C_{141} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s b_1}{h_2},$$

находим давление на контактной поверхности

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y - b_1). \tag{4.192}$$

Из последнего условия несжимаемости системы (4.191) находим компоненту скорости течения в направлении оси Oy :

$$v_{41} = -\frac{y}{h_2(t)} \frac{dh_2}{dt}. \tag{4.193}$$

Находим силу деформирования в рассматриваемой подобласти S_{41} :

$$P_{S_{41}}^{(4)} = \iint_{S_{41}} p_{S_{41}}(y) dx dy = \int_0^{a_0} dx \int_0^{b_1} \left(2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y - b_1) \right) dy = \tag{4.194}$$

$$= \left(a_0 2\tau_s b_1 y - \frac{2\tau_s (y - b_1)^2}{2h_2} \right) \Big|_0^{b_1} = 2\tau_s b_1 a_0 + \frac{\tau_s b_1^2 a_0}{h_2}.$$

Рассмотрим следующую подобласть S_{42} , входящую в состав области S_4 , и границы которой описаны неравенством (4.130):

$$S_{42} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 - b_1 \leq x \leq a_1 - r_2 \\ x - (a_1 - b_1) \leq y \leq b_1 \end{array} \right.$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} y = x - (a_1 - b_1), v = 0; \\ y = b_1, p = 2\tau_s \end{aligned} \quad (4.195)$$

$u \equiv 0$, компонента вектора скорости течения в направлении оси Ox . Уравнения краевой задачи в этой области преобразуются к виду:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_s}{h_2}, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{dt}. \end{aligned} \quad (4.196)$$

Решая второе уравнение системы (4.196):

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_2} y + C_{142}, \text{ где } C_{142} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s b_1}{h_2},$$

определим давление на контакте:

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2} (y - b_1). \quad (4.197)$$

Решением уравнения несжимаемости системы (4.196):

$$v = -\frac{y}{h_2(t)} \frac{dh_2}{dt} + C_{242}, \text{ где } C_{242} = \frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2}{dt} (x - (a_1 - b_1)),$$

получим выражение для компоненты вектора скорости течения:

$$v = -\frac{1}{h_2} (y - x + (a_1 - b_1)). \quad (4.198)$$

Силу деформирования в подобласти S_{42} находим интегрированием давления по площади

$$\begin{aligned}
 P_{S_{42}}^{(4)} &= \iint_{S_{41}} p_{S_{42}}(y) dx dy = \int_{a_1-b_1}^{a_1-r_2} dx \int_{x-(a_1-b_1)}^{b_1} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(y-b_1)) dy = \\
 &= \int_{a_1-b_1}^{a_1-r_2} dx (2\tau_s \Big|_{x-(a_1-b_1)}^{b_1} - \frac{\tau_s}{h_2}(y-b_1)^2 \Big|_{x-(a_1-b_1)}^{b_1}) = \\
 &= \int_{a_1-b_1}^{a_1-r_2} (2\tau_s(b_1-x+(a_1-b_1)) + \frac{\tau_s(x-a_1)^2}{h_2}) dx = \\
 &= -2\tau_s \frac{(x-a_1)^2}{2} \Big|_{a_1-b_1}^{a_1-r_2} + \frac{\tau_s(x-a_1)^3}{3h_2} \Big|_{a_1-b_1}^{a_1-r_2} = \\
 &= -2\tau_s \frac{(r_2)^2 - (b_1)^2}{2} - \frac{\tau_s((r_2)^3 - (b_1)^3)}{3h_2}.
 \end{aligned}$$

После преобразований сила деформирования в S_{42} :

$$P_{S_{42}}^{(4)} = -\tau_s((r_2)^2 - (b_1)^2) - \frac{\tau_s((r_2)^3 - (b_1)^3)}{3h_2}. \quad (4.199)$$

Проанализируем следующую подобласть S_{43} , входящую в состав области S_4 и имеющую границы (4.131):

$$S_{43} = \left\{ (x, y): \begin{array}{l} y + (a_1 - b_1) \leq x \leq a_1 \\ 0 \leq y_0 \leq b_1 - r_2 \end{array} \right. .$$

Принимаем граничные условия в подобласти:

$$\begin{aligned}
 x &= y - (a_1 - b_1), u = 0; \\
 y &= a_1, p = 2\tau_s,
 \end{aligned} \quad (4.200)$$

$v \equiv 0$, компонента вектора скорости течения в направлении оси Oy .

Уравнения краевой задачи преобразуются к виду:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_s}{h_2}, \\
 \frac{\partial p}{\partial y} &= 0, \\
 \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{h_2} \frac{dh_2}{dt}.
 \end{aligned} \quad (4.201)$$

Решением первого уравнения системы (4.201) получаем аналитическую зависимость для вычисления контактного давления (4.202):

$$p = -\frac{2\tau_s}{h_2}x + C_{143}, \quad C_{143} = 2\tau_s + \frac{2\tau_s b_1}{h_2}a_1,$$

$$p = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(x - a_1). \quad (4.202)$$

Из условия несжимаемости находим компоненту вектора скорости течения в направлении оси Ox (4.203):

$$u = -\frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2}{dt} x + C_{243}, \quad C_{243} = \frac{1}{h_2(t)} \frac{dh_2}{dt} (y - (a_1 - b_1)).$$

$$u = -\frac{1}{h_2} (x - y - (a_1 - b_1)). \quad (4.203)$$

Сила деформирования, приходящаяся на область S_{43} , находится по аналогии с предыдущими подобластями (4.204):

$$P_{S_{43}}^{(4)} = \iint_{S_{43}} p_{S_{43}} dx dy = \int_0^{b_1-r_2} dy \int_{y+(a_1-b_1)}^{a_1} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(x - a_1)) dx =$$

$$= \int_0^{b_1-r_2} dy (2\tau_s x \Big|_{y+(a_1-b_1)}^{a_1} - \frac{\tau_s}{h_2} (x - a_1)^2 \Big|_{y+(a_1-b_1)}^{a_1}) =$$

$$= \int_0^{b_1-r_1} (2\tau_s(-y - b_1) - \frac{\tau_s(x - a_1)^2}{h_2} \Big|_{y+(a_1-b_1)}^{a_1}) dy =$$

$$= -\tau_s(y - b_1)^2 \Big|_0^{b_1-r_1} + \int_0^{b_1-r_1} \frac{\tau_s}{h_2} (y - b_1)^2 dy = \tau_s r_1^2 - \tau_s b_1^2 + \frac{\tau_s}{3h_2} (y - b_1)^3 \Big|_0^{b_1-r_1}.$$

$$P_{S_{43}}^{(4)} = \tau_s(r_1^2 - b_1^2) - \frac{\tau_s}{3h_2}(r_1^3 - b_1^3). \quad (4.204)$$

И наконец, рассмотрим подобласть S_{44} с границами (4.134):

$$S_{44} = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq r_1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ (x, y): \begin{array}{l} a_1 - r_2 \leq x \leq a_1 \\ b_2 - r_2 \leq y \leq (b_1 - r_2) + \sqrt{r_2^2 - (x - (a_1 - r_2))^2} \end{array} \right\}.$$

Для подобласти принимаем следующие граничные условия:

$$\text{при } \rho = 0, v_r = 0; \quad (4.205)$$

при $\rho = r_2, p = 2\tau_s$.

Линии тока образуют пучок прямых с центром в точке $(a_1 - r_2, b_1 - r_2)$, радиальная компонента вектора скорости перемещения $v_\rho = 0$ в области S_{44} , тогда, первое уравнение системы равновесия краевой задачи примет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h_2},$$

решая которое по аналогии с предыдущими подобластями получим

$$p_{S_{44}}(\rho, \varphi) = -\frac{2\tau_s}{h_2}\rho + C_{144}.$$

Выведем выражение (4.206) для определения контактного давления:

$$p_{S_{44}} = 2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(\rho - r_2). \quad (4.206)$$

Также, решая с учетом граничных условий уравнение несжимаемости, определим радиальную компоненту вектора скорости перемещения:

$$v_\rho = -\frac{\rho}{2h_2} \frac{dh_2(t)}{dt}. \quad (4.207)$$

Далее определяем выражение для силы деформирования в рассматриваемой подобласти:

$$\begin{aligned} P_{S_{44}}^{(4)} &= \iint_{S_{44}} p_{S_{44}} \rho d\rho d\varphi = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{r_1} (2\tau_s - \frac{2\tau_s}{h_2}(\rho - r_2)) \rho d\rho = \\ &= \frac{\pi}{2} (\tau_s \rho^2 - \frac{2\tau_s \rho^3}{3h_2} + \frac{2\tau_s \rho^2 r_2}{2h_2}) \Big|_0^{r_2} = \frac{\pi}{2} (\tau_s r_2^2 + \frac{1}{3} \frac{r_2^3}{h_2}). \end{aligned} \quad (4.208)$$

Суммарная составляющая силы деформирования в области определится с помощью соотношения

$$P_\Sigma = \sum_{i,j}^n P_{s_{ij}}. \quad (4.209)$$

4.4 Математическая модель процесса сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра

4.4.1 Объект исследования и расчетная схема

Рассмотрим известные классификационные системы, представленным в работе [39], в соответствии с которыми поковка, изображенная на рис. 4.11, и имеющая плоские рёбра, расположенные вдоль оси симметрии. «Двумя секущими плоскостями, которые проходят по средним линиям двух соседних рёбер, через вертикальную ось симметрии, выделим из поковки круговой сектор и спроецируем этот элемент на плоскость Oxy , перпендикулярно вертикальной оси z , как показано на рис. 4.12»⁴² [219].

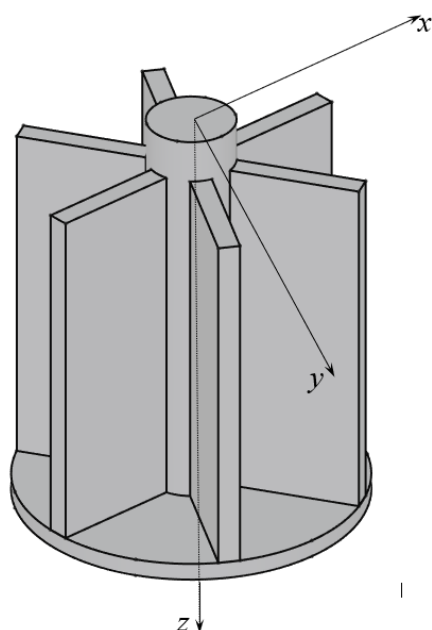


Рис. 4.11. Схема поковки с продольными ребрами

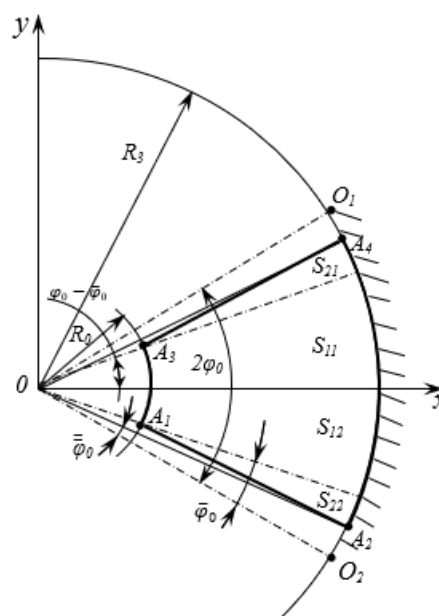


Рис. 4.12. Проекция выделенного элемента фланцевой части поковки на плоскость Oxy

⁴² Сосенушкин, Е. Н. Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными ребрами / Е. Н. осенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская, Т. В. Гуреева //Цветные металлы, 2019, №3, С69-75 ISSN^ 0372-2929

На контуре, ограничивающем рёбра поковки, выделим характерные точки A_1, A_2, A_3, A_4 . Радиусы OO_1 и OO_2 проходят по средним относительно толщины линиями рёбер. Перейдем в задаче от прямоугольной декартовой системы к системе цилиндрических координат r, φ, z со следующими обозначениями $OA_1 = R_0$; $OA_2 = R_3$; $\angle O_1OO_2 = 2\varphi_0$; $\angle A_1OO_1 = \bar{\varphi}_0$; $\angle A_2OO_2 = \bar{\bar{\varphi}}_0$; h – толщина фланцевой части заготовки.

Углы $\bar{\varphi}_0, \bar{\bar{\varphi}}_0$ определим в соответствии с теоремой косинусов:

$$\begin{aligned} R_0^2 + R_0^2 - 2R_0^2 \cos\bar{\varphi}_0 &= h^2, \\ 2R_0^2 - 2R_0^2 \cos\bar{\varphi}_0 &= h^2, \\ \cos\bar{\varphi}_0 &= \frac{2R_0^2 - h^2}{2R_0^2}, \end{aligned} \tag{4.210}$$

после преобразования

$$\begin{aligned} \cos\bar{\varphi}_0 &= 1 - \frac{h^2}{2R_0^2}, \\ \bar{\varphi}_0 &= \arccos\left(1 - \frac{h^2}{2R_0^2}\right), \end{aligned}$$

аналогично предыдущему

$$\bar{\bar{\varphi}}_0 = \arccos\left(1 - \frac{h^2}{2R_3^2}\right). \tag{4.211}$$

4.4.2 Описание границ пластических областей

Используем расчетную схему на рис. 4.15. Область течения S разобьем на подобласти [215, 216, 218], которые представим в цилиндрической системе координат: $S = S_1 \cup S_2$:

$$S_1 = S_{1,1} \cup S_{2,1}, \quad S_2 = S_{1,2} \cup S_{2,2},$$

$$S_1 = \left\{ (r, \varphi) \left| \begin{array}{l} -\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 < \varphi < \varphi_0 - \bar{\varphi}_0; \\ R_0 < r < R_3 \end{array} \right. \right\}; \tag{4.212}$$

$$R = R(\varphi) = R_{\delta}(\varphi). \quad (4.213)$$

$$S_2 = \left\{ (r, \varphi) \left| \begin{array}{l} \varphi_0 - \bar{\varphi}_0 < \varphi < \varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0 \\ R_{\delta}(\varphi) < r < R_3 \end{array} \right. \right. \quad (4.214)$$

Запишем уравнение прямой, проходящей через точки A_3, A_4 . с координатами $A_3(R_0, \varphi_0 - \bar{\varphi}_0), A_4(R_3, \varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0)$:

$$\frac{x - x_3}{x_4 - x_3} = \frac{y - y_3}{y_4 - y_3}, \quad (4.215)$$

и перейдем к цилиндрической системе координат:

$$A_3(R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0), R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)), \quad A_4(R_3 \cos(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0), R_3 \sin(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0))$$

$$\frac{x - R_0}{R_3 - R_0} = \frac{y - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}{\bar{\bar{\varphi}}_0 - \bar{\varphi}_0}. \quad (4.216)$$

Вид уравнения рассматриваемой прямой изменится:

$$\frac{R_{\delta}(\varphi) \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}{R_3 \cos(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0) - R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)} = \frac{R_{\delta}(\varphi) \sin \varphi - R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}{R_3 \sin(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0) - R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}. \quad (4.217)$$

После преобразований

$$\frac{R_{\delta}(\varphi) \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}{R_{\delta}(\varphi) \sin \varphi - R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)} = \frac{R_3 \cos(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0) - R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)}{R_3 \sin(\varphi_0 - \bar{\bar{\varphi}}_0) - R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)} = \Phi_{OB}.$$

Отсюда:

$$R_{\delta}(\varphi) \cos \varphi - R_0 \cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) = \Phi_{OB} (R_{\delta}(\varphi) \sin \varphi - R_0 \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)),$$

$$R_{\delta}(\varphi) (\cos \varphi - \Phi_{OB} \sin \varphi) = R_0 (\cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)),$$

$$R_{\delta}(\varphi) = \frac{R_0 (\cos(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \sin(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0))}{(\cos \varphi - \Phi_{OB} \sin \varphi)}. \quad (4.218)$$

В виду малости углов функция (4.218) после преобразования примет вид:

$$R_{\delta}(\varphi) = \frac{R_0}{(\cos \varphi - \Phi_{OB} \sin \varphi)} = - \frac{R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{1}{\sin\left(\varphi - \arctg \frac{1}{\Phi_{OB}}\right)} =$$

$$= - \frac{R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{1}{\sin(\varphi - A)}, \quad (4.219)$$

где $A = \arctg \frac{1}{\Phi_{OB}}$.

Разложение в степенной ряд по малому параметру тригонометрическую функцию в знаменателе множителя (4.219):

$$\sin(\varphi - A) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(\varphi - A)^{2n+1}}{(2n+1)!} = (\varphi - A) - \frac{(\varphi - A)^3}{3!} + \dots;$$

и оставим два первых члена разложения, тогда

$$R_{\delta}(\varphi) = -\frac{R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{6}{6(\varphi - A) - (\varphi - A)^3} = \frac{6R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{1}{(\varphi - A)^3 - 6(\varphi - A)}; \quad (4.220)$$

или

$$R_{\delta}(\varphi) = -\frac{R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{1}{(\varphi - A)}. \quad (4.221)$$

4.4.3 Постановка краевой задачи

«Для общего случая воспользуемся системой дифференциальных уравнений:

$$\text{grad}p = -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{\bar{v}}{|\bar{v}|}; \quad (4.222)$$

$$\text{div}\bar{v} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4.223)$$

Уравнения (4.222) - динамические уравнения Эйлера, а уравнение (4.223) является условием несжимаемости в эйлеровом пространстве [33].

Интенсивность изменения давления на контактной поверхности возрастает в направлении градиента:

$$\text{grad}p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k,$$

где i, j, k - единичный ортонормированный базис декартовой системы координат.

Проекции вектора скорости $\bar{v} = \bar{v}(u, v, w)$ являются непрерывными функциями перемещений, а модуль вектора скорости может быть вычислен $|\bar{v}| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$, тогда

$$\frac{\bar{v}}{|\bar{v}|} = \frac{u}{|\bar{v}|} i + \frac{v}{|\bar{v}|} j + \frac{w}{|\bar{v}|} k,$$

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

При рассмотрении плоского деформированного состояния система уравнений (4.222), (4.223) преобразуем к виду (4.12) – (4.14)»⁴³ [19, 2016, 217, 218, 228, 230-232]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x} &= -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \\ \frac{\partial p}{\partial y} &= -\frac{2\tau_s}{h} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

В связи с тем, что границы области являются дугами окружности, очевидно целесообразно перейти к цилиндрической системе координат [140],

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

в которой контактное давление является функцией преобразованных координат $p = p(\rho, \varphi, z)$, а его градиент

$$\operatorname{grad} p = \frac{\partial p}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{e}_z,$$

где $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z$ - единичный ортонормированный базис, связанный с базисом i, j, k стандартными соотношениями:

$$\begin{aligned} \bar{e}_\rho &= \frac{\partial x}{\partial \rho} i + \frac{\partial y}{\partial \rho} j + \frac{\partial z}{\partial \rho} k, \\ \bar{e}_\varphi &= \frac{\partial x}{\partial \varphi} i + \frac{\partial y}{\partial \varphi} j + \frac{\partial z}{\partial \varphi} k, \end{aligned} \tag{4.224}$$

⁴³ ГОСТ 4784-2019. Алюминий и сплавы алюминиевые деформируемые. М.: Стандартинформ, 2019. 30 с.

Кадымов, В. А. Математическое моделирование процесса затекания пластически деформируемого слоя в ребра/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская и др./ Сборник «Теорет. и прикл. механика». междунар. научно-техн. конф. (Белорусский нац. техн. ун-т). Минск: БНТУ, 2019. Вып.34. С.184 – 189.

Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование течения металла по плоскостям со свободным затеканием в ребра/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская/ Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста: матер. Всероссийской н.-техн. конф. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. С.337 – 342.

$$\bar{e}_z = \frac{\partial x}{\partial z} i + \frac{\partial y}{\partial z} j + \frac{\partial z}{\partial z} k.$$

Замена декартовой системы координат на цилиндрическую производится с помощью определителя матрицы Якоби:

$$J = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (4.225)$$

Вектор скорости запишем как функцию перемещений

$$\bar{v} = \bar{v}(u_\rho, v_\varphi, w_z).$$

Воспользуемся дифференциальным оператором дивергенции

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho u_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

или

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{1}{\rho} \left(u_\rho \frac{\partial \rho}{\partial \rho} + \rho \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

После очевидных преобразований имеем:

$$\operatorname{div} \bar{v} = \frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z}.$$

Теперь можно записать условие несжимаемости:

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial w_z}{\partial z} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4.226)$$

Векторное уравнение (4.222) перепишем в явном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} \bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \bar{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \bar{e}_z = - \frac{2\tau_s u_\rho \bar{e}_\rho + v_\varphi \bar{e}_\varphi + w_z \bar{e}_z}{h \sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2 + w_z^2}}. \quad (4.227)$$

Для условий плоского деформированного состояния имеем систему из трех уравнений:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{u_\rho}{\sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (4.228)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = - \frac{2\tau_s}{h} \frac{v_\varphi}{\sqrt{u_\rho^2 + v_\varphi^2}}; \quad (4.229)$$

$$\frac{\partial u_\rho}{\partial \rho} + \frac{u_\rho}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{d\lambda}{dt} = 0, \quad (4.230)$$

где $\lambda = \lambda(t) = \ln \left(\frac{h_0}{h(t)} \right)$ – степень накопленной деформации; h – конечная толщина деформируемого фланца.

4.4.4 Алгоритм решения краевой задачи стесненного сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра

Выделим область очага деформации $S_{1,1}$, (см. рис. 4.11):

$$s_{1,1} = \left\{ (r, \varphi) \left| \begin{array}{l} 0 < \varphi < \varphi_0 - \bar{\varphi}_0 \\ R_0 < r < R_3 \end{array} \right. \right. \quad (4.231)$$

На границе этой области компонента скорости $v_\varphi = 0$ (рис. 4.13), и при подстановке её значения в (4.228) и (4.229) имеем следующий вид уравнений задачи [238, 239]:

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = -\frac{2\tau_s}{h}; \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0.$$

Интегрированием дифференциального уравнения получим:

$$p_{1,1} = -\frac{2\tau_s}{h} r + C_{1,1}; \quad (4.232)$$

где $C_{1,1}$ – постоянная интегрирования, для нахождения которой воспользуемся граничными условиями: при $r = R_0, p = 2\tau_s$. Подставляем полученное значение в соотношение (4.232) имеем:

$$2\tau_s = \frac{2\tau_s R_0}{h} + C_{1,1}; \text{ где } C_{1,1} = 2\tau_s \frac{h - R_0}{h} = 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h} \right). \quad (4.233)$$

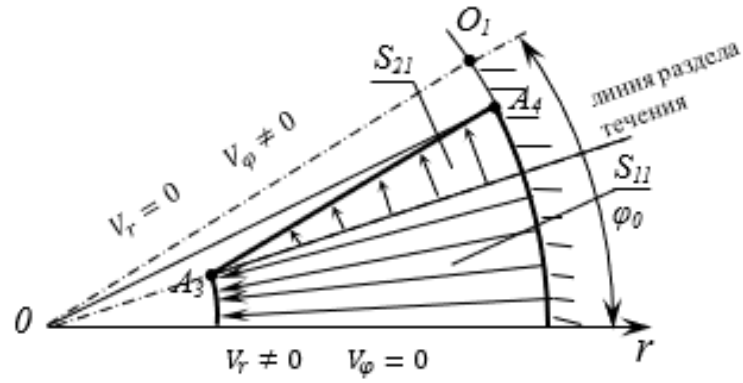


Рис. 4.13. Схема пластических подобластей $S_{1,1}$ и $S_{2,1}$ в плоскости $Or\varphi$ (стрелками показаны направления течения металла)

Найдем контактное давление в подобласти $S_{1,1}$:

$$p_{1,1} = -\frac{2\tau_s}{h}r + 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h}\right). \quad (4.234)$$

Так как $v_\varphi = 0$ условие несжимаемости (4.230) можно переписать:

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (4.235)$$

В момент времени деформирования t степень деформации :

$$\lambda = \lambda(t) = \ln\left(\frac{h_0}{h(t)}\right) = \ln h_0 - \ln h. \quad (4.236)$$

Продифференцируем (4.236) по времени $\frac{d\lambda}{dt} = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}$ и подставим в (4.235):

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0, \quad (4.237)$$

Разделяем переменные в уравнении (4.237):

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_r \right) + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} &= 0; \\ \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} &= -r \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}. \end{aligned}$$

Интегрируя, получим:

$$\begin{aligned} ru_r &= -\frac{r^2}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + C_{1,1}, \\ u_r &= -\frac{r}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + \frac{C_{1,1}}{r}, \end{aligned} \quad (4.238)$$

где $C_{1,1}$ – произвольная постоянная интегрирования, которую определим из граничных условий при $r = R_3$ скорость $u_r = 0$:

$$0 = -\frac{R_3^2}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} + C_{1,1}; \quad C_{1,1} = \frac{R_3^2}{2} \frac{1}{h} \frac{dh}{dt}.$$

Определим скорость в радиальном направлении:

$$u_r = \frac{R_3^2 - r^2}{2rh} \frac{dh}{dt}. \quad (4.239)$$

Обе части уравнения (4.239) умножим на dt :

$$\int u_r dt = \frac{R_3^2 - r^2}{2r} \int \frac{dh}{h}.$$

И в результате интегрирования получим перемещение:

$$U_r = \frac{R_3^2 - r^2}{2r} \ln h + \ln C. \quad (4.240)$$

Найдем произвольную постоянную C , из граничных условий $r = R_3$. Перемещение $U_r = 0$, поэтому $C = 0$. При подстановке значения произвольной постоянной в уравнение (4.240) получим $U_r = f(h)$:

$$U_r = \frac{R_3^2 - r^2}{2r} \ln h. \quad (4.241)$$

Силу в подобласти $S_{1,1}$ найдем интегрированием давления по площади:

$$\begin{aligned} P_{S_{1,1}} &= \iint_{S_{1,1}} p_{1,1} r dr d\varphi = \int_{R_0}^{R_3} r dr \int_0^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(\frac{2\tau_s}{h} r + 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h} \right) \right) d\varphi = \\ &= \int_{R_0}^{R_3} \left(\frac{2\tau_s}{h} r (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) + 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h} \right) (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \right) r dr = \end{aligned} \quad (4.242)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\tau_s r^3}{3h} (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \Big|_{R_0}^{R_3} + 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h} \right) (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \frac{r^2}{2} \Big|_{R_0}^{R_3}. \\ P_{S_{1,1}} &= \frac{2\tau_s (R_3^3 - R_0^3)}{3h} (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) + 2\tau_s \left(1 - \frac{R_0}{h} \right) (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \frac{(R_3^2 - R_0^2)}{2}. \end{aligned} \quad (4.243)$$

Пластическая область $S_{2,1}$ имеет границы:

$$s_{2,1} = \left\{ (r, \varphi) \left| \begin{array}{l} \varphi_0 - \bar{\varphi}_0 < \varphi < \varphi_0 - \bar{\varphi}_0 \\ R_0 < r < R_3 \end{array} \right. \right. \quad (4.244)$$

На внешних границах подобласти радиальная скорость $v_r \approx 0$. Из уравнений (4.228) и (4.229) получим систему

$$\frac{\partial p}{\partial \rho} = 0; \quad \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\frac{2\tau_s}{h},$$

из второго уравнения которой получим давление на контакте:

$$p_{2,1} = -\frac{2\tau_s}{h} r\varphi + C_{2,1}. \quad (4.245)$$

Воспользовавшись граничным условием при $r = R_\delta(\varphi)$ $p = 2\tau_s$. Тогда уравнение (4.245) примет вид:

$$2\tau_s = -\frac{2\tau_s}{h} R_\delta(\varphi)\varphi + C_{2,1}, \text{ где } C_{2,1} = 2\tau_s \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi\right).$$

Давление в подобласти $S_{2,1}$:

$$p_{2,1} = -\frac{2\tau_s}{h} r\varphi + 2\tau_s \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi\right). \quad (4.246)$$

Скорость v_φ определим из условия несжимаемости (4.230):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{h} \frac{dh}{dt} = 0. \quad (4.247)$$

$$\partial v_\varphi = -\frac{r}{h} \frac{dh}{dt} \partial \varphi,$$

интегрирование последнего дает:

$$v_\varphi = -\frac{r}{h} \frac{dh}{dt} \varphi + C_{2,0}. \quad (4.248)$$

Вычислим $C_{2,0}$

$$v_\varphi \approx 0 \text{ при } \varphi = \varphi_0 - \bar{\varphi}_0: C_{2,0} = \frac{r}{h} \frac{dh}{dt} (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0).$$

Тогда уравнение скорости примет вид:

$$v_\varphi = -\frac{r}{h} \frac{dh}{dt} (\varphi - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)). \quad (4.249)$$

Перемещение $U_\varphi = f(h)$ найдем, проинтегрировав выражение (4.249):

$$\int v_\varphi dt = -r (\varphi - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)) \int \frac{dh}{h}; U_\varphi = -r (\varphi - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)) \ln|h| + C. \quad (4.250)$$

Определим C , используя граничные условия, при $\varphi = 0$ перемещение $U_\varphi = 0$:

$$C = r(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \ln|h|,$$

тогда:

$$U_\varphi = -r(\varphi - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)) \ln|h| + r(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) \ln|h|, \text{ или}$$

$$U_\varphi = -r\varphi \ln|h|. \quad (4.251)$$

Силовые параметры в пластической области $S_{2,1}$:

$$\begin{aligned} P_{S_{2,1}} &= \iint_{S_{2,1}} p_{2,1} r dr d\varphi = \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} d\varphi \int_{R_\delta(\varphi)}^{R_3} \left(-\frac{2\tau_s}{h} r\varphi + 2\tau_s \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi \right) \right) r dr = \\ &= 2\tau_s \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} d\varphi \int_{R_\delta(\varphi)}^{R_3} \left(-\frac{r^2}{h} \varphi + \left(r + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi r \right) \right) dr = \\ &= 2\tau_s \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} d\varphi \left(-\frac{r^3}{3h} \varphi + \frac{r^2}{2} \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi \right) \right) \Big|_{R_\delta(\varphi)}^{R_3}. \end{aligned} \quad (4.252)$$

Подставим пределы интегрирования:

$$\begin{aligned} P_{S_{2,1}} &= 2\tau_s \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(\frac{R_\delta^3(\varphi)}{3h} \varphi - \frac{R_3^3}{3h} \varphi + \frac{R_3^2}{2} \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi \right) - \frac{R_\delta^2(\varphi)}{2} \left(1 + \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi \right) \right) d\varphi. \\ P_{S_{2,1}} &= 2\tau_s \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(\frac{R_\delta^3(\varphi)}{3h} \varphi - \frac{R_\delta^3(\varphi)}{2h} \varphi - \frac{R_\delta^2(\varphi)}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{R_3^2}{2} \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi - \frac{R_3^3}{3h} \varphi + \frac{R_3^2}{2} \right) d\varphi = \\ P_{S_{2,1}} &= 2\tau_s \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(-\frac{R_\delta^3(\varphi)}{6h} \varphi - \frac{R_\delta^2(\varphi)}{2} + \frac{R_3^2}{2} \frac{R_\delta(\varphi)}{h} \varphi - \frac{R_3^3}{3h} \varphi + \frac{R_3^2}{2} \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (4.253)$$

Воспользуемся свойством аддитивности определенного интеграла: интеграл суммы равен сумме интегралов

$$P_{S_{2,1}} = 2\tau_s \left(\int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(-\frac{R_\delta^3(\varphi)}{6h} \varphi \right) d\varphi - \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \frac{R_\delta^2(\varphi)}{2} d\varphi + \right. \quad (4.254)$$

$$+ \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \frac{R_3^2 R_\delta(\varphi)}{2h} \varphi d\varphi - \frac{R_3^3 \varphi^2}{3h} \Big|_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} + \frac{R_3^2}{2} \varphi \Big|_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}.$$

В уравнение (4.254) подставим $R_\delta(\varphi)$ (4.221) и отдельно проинтегрируем слагаемые, входящие в его состав. Слагаемое I.

$$\int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \left(-\frac{R_\delta^3(\varphi)}{6h} \varphi \right) d\varphi = \frac{1}{2h} \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0} \frac{R_0^3}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}^3} \frac{\varphi}{(\varphi - A)^3} d\varphi.$$

$$\begin{aligned} P_{S_{2,1}} = & \frac{\tau_s}{h} \frac{R_0^3}{(1 + \Phi_{OB}^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1}{(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}} - \frac{1}{(\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}} + \right. \\ & \left. + \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}}{\left((\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}} \right)^2} - \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}}{\left((\varphi_0 - \bar{\varphi}_0) - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}} \right)^2} \right) + \\ & + \tau_s \frac{R_0^2}{1 + \Phi_{OB}^2} \ln \left| \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}}{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 - \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}} \right| + \frac{R_0}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{R_3^2 \tau_s}{h} (\bar{\varphi}_0 - \varphi_0) + \quad (4.256) \\ & + \frac{R_0 \operatorname{arctg} \frac{1}{\Phi_{OB}}}{\sqrt{1 + \Phi_{OB}^2}} \cdot \frac{R_3^2 \tau_s}{h} \ln \left| \frac{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 - A}{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0 - A} \right| + \frac{R_3^3 \tau_s}{3h} (\bar{\varphi}_0 - \varphi_0) \cdot (2\varphi_0 - (\varphi_0 + \bar{\varphi}_0)) + \\ & + R_3^2 \tau_s (\bar{\varphi}_0 - \varphi_0). \end{aligned}$$

В общем случае поковка может иметь конечное число продольных рёбер n , симметрично расположенных на стержневой части. Поэтому общая сила деформирования фланцевой части поковки будет содержать n сумм:

$$P_\Sigma = n(2P_{S_{1,1}} + 2P_{S_{2,1}}). \quad (4.257)$$

4.4.5 Кинематические параметры процесса сжатия пластического слоя с затеканием металла в продольные ребра

Для определения радиальных и угловых деформаций используем рассчитанные перемещения материальных точек деформируемого тела и соотношения Коши.

Компоненты перемещений в направлении координатных осей:

$$\begin{aligned} U_r &= \left(\frac{R_3^2}{2r} - \frac{r}{2} \right) \ln|h_z|, U_\varphi = -r \ln|h_z|, \\ U_z &= 2h_z(\ln|h_z| - 1) - 2h(\ln|h| - 1), \end{aligned} \quad (4.258)$$

где h – высота фланцевой части заготовки; h_z – текущая высота.

Уравнения Коши для деформаций:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rr} &= \frac{\partial U_r}{\partial r}; \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{U_r}{r}; \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z}; \\ \varepsilon_{r\varphi} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi}{\partial r} - \frac{U_\varphi}{r} \right). \end{aligned} \quad (4.259)$$

Перепишем деформации с учетом (4.258):

$$\varepsilon_{rr} = \left(-\frac{R_3^2}{2r^2} - \frac{1}{2} \right) \ln|h| = -\frac{1}{2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} + 1 \right) \ln|h|; \quad (4.260)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = -\ln|h| + \frac{1}{2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} - 1 \right) \ln|h| = \frac{1}{2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} - 3 \right) \ln|h|; \quad (4.261)$$

$$\varepsilon_{zz} = 2\ln|h|; \quad (4.262)$$

$$\varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2} (-\ln|h|\varphi - \ln|h|\varphi) = -\ln|h|\varphi. \quad (4.263)$$

Проверим выполнение условия несжимаемости:

$$\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} + \varepsilon_{zz} = 0. \quad (4.264)$$

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} + 1 \right) \ln|h| + \frac{1}{2} \left(\frac{R_3^2}{r^2} - 3 \right) \ln|h| + 2\ln|h| = \left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \ln|h| + 2\ln|h| = 0.$$

Подстановкой найденных значений деформаций убеждаемся, что условие несжимаемости выполняется.

4.4.6 Сила с учетом преодоления трения по плоскостям выдавливаемых рёбер

Силы трения препятствуют затеканию металла в пазы матрицы, формирующие ребра, и ее следует учитывать при расчете силы выдавливания [25, 27, 120, 121, 233, 235].

В процессе сжатия фланца (рис. 4.14 а) увеличиваются высоты выдавливаемых участков ребер. На промежуточном этапе затекания металла в пазы матрицы покажем в плоскости Orz (рис. 4.14 б) составляющие скорости течения.

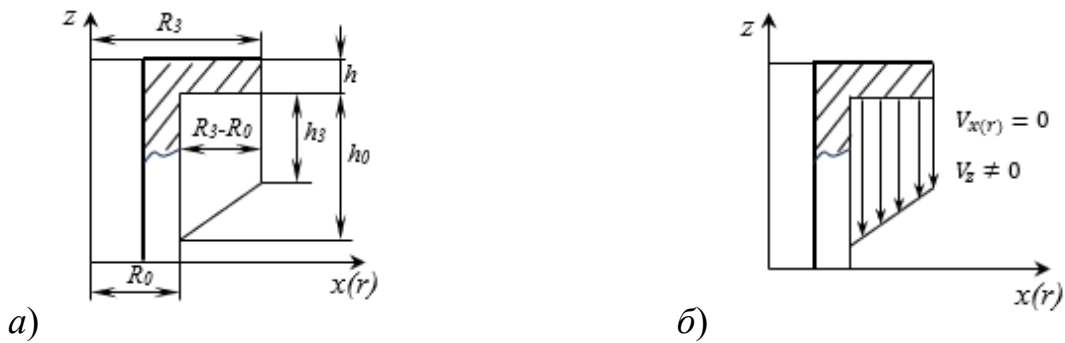


Рис. 4.14. Формирование ребра в плоскости Orz : а – параметрическая модель; б – составляющая скорости течения

Деформация по высоте фланца постоянна в фиксированный момент

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial U_z}{\partial z} = \frac{\Delta h}{h},$$

Метод баланса работ [40, 69, 71, 130, 132] позволяет найти силу на контактной поверхности стержневой части поковки:

$$P\Delta h = -\sigma_s \frac{\Delta h}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \int_0^{h_0} r dr d\varphi dz - \tau_k \frac{\Delta h}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} r^2 dr d\varphi; \quad (4.265)$$

$$P = -\sigma_s \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \int_0^{h_0} r dr d\varphi dz - \tau_k \frac{1}{h} \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} r^2 dr d\varphi;$$

$$P = -\sigma_s \frac{2\pi R_0^2}{h} \frac{h_0}{2} - \tau_k \frac{2\pi R_0^3}{h} \frac{1}{3};$$

$$P = -\sigma_s \frac{\pi}{h} R_0^2 h_0 - \tau_k \frac{2\pi R_0^3}{3h} = -\pi R_0^3 \left(\frac{\sigma_s}{R_0} + \frac{2\tau_k}{3h} \right). \quad (4.266)$$

Касательное напряжение на контакте стержневой части поковки имеет максимум

$\tau_k = \frac{\beta\sigma_s}{2}$, поэтому значение силы:

$$P = -\pi R_0^3 \left(\frac{\sigma_s}{R_0} + \frac{\beta\sigma_s}{3h} \right) = -\pi R_0^3 \sigma_s \left(\frac{3h + \beta\sigma_s R_0}{R_0 3h} \right) = -\pi R_0^2 \sigma_s \left(1 + \frac{\beta\sigma_s}{3h} \right). \quad (4.267)$$

Определим суммарную площадь контакта рёбер с поверхностью матрицы:

$$F_{mp} = (2(R_3 - R_0) + t)h_p n,$$

где n – число ребер; h_p – высота ребра; t – толщина ребра. Поверхность стыка рёбер со стержнем поковки свободна от трения и силу (4.266) необходимо уменьшить на величину:

$$\begin{aligned} \Delta P &= -\frac{\sigma_s}{h} \int_0^{R_0} \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 + \bar{\varphi}_0} \int_0^h r dr d\varphi dz - \frac{\beta\sigma_s}{2h} \int_0^{R_0} \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 + \bar{\varphi}_0} r^2 dr d\varphi = \\ &= -\frac{\sigma_s R_0^2}{2h} 2\bar{\varphi}_0 h - \frac{\beta\sigma_s R_0^3}{2h} \frac{2\bar{\varphi}_0}{3} = -\sigma_s R_0^2 \bar{\varphi}_0 \left(1 + \frac{\beta R_0}{3h} \right). \end{aligned} \quad (4.268)$$

Сила выдавливания центральной части

$$\begin{aligned} P_{cm} &= -\pi R_0^2 \sigma_s \left(1 + \frac{\beta R_0}{3h} \right) + n \sigma_s R_0^2 \bar{\varphi}_0 \left(1 + \frac{\beta R_0}{3h} \right) = \\ &= -\sigma_s R_0^2 \left(1 + \frac{\beta R_0}{3h} \right) (\pi - n \bar{\varphi}_0). \end{aligned} \quad (4.269)$$

Сила выдавливания рёбер с учетом внешней контактной поверхности фланца радиусом R_3 и высотой h :

$$\begin{aligned} P_{BH} \Delta h &= -\sigma_s \frac{\Delta h}{h} \int_{R_0}^{R_3} \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 + \bar{\varphi}_0} \int_0^{h_3} r dr d\varphi dz - \frac{\beta\sigma_s \Delta h}{2} \frac{1}{h} \int_{R_0}^{R_3} \int_{\varphi_0 - \bar{\varphi}_0}^{\varphi_0 + \bar{\varphi}_0} r^2 dr d\varphi \\ P_{BH} &= -\frac{\sigma_s}{h} \frac{r^2}{2} \Big|_{R_0}^{R_3} (\varphi_0 + \bar{\varphi}_0 - (\varphi_0 - \bar{\varphi}_0)) h_3 - \frac{\beta\sigma_s}{2h} \frac{r^3}{3} \Big|_{R_0}^{R_3} \cdot 2\bar{\varphi}_0 = \\ &= -\frac{\sigma_s h_3}{2} \frac{1}{h} (R_3^2 - R_0^2) 2\bar{\varphi}_0 - \frac{\beta\sigma_s}{3h} (R_3^3 - R_0^3) \bar{\varphi}_0 = \\ &= -\sigma_s \bar{\varphi}_0 (R_3 - R_0) \left(\frac{h_3}{h} (R_3 + R_0) + \frac{\beta}{3h} (R_3^2 + R_3 R_0 + R_0^2) \right). \end{aligned} \quad (4.270)$$

С учетом только одной плоскости ребра сила трения:

$$P_{\text{бок}}^1 = \frac{\beta \sigma_s}{4} (h_0 + h_3)(R_3 - R_o). \quad (4.271)$$

Каждое ребро имеет две поверхности трения, поэтому уравнение для силы трения запишем:

$$P_{\text{бок}} = n \frac{\beta \sigma_s}{2} (h_0 + h_3)(R_3 - R_o). \quad (4.272)$$

Общая сила трения, действующая в плоскости Orz и которую нужно преодолевать в процессе течения металла поковки:

$$P = -\sigma_s R_0^2 \left(1 + \frac{\beta R_o}{3h} \right) (\pi - n\bar{\varphi}_0) - n \frac{\beta \sigma_s}{2} (h_0 + h_3)(R_3 - R_o) - \sigma_s \bar{\varphi}_0 (R_3 - R_o) \left(\frac{h_3}{h} (R_3 + R_o) + \frac{\beta}{3h} (R_3^2 + R_3 R_o + R_o^2) \right). \quad (4.273)$$

4.4.7 Расчетные характеристики математической модели процесса стесненного сжатия пластического слоя с затеканием материала в продольные ребра

На основе общего подхода к аналитическому решению задач течения тонкого слоя по поверхностям со свободным затеканием в пазы матрицы, которые формируют контурные или продольные ребра конкретных изделий, разработана программная реализация представленного алгоритма на языке *Python*. В качестве исходных данных задаются геометрические параметры изделия, механические характеристики деформируемого материала, условия трения на контактных поверхностях. Результатом работы программы являются давление на поверхностях контакта растекающегося слоя и инструмента, сила, необходимая для затекания материала в пазы матрицы, формирующих ребра, а также кинематические параметры в виде скоростей течения слоя.

При изменении параметров математической модели, программа обеспечивает вариативность получаемых результатов, которые визуализируются в виде графиков.

Разработанная программа для ЭВМ прошла государственную регистрацию в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации (Роспатент), на которую получено свидетельство № 2025614081 [235] и является составной частью программного комплекса, представленного в диссертации.

4.5 Выводы по главе 4

1. Для односвязной области в виде открытого полого параллелепипеда без одной из фронтальных плоскостей, который можно получить сжатием пластического слоя, представлен подход к расчету силовых и кинематических параметров процесса деформации. Для выделенных подобластей $S_{ij}(x, y)$ с характерным течением металла сформулирована краевая задача в соответствии с теорией течения А.А. Ильюшина, основанной на модели «идеальной жидкости». Получено полное аналитическое решение задачи, на основе которого разработан алгоритм расчета силовых, кинематических и деформационных параметров процесса сжатия относительно тонкого пластического слоя.

2. Представленные результаты доказывают, что можно строить области более сложной конфигурации (двухсвязные и многосвязные) и применять единый теоретический метод для получения полных аналитических решений краевых задач в трехмерной постановке, при этом общий подход не изменяется, что позволяет говорить об универсальности математических моделей и алгоритмов их реализации.

3. Сравнение полученных теоретическим анализом численных оценок НДС, силовых, кинематических и деформационных параметров реальных процессов изготовления объектов конкретных форм и размеров с экспериментальными результатами независимых исследователей показало удовлетворительное совпадение результатов с расхождением не более 17%.

ГЛАВА 5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ТОНКОЛИСТОВЫМ И ТОНКОСТЕННЫМ ОБЪЕКТАМ

Материалы главы 5 соответствует паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) в направлениях исследований пункту 1: Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений, в частности напряженно-деформированного состояния тонколистовых и тонкостенных объектов, которому соответствуют публикации автора [123, 237, 239, 240, 242, 243, 244, 245, 246, 248, 249, 250, 251, 252, 253, 258, 259, 262, 266, 278, 279, 280, 281, 282, 283, 284, 285, 286, 287, 288, 289, 290, 291, 292, 294, 295, 296, 297, 318].

5.1 Классификационные признаки исходных объектов

Выпускаемый металлургической промышленностью листовой металл по толщине подразделяется на два вида [236]: тонколистовой — листы толщиной до 3,9 мм; толстолистовой — от 4 до 160 мм.

Кроме того, востребованным является трубный прокат для изготовления оболочковых изделий.

Существует опыт изготовления полых полуфабрикатов с помощью операций раздачи, обжима и вытяжки в холодном состоянии [237-267] или с применением температурной интенсификации [251-260] тонкостенных [248-253, 261] и толстостенных [262-264] трубных заготовок [265]. Классификационные характеристики, позволяющие разделить трубную продукцию на четыре группы [266]: особо тонкостенные, тонкостенные, толстостенные и особо толстостенные приведены для холоднодеформированных труб в действующем стандарте [265],

согласно которому группы выделены в соответствии с двумя геометрическими параметрами - наружным диаметром D_n и толщиной стенки s :

– особо тонкостенными считают трубы при отношении $\frac{D_n}{s} > 40$ и трубы диаметром 20 мм и менее с толщиной и стенки $s \leq 0,5$;

– тонкостенные с относительным диаметром $12,5 < \frac{D_n}{s} \leq 40$ и трубы диаметром 20 мм и менее с толщиной и стенки $s = 1,5$;

– толстостенные при $6,0 < \frac{D_n}{s} \leq 12,5$;

– особо толстостенные, если $\frac{D_n}{s} < 6,0$.

Согласно приведенным данным построен график (рис.6.1), отражающий границы диапазонов перечисленных областей применимости трубных заготовок.

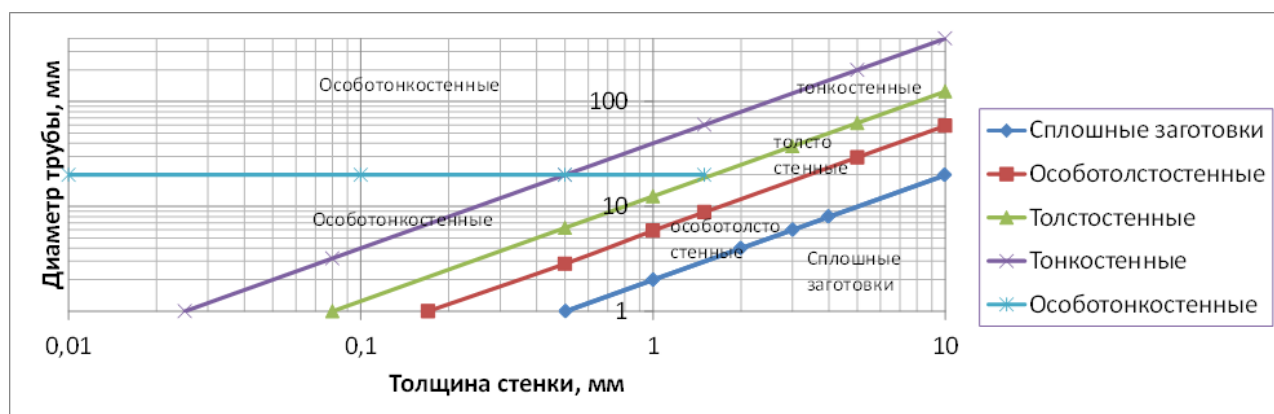


Рис. 5.1. Классификация областей применимости трубных заготовок

5.2 Виды нагружения в процессах деформирования

Технологические процессы формоизменения деформированием, как правило, нестационарны, и реализуются в результате сложного нагружения при изменяющихся во времени механических схемах. При сложном нагружении в схемах деформации, отличающихся немонотонностью, направление траектории деформации, по меньшей мере, один раз изменяется на противоположное, сюда же относятся процессы дробного деформирования. В механике сплошной среды [47,

208] для несжимаемого материала деформация материальной точки представляется как траектория движения радиус-вектора в пятимерном пространстве независимых компонент тензора деформаций. При этом, деформация физической частицы называется простой, если соответствующая ей траектория есть прямая, выходящая из начала координат, так что все ее четыре кривизны равны нулю ($\chi_n(s) \equiv 0, n = 1, 2, 3, 4$, где s длина дуги траектории). В противном случае, при сложном нагружении траектория, вычерчиваемая концом радиуса-вектора негладкая, имеющая изломы [19] или гладкая, но с кривизной, значение которой отлично от нуля на любом малом, конечном отрезке, либо на траектории деформирования имеется точка излома. Такое нагружение называется сложным. Поскольку длина линии нагружения является мерой накопленной деформации материальной точкой, то немонотонной деформации соответствует большая ее величина, т.к. длина ломаной линии или гладкой кривой больше длины луча - радиуса-вектора. Таким образом, если немонотонное деформирование осуществить для большинства точек тела, то его форму можно изменять с большей степенью деформации. Кроме того, при выборе процессов деформирования из ряда альтернатив следует отдавать предпочтение механическим схемам деформации, в которых преобладают сдвиги [267]. Обоснованием для такого выбора является оценка напряженно-деформированного состояния (НДС) штампуемого металла, обеспечивающее монотонное деформирование, и, вместе с тем, устойчивое протекание процесса формоизменения. Выделим один частный случай сложной деформации частицы. Пусть l_0 – характерное значение длины дуги траектории деформации. Если $|\chi_n| \ll \frac{1}{l_0}$ при всех n , то траектория называется траекторией малой кривизны. Отметим, что траектория малой кривизны может сколь угодно сильно отличаться от прямой. Иначе говоря, она может представлять собой существенно более сложный процесс деформации. В настоящей работе ограничимся рассмотрением процессов, близких к простому нагружению. Оценка истинной накопленной деформации в рассматриваемом элементе на участках траектории деформации малой кривизны может быть осуществлена с помощью степени деформации по А.А.Ильюшину

$$\varepsilon_i^{(N)} = \int_{t_0}^{t_N} d\varepsilon_i(t) = \int_{t_0}^{t_N} \xi_i(t) dt, \quad (5.1)$$

где ξ_i – интенсивность скоростей деформации.

Обобщенное представление о напряженно-деформированном состоянии выделенного объёма или тела в целом (на макроскопическом уровне) можно получить, ориентируясь на круговые диаграммы О. Мора [268-270] для напряжений и деформаций, из которых следует экстремальность главных напряжений и главных деформаций. Независимо от выбранной системы координат напряженно-деформированное состояние оценивают безразмерными инвариантными характеристиками тензоров или девиаторов напряжений и деформаций.

5.3 Базовые инвариантные показатели напряженно-деформированного состояния

Из теории пластичности известны инвариантные характеристики, помогающие поставить в соответствие различным схемам напряженно-деформированного состояния количественные показатели. Рассмотрим наиболее популярные из них.

Параметр Надаи – Лоде является показателем вида напряженного или деформированного состояний. Для напряженного состояния он выглядит следующим образом [40, 47, 56, 69]:

$$\begin{aligned} v_\sigma &= \frac{27I_3(D_\sigma)}{2(I_2(D_\sigma))^{\frac{3}{2}}} = \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} = \sqrt{3} \operatorname{tg} \left(\varphi_\sigma - \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= -\sqrt{3} \operatorname{ctg} \left(\varphi_\sigma + \frac{4\pi}{3} \right), \end{aligned} \quad (5.2)$$

где φ_σ – угол вида напряженного состояния $0 \leq \varphi_\sigma \leq \frac{\pi}{3}$, причем

$$\cos 3\varphi_\sigma = \frac{27I_3(D_\sigma)}{2\sigma_i^3};$$

$I_2(D_\sigma)$ – второй инвариант девиатора напряжений, характеризующий величину напряжений, вызывающих пластическое формоизменение; $I_3(D_\sigma)$ – третий инвариант девиатора напряжений, являющийся характеристикой вида напряженного состояния, вызывающего пластическое формоизменение; интенсивность нормальных напряжений, являющаяся скалярной величиной

$$\sigma_i = \sqrt{3I_2(D_\sigma)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (5.3)$$

Тот же показатель, но для схем деформированного состояния описан зависимостью [71]:

$$v_\varepsilon = \frac{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_3}{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}, \quad (5.4)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные деформации.

Одна из форм связи напряженного и деформированного состояний деформируемого твердого тела выражается равенством соответствующих показателей $v_\sigma = v_\varepsilon$. При численном равенстве показателей Надаи – Лоде $v_{\sigma(\varepsilon)} = -1$, реализуются механические схемы с преобладанием растяжения, при $v_{\sigma(\varepsilon)} = 1$, схемы с ярко выраженным неравномерным сжатием и, наконец, при показателе $v_{\sigma(\varepsilon)} = 0$ – плоские механические схемы с преобладанием сдвига.

Показатель жесткости схемы напряженного состояния [273]:

$$\eta = \frac{3\sigma_{\text{ср}}}{\sigma_i}, \quad (5.5)$$

где $\sigma_{\text{ср}} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$ – среднее нормальное напряжение или гидростатическое давление; $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ – показатель схемы напряженного состояния [286], которые являются производными инвариантами от базовых. Критическая интенсивность деформации, накопленная в процессе формоизменения, может быть оценена [287]:

$$\frac{\varepsilon_{ikk}}{n} = \frac{2\sqrt{1 - \alpha + \alpha^2}}{2 - \alpha}. \quad (5.6)$$

Кроме того, введены [275] безразмерные характеристики, связывающие параметр Надаи – Лоде (6.4) и показатель жесткости схемы напряженного состояния (5.5):

$$\psi = \frac{27I_3(D_\sigma)}{2(I_2(D_\sigma))^{\frac{3}{2}}} = \frac{27\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3}{\sigma_i^3} =$$

$$= \left(\frac{3 - \nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} + \eta \right) \cdot \left(\frac{2\nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} + \eta \right) \cdot \left(\eta - \frac{3 - \nu_\sigma}{3\sqrt{3 + \nu_\sigma^2}} \right), \quad (5.7)$$

а также энергозатраты на работу упругого изменения единицы объема, находящегося в условиях данной механической схемы деформации:

$$\Phi = \frac{18\xi A_0}{\sigma_i^2} = \eta^2, \quad (5.8)$$

где

$$\xi = \frac{E}{3(1 - 2\mu_p)} \quad (5.9)$$

— объемный модуль упругости (E – модуль Юнга; μ_p – коэффициент Пуассона);

$$A_0 = \frac{3}{2} \sigma_{cp} \cdot \varepsilon_{cp} \quad (5.10)$$

— работа упругого изменения единицы объема;

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{3} = \frac{\sigma_{cp}}{2\xi} = \frac{\sigma_{cp}}{E} (1 - 2\mu_p) \quad (5.11)$$

— величина средней деформации, также является производным инвариантом.

5.4 Обобщенные модели напряженного и деформированного состояний

Принимая во внимание тригонометрическую форму представления главных напряжений, компоненты девиатора напряжений примут вид [28, 72, 275]:

$$S_1 = \frac{2}{3} \sigma_i \cos \varphi_\sigma; \quad S_2 = \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\varphi_\sigma + \frac{4\pi}{3} \right); \quad S_3 = \frac{2}{3} \sigma_i \cos \left(\varphi_\sigma + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (5.12)$$

При пластической деформации напряженно-деформированное состояние описывается соответствующими девиаторами, то расчетом по (6.12), с учетом условия экстремальности:

$$S_1 > S_2 > S_3, \quad (5.13)$$

получим значения нормальных компонент девиатора напряжений в зависимости от φ_σ – угла вида напряженного состояния, которые поместим отдельными строками в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Значения параметров напряженно-деформированного состояния

$\varphi_{(\sigma)\varepsilon}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$
S_p	$\frac{2}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$\frac{1}{3}\sigma_i$	0	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$-\frac{2}{3}\sigma_i$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	0	$\frac{1}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$
S_z	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	0	$\frac{1}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$\frac{2}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$\frac{1}{3}\sigma_i$	0	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$-\frac{2}{3}\sigma_i$	$-\frac{2}{3}\sigma_i$
S_θ	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$-\frac{2}{3}\sigma_i$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$-\frac{1}{3}\sigma_i$	0	$\frac{1}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$\frac{2}{3}\sigma_i$	$\frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_i$	$\frac{1}{3}\sigma_i$	0
$\alpha = \frac{\sigma_\theta}{\sigma_p}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	1	0
$\frac{1}{\alpha}$	-2	-	1	-	-2	-	1	-	-2	-	1	-
ε_p	ε_i	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$-\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$
ε_z	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	ε_i	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$-\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$
ε_θ	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$-\varepsilon_i$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$-\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	ε_i	$\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_i$	$\frac{1}{2}\varepsilon_i$	0
$\frac{e_{ik\rho}}{n}$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{7}}{5}$	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
Ψ	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0
$v_{(\sigma)\varepsilon}$	-1	0	1	0	-1	0	1	0	-1	0	1	0

Поскольку при пластическом деформировании $S_{cp} = 0$ и $\varepsilon_{cp} = 0$, то соответствующие тензоры совпадают с девиаторами.

5.4.1 Графоаналитическая модель напряженного состояния

Если на плоскость сечения цилиндра пластичности девиаторной плоскостью спроецировать оси системы координат, в которой он построен, то проекции осей, расположенные под углом $\frac{2\pi}{3}$, образуют косоугольную систему координат [276, 277].

Отобразим графически модель напряженного состояния на девиаторной плоскости (рис. 6.2), выполняя действия по следующему алгоритму [278 – 280].

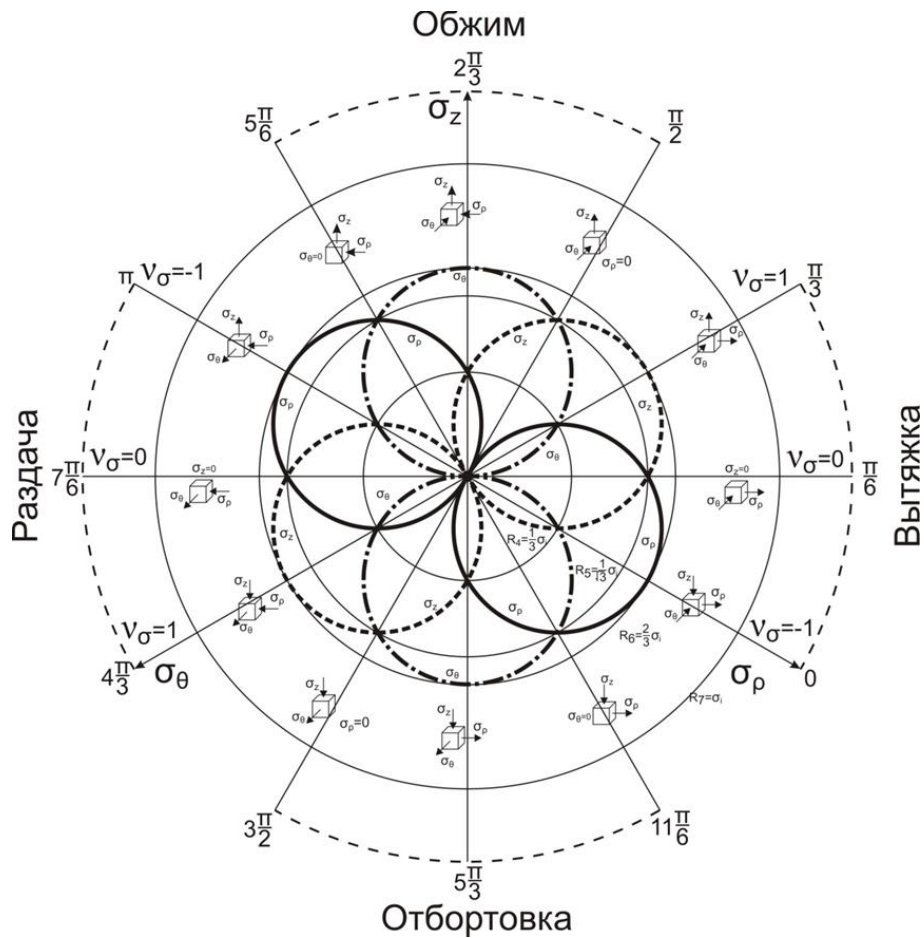


Рис. 6.2. Графоаналитическая модель напряженного состояния

Из начала этой системы координат проведем концентрические окружности радиусами

$$R_4 = \frac{1}{3} \sigma_i; \quad R_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} \sigma_i; \quad R_6 = \frac{2}{3} \sigma_i; \quad R_7 = \sigma_i;$$

где σ_i производный инвариант примем за масштабный коэффициент. Возьмем шаг по углу вида напряженного состояния $\Delta\varphi_\sigma = \frac{\pi}{6}$. В этом случае значения главных напряжений ложатся на дуги окружностей радиусами R_4 , которые в каждом интервале угла вида напряженного состояния φ_σ , соответствуют траекториям главных напряжений. Центры траекторий главных напряжений в виде окружностей лежат на одной окружности с радиусом R_4 , центр которой совпадает с началом косоугольной системы координат. Каждому из направлений, задаваемых углом вида напряженного состояния, соответствует единственная механическая схема напряжений, анализ которых позволяет определить, какими значениями угла вида напряженного состояния φ_σ характеризуются известные схемы напряженного состояния.

Кроме механических схем, модель напряженного состояния однозначно определяет знаки главных напряжений. В интервале $(0 \leq \varphi_\sigma \leq \frac{\pi}{3})$ схемы напряженного состояния изменяются от объемной с двумя напряжениями сжатия через плоскую разноименную схему сдвига к объемной схеме, но уже с двумя напряжениями растяжения, другими словами, с шагом по углу $\Delta\varphi_\sigma = \frac{\pi}{6}$ объемные схемы напряженного состояния чередуются с плоскими схемами чистого сдвига. Если определенным интервалам по углу φ_σ поставить в соответствие, например основные операции листовой штамповки, тогда схема, будет следующая [291-295]. Интервалу $(\frac{3\pi}{2} \leq \varphi_\sigma \leq \frac{11\pi}{6})$ соответствует такая операция, как отбортовка, с характерными для неё схемами напряженного состояния; интервалу $(\pi \leq \varphi_\sigma \leq \frac{4\pi}{3})$ – схемы напряженного состояния, характерные для операции раздача; для углов $(\frac{\pi}{2} \leq \varphi_\sigma \leq \frac{5\pi}{6})$ – схемы напряжений, связанные с обжимом; в интервале $(0 \leq \varphi_\sigma \leq \frac{\pi}{3})$ – реализуются схемы напряженного состояния, соответствующие операции вытяжка.

Следует отметить, что вытяжка является одной из сложных операций формоизменения листового материала. В помощь технологам, специализирующимся на разработке технологических процессов вытяжки, разработаны алгоритм и математическая модель определения технологических параметров операции вытяжки, представленные в виде компьютерной программы, зарегистрированной в

Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации Роспатента свидетельство № 2019660522 [283]. Программная реализация в диалоговом режиме позволяет рассчитать параметры технологического процесса вытяжки осесимметричных деталей с фланцем и без фланца, существенно сокращая время проектирования технологии. Разработаны алгоритм и математическая модель представленные в виде компьютерной программы, зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации Роспатента свидетельство № 2025613951 «динамическое нагружение полого стержня» [284].

Если рассмотреть объемное деформирование, то схемы напряженного состояния, определяемые сдвигом, будут сопровождать, например, процессы углового прессования, причем из которых каждая соответствует определенному положению заготовки в каналах матрицы штампов для углового прессования [285–290] относительно выбранной системы координат.

Кривизна траекторий напряжений аналогично деформациям дает возможность утверждать о немонотонности процессов деформирования при реализации перечисленных операций обработки металлов давлением (ОМД).

С учетом тригонометрической формы главных напряжений представим разности нормальных компонент тензора напряжений в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_1 - \sigma_3 &= \frac{2}{3} \sigma_i \left(\cos \varphi_\sigma - \cos \left(\varphi_\sigma + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_i \sin \left(\varphi_\sigma + \frac{\pi}{3} \right); \\ \sigma_3 - \sigma_2 &= \frac{2}{3} \sigma_i \left(\cos \left(\varphi_\sigma + \frac{2\pi}{3} \right) - \cos \left(\varphi_\sigma + \frac{4\pi}{3} \right) \right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_i \sin \varphi_\sigma; \\ \sigma_2 - \sigma_1 &= \frac{2}{3} \sigma_i \left(\cos \left(\varphi_\sigma + \frac{4\pi}{3} \right) - \cos \varphi_\sigma \right) = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \sigma_i \sin \left(\varphi_\sigma + \frac{2\pi}{3} \right).\end{aligned}\tag{5.14}$$

Тем самым определены главные касательные напряжения $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$, равные полуразностям соответствующих главных нормальных напряжений.

5.4.2 Графоаналитическая модель деформированного состояния

Построим на девиаторной плоскости диаграмму деформаций [276, 277, 291], которая будет отображать модель деформированного состояния. Для этого рассмотрим в качестве координатных осей главные оси деформаций. Их расположение таково, что для любой точки плоскости с радиусом-вектором $\bar{\varepsilon}$ удовлетворяется условие несжимаемости:

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = 0, \quad (5.15)$$

где компоненты девиатора деформаций в тригонометрической форме представлены выражениями [28, 283]:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_i \cos \varphi_\varepsilon; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_i \cos \left(\varphi_\varepsilon + \frac{4\pi}{3} \right); \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_i \cos \left(\varphi_\varepsilon + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (5.16)$$

и где φ_ε – угол вида деформированного состояния;

$$\cos \varphi_\varepsilon = \frac{4I_3(D_\varepsilon)}{\varepsilon_i^3};$$

$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4I_2(D_\varepsilon)}{3}}$ – интенсивность деформаций; $I_2(D_\varepsilon)$ – второй инвариант девиатора деформаций, характеризующий величину деформаций, вызывающих пластическое формоизменение. При этом модуль вектора $\bar{\varepsilon}$ равен интенсивности деформаций, например, при осесимметричном напряженно-деформированном состоянии [19, 28]:

$$|\bar{\varepsilon}| = \varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(\varepsilon_\rho - \varepsilon_\theta)^2 + (\varepsilon_\theta - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_\rho)^2}. \quad (5.17)$$

Принимая во внимание осевую симметрию деформирования, часто встречающуюся в формоизменяющих операциях ОМД, деформации $\varepsilon_\rho, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$, рассматриваемые в цилиндрической системе координат, будут главными, поэтому $\varepsilon_\rho = \varepsilon_1, \varepsilon_\theta = \varepsilon_2, \varepsilon_z = \varepsilon_3$. Отобразим на девиаторной плоскости проекции главных осей деформаций (рис. 6.3).

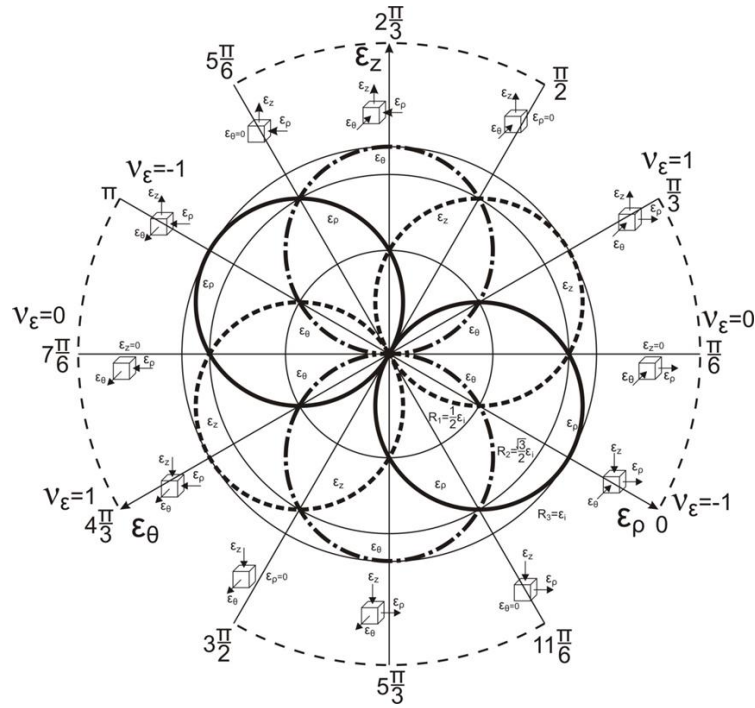


Рис. 5.3. Графоаналитическая модель деформированного состояния

В данном случае проекция оси ε_ρ совпадает с направлением, соответствующим значению угла вида деформированного состояния $\varphi_\varepsilon = 0$, проекция оси ε_z совпадает с направлением, определяемым углом $\varphi_\varepsilon = \frac{2\pi}{3}$, а проекция оси ε_θ совпадает с направлением при значении угла $\varphi_\varepsilon = \frac{4\pi}{3}$. Построим концентрические окружности с центрами, расположенными в начале системы координат и с радиусами соответственно

$$R_1 = \frac{1}{2} \varepsilon_i; \quad R_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon_i; \quad R_3 = \varepsilon_i,$$

где производный инвариант интенсивность деформаций ε_i принимается за масштабный коэффициент. Кроме проекций главных осей выберем на диаграмме дополнительно направления с шагом по углу $\Delta\varphi_\varepsilon = \frac{\pi}{6}$ в интервале $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 2\pi$. В табл. 6.1 сведены результаты расчета главных деформаций по формулам (5.16) для каждого значения угла вида деформированного состояния. Отметим значения главных деформаций в виде точек на соответствующих направлениях и соединим сходственные из них дугами окружностей радиусом R_1 , получим траектории деформаций, кривизна которых говорит о немонотонности процессов

деформирования (см. рис. 5.2). Кроме того, каждое направление однозначно характеризуется механической схемой деформаций, анализ которых показывает, что кроме направлений при углах вида деформированного состояния $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{7\pi}{6}$ механические схемы сдвига дополнительно реализуются при углах вида деформированного состояния $\frac{\pi}{2}$; $\frac{5\pi}{6}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{11\pi}{6}$. Это означает, что параметр Надаи – Лоде для деформаций по указанным направлениям должен быть равен $\nu_\varepsilon = 0$. Однако расчет показывает, что либо его значение существует, либо оно характеризуется числом большим 1, или меньшим -1 . В характерных точках шестигранной призмы контура пластичности, при условии использования условия пластичности Треска – Сен-Венана, существует неоднозначность пластического течения, так как вектор приращения деформации может иметь множество направлений.

При условии пластичности Мизеса – Хилла картина повторяется, эти же точки лежат на поверхности цилиндра пластичности и имеют ту же неопределенность течения. Эти точки сингулярности совпадают с указанными выше направлениями кинематической модели.

Из полученных диаграмм (см. рис. 5.1 и 5.2) следует, что при больших значениях деформаций и напряжений кривизны их траекторий

$$\frac{1}{R_1} = \frac{2}{\varepsilon_i}, \quad \text{и} \quad \frac{1}{R_4} = \frac{2}{\sigma_i}$$

являются малыми величинами, а при малых приращениях $d\varepsilon_i$ и $d\sigma_i$ их можно представить участками прямых, что соответствует простому нагружению. Другими словами, для процессов сложного нагружения справедлив математический аппарат, полученный для простого нагружения.

Определим величину жесткости схемы напряженного состояния (5.5) для этого воспользуемся методикой, предложенной в работе [291], с той разницей, что вместо плоского рассмотрим более общее осесимметричное напряженно-деформированное состояние.

Значение конечных деформаций можно представить как

$$\varepsilon_\rho = \ln \frac{d\rho}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \ln \frac{\rho}{r}, \quad \varepsilon_z = \ln \frac{h}{h_0}, \quad (5.18)$$

где r, h_0, ρ, h – соответственно радиус и высота выделенного элемента в исходном и деформированном состояниях формоизменяемого тела.

Подставим (6.18) в условие несжимаемости (6.15), после почленного дифференцирования получим:

$$\rho \frac{d\varepsilon_\theta}{d\rho} = 1 - e^{\varepsilon_z} e^{2\varepsilon_\theta}. \quad (5.19)$$

После интегрирования уравнения (6.19) получим соотношение

$$e^{-2\varepsilon_\theta} = e^{\varepsilon_z} + \frac{c}{\rho^2}, \quad (5.20)$$

где c – постоянная интегрирования. После логарифмирования, соотношение (5.20) приводит к выражению

$$\varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(e^{\varepsilon_z} + \frac{c}{r_k^2} \right). \quad (6.21)$$

Отсюда получаем

$$e^{-2\varepsilon_\theta} = e^{\varepsilon_z} + \frac{c}{r_k^2}, \quad \text{где } c = r_k^2 (e^{-2\varepsilon_\theta} - e^{\varepsilon_z}).$$

Подставим полученное выражение постоянной интегрирования c в (5.21)

$$\varepsilon_\theta = -\frac{1}{2} \ln \left(e^{\varepsilon_z} + \frac{r_k^2}{\rho^2} (e^{-2\varepsilon_\theta} - e^{\varepsilon_z}) \right). \quad (5.22)$$

Из уравнения связи напряжений и деформаций [40, 69, 294] можно показать справедливость выражения:

$$\sigma_\theta = \sigma_{\text{ср}} + \frac{2}{3} \sigma_i \frac{\varepsilon_\theta}{\varepsilon_i}. \quad (5.23)$$

Если $\sigma_{\text{ср}} > 0$, схема напряженного состояния является жесткой.

При выполнении условия несжимаемости (6.15)

$$\varepsilon_\rho = -\varepsilon_\theta - \varepsilon_z$$

уравнение (6.17) получит вид

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_\theta \varepsilon_z + \varepsilon_z^2}.$$

С учетом постоянства одного из размеров деформируемого твердого тела, например, вдоль оси z ($\varepsilon_z = 0$):

$$\varepsilon_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \varepsilon_\theta,$$

Поэтому интенсивность деформаций приобретает вид

$$\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \left(e^{\varepsilon_z} + \frac{r_k^2}{\rho^2} (e^{-2\varepsilon_\theta} - e^{\varepsilon_z}) \right). \quad (5.24)$$

Представим (5.23) в виде

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \left(\frac{3\sigma_{cp}}{\sigma_i} \varepsilon_i + 2\varepsilon_\theta \right). \quad (5.25)$$

Выражение показателя жесткости схемы напряженного состояния (6.5) подставим в (5.25) и с учетом (5.22) и (5.24) получим зависимость для нормального напряжения σ_θ :

$$\sigma_\theta = \frac{\sigma_i}{3} (\eta + \sqrt{3}). \quad (5.26)$$

Проделав аналогичные действия, определим нормальное напряжение σ_ρ :

$$\sigma_\rho = \frac{\sigma_i}{3} (\eta - \sqrt{3}). \quad (5.27)$$

Характер изменения показателя напряженного состояния $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ и показателя жесткости схемы напряженного состояния (6.7) от величины угла вида напряженного состояния φ_σ , иллюстрирует график на рис. 5.4 [279, 280].

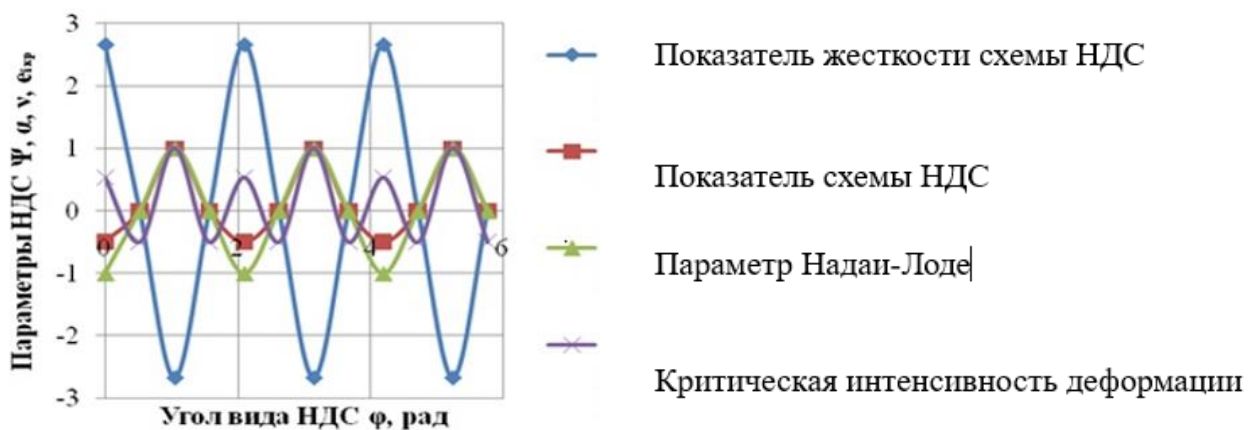


Рис. 5.4. Изменение показателей схемы напряженного состояния α , показателя жесткости схемы напряженного состояния ψ , параметра Надаи – Лоде и критической интенсивности деформаций

Разработаны алгоритм и математическая модель определения технологических параметров операции вытяжки, представленные в виде компьютерной программы, зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации Роспатента свидетельство № 2019660522 “OBOLOCHRA” [283] и является составной частью программного комплекса, представленного в диссертации.

Разработаны алгоритм и математическая модель представленные в виде компьютерной программы, зарегистрированной в Федеральной службе по интеллектуальной собственности Российской Федерации Роспатента свидетельство № 2025613951 «динамическое нагружение полого стержня» [284].

5.5 Выводы по главе 5

1. Разработанные динамическая и кинематическая модели напряженно-деформированного состояния дают представление не только о величинах напряжений и деформаций, но и о их механических схемах, которые сопровождают конкретные операции пластического деформирования, а также о траекториях напряжений и деформаций, имеющих вид дуг окружностей, что свидетельствует о немонотонности рассматриваемых процессов деформирования.

2. Полученная зависимость критической интенсивности деформаций от угла вида деформированного состояния позволяет оценить устойчивость протекания процессов пластического формоизменения на большинстве операций ОМД.

3. В результате исследования на основе моделей напряженного и деформированного состояний сделано обобщение операций листовой штамповки, которые, попадая в соответствующий интервал изменения угла вида НДС, однозначно характеризуются механическими схемами напряжений и деформаций с учетом их знаков, что значительно облегчает энергосиловой анализ этих операций.

ГЛАВА 6. ФИЗИЧЕСКОЕ И ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ В ТОНКОМ ПЛАСТИЧЕСКОМ СЛОЕ ПО НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ ПОВЕРХНОСТЯМ

Материалы главы 6 соответствуют паспорту научной специальности 1.2.2 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» (физико-математические науки) в направлениях исследований в рамках пунктов направлений исследований: 3. Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента и опубликованы автором в работах, 4. Разработка новых математических методов и алгоритмов интерпретации натурального эксперимента на основе его математической модели; 5. Разработка новых математических методов и алгоритмов валидации математических моделей объектов на основе данных натурального эксперимента или на основе анализа математических моделей и опубликованы автором в работах [122, 135, 138, 141, 210, 219, 224, 226, 227, 228, 229, 233, 235, 247, 306, 307, 314, 315, 316, 317].

6.1 Постановка и проведение экспериментов на стесненное сжатие с ограничением течения тонких полос в форме прямоугольника

Многие технологические процессы обработки металлов давлением включают деформирование удлиненной заготовки сближающимися инструментами, контактные поверхности которых имеют неглубокие ручьевые полости. Распространенным частным случаем являются штампы или часть их контактных поверхностей, представляющих собой плоскости: площадки под осадку и некоторые виды заготовительных ручьев. Рассмотрен сравнительный эксперимент течения тонкого слоя металла по шероховатым поверхностям. В главе приводятся результаты аналитического исследования краевой задачи о вязкопластическом

течении тонкого слоя металла, расположенного между движущимися навстречу друг другу жесткими шероховатыми плитами. Приводятся точные решения, основанные на классической постановке в рамках «идеальной жидкости» и «вязкопластической жидкости». Описан реальный эксперимент, проведенный для оценки влияния осредненных по толщине слоя касательных напряжений на кинематику течения пластического слоя. С целью оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине слоя, на кинематику течения, и, в особенности, вблизи неподвижных границ поставлены эксперименты и анализируются результаты по осадке между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму прямоугольника в плане. Неподвижные стенки инструмента расположены вдоль длинных сторон прямоугольника. Установлены экспериментальные закономерности. Растекание образцов происходит по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника, или по лучам кругового сектора. При этом установлено, что продольные перемещения вблизи неподвижных стенок заметно отстают от перемещений вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на линии симметрии образца относительно неподвижных стенок. Этот факт говорит о наличии ненулевых сдвиговых напряжений и (скоростей) деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания течений [1, 59, 122, 136, 305, 307]. «Течение ограничено неподвижными стенками инструмента, расположенными вдоль длинных сторон прямоугольника и вдоль радиальных границ сектора. Будем рассматривать такие течения пластического слоя, которые невозможно описать в рамках модели «идеальной жидкости», и в частности, растекание слоя, составленного из разных сред [1, 135,

139-140, 143]. Для их корректного описания необходимо использовать более общую модель «вязкой жидкости»⁴⁴ [59], описанную в разделе 2.5.

Для оценки влияния касательных напряжений (осредненных по толщине слоя) на кинематику течения, и в особенности, вблизи неподвижных границ, были проведены следующие эксперименты:

1) пластическая осадка слоя прямоугольной формы в плане между неподвижными (по ширине прямоугольника) границами [59, 90, 122, 135, 222, 223, 226, 305, 306];

2) пластическая осадка слоя формы сектора в плане между неподвижными радиальными границами [88, 122, 135, 307]. Материал образцов свинец марки С0 ГОСТ 3778-98 [303].

Описание первого эксперимента предложено в работах [304, 305, 306]. «Для его реализации была сконструирована и изготовлена специальная штамповая оснастка (рис.6.1),



Рис. 6.1. Штамповая оснастка и образцы полос из свинца до начала эксперимента (1) и образцы, деформированные во время эксперимента (2-5)

⁴⁴ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212. ISSN: 2074-0530

подготовлены начальные образцы полос из свинца следующих размеров: длиной $2l_0 = 70$ мм, шириной $2b_0 = 25$ мм, и толщиной $h_0 = 4$ мм. В лаборатории была изготовлена пара тонких полос с толщиной $l_{01} = l_{02} = 2$ мм, и на внутренней поверхности одной из них наносилась регулярная координатная сетка с шагом $\Delta l = 2$ мм»⁴⁵ [291].

Эксперименты проводились с помощью исследовательского комплекса на базе испытательной машины EU 100 с индикаторной регистрацией параметров технологического процесса (рис. 6.3).



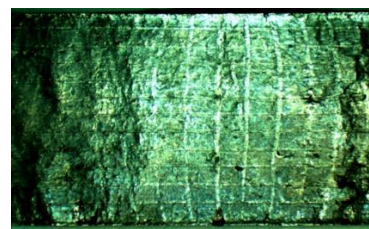
Рис. 6.2. Испытательный комплекс EU 100

Полоса деформировалась в оснастке так, что в процессе осаживания размер b_0 (ширина) оставался неизменным [129]. В ходе эксперимента в каждом отмеченном сечении $X = const$ (рис. 6.3) измеряли поле перемещений: минимального значения перемещения $u_b(X) = u\left(X; Y = \frac{b_0}{2}\right)$ вблизи неподвижной границы $\left(Y = \frac{b_0}{2}\right)$ и максимального значения $u_m(X) = u(X; Y = 0)$ в точке $(Y = 0)$ (рис.6.3).

⁴⁵ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». №2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212. ISSN: 2074-0530



a)



б)

Рис.6.3. Образец, деформированный со степенью деформации $\left(\frac{\Delta h}{h_0} = 0,3\right)$: *a* – система координат; *б* – искаженная сетка с 4-х кратным увеличением $\Delta u = u_m(X) - u_b(X)$ абсолютная $\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$ и относительная величины перемещения в сечении $X = const$ для образцов с разной степенью деформации.

Результаты вычислений приведены в табл. 6.1 и табл. 6.2.

Таблица 6.1

Параметры образца $h_1 = 2,8$ мм; $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1,2$ мм; $F = 200$ кН

X	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) == u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	2,43	1,92	0,52	0,21
8	3,93	3,29	0,64	0,16
12	6,16	4,95	1,21	0,19
16	8,10	6,68	1,42	0,17
20	9,93	8,07	1,86	0,19
24	11,90	9,54	2,36	0,20
28	14,05	10,60	2,45	0,24
32	16,05	11,51	4,64	0,28

Таблица 6.2

Параметры образца: $h_2 = 2,6$ мм; $\Delta h_2 = h_0 - h_2 = 1,2$ мм; $F = 310$ кН

X	$u_m(X)$	$u_\delta(X)$	$\Delta u(X) == u_m(X) - u_\delta(X)$	$\frac{\Delta u(X)}{u_m(X)}$
0	0	0		
4	3,05	2,64	0,41	0,13
8	5,40	3,92	1,48	0,28
12	7,98	6,08	1,90	0,24
16	8,38	7,03	1,35	0,16
20	12,27	10,34	1,93	0,16
24	14,35	12,04	2,31	0,16
28	16,94	14,06	2,88	0,17
32	19,12	17,45	2,54	0,13

Анализ экспериментальных результатов подтверждает заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы: риски

вертикальные в начальном состоянии ($X = const$) перестают быть вертикальными в процессе осадки полосы.

6.2 Анализ аналитических данных в математической модели «идеальной жидкости». Сравнение аналитических и экспериментальных результатов

«Полученные экспериментальные закономерности невозможно описать с помощью модели «идеальной жидкости», в которой касательные напряжения пренебрежимо малы. Доказательство: рассматриваемая задача в модели «идеальной» жидкости описывается уравнениями»⁴⁶ [59], приведенными в разделе 2.5 уравнениями (2.55) – (2.57).

$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{2\tau_s}{h_1} \cdot \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{d\lambda}{dt} = 0. \quad (6.3)$$

Граничные условия:

$$y = 0; v = 0; y = b_0; v = 0; \quad (6.4)$$

$$x = 0; u = 0, \quad (6.5)$$

на свободной границе выполняется условие

$$p = \sigma_s, \quad (6.6)$$

где p, u, v - осредненные по толщине слоя контактное давление и компоненты скорости течения.

Решение системы уравнений краевой задачи имеет следующий вид.

Кинематические параметры:

⁴⁶ Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора / В. А. Кадымов, Е.Н. Сосенушкин, Н.А. Белов // Известия МГТУ МАМИ, 2013, № 2(16), том 2. [19]

$$v \equiv 0; \quad (6.7)$$

$$u = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} x; \quad (6.8)$$

Контактное давление:

$$p = -\frac{2\tau_s}{h} \left(x - \frac{h_0 l_0}{h} \right) + \sigma_s. \quad (6.9)$$

Приведенные звчения противоречат полученным экспериментальным данным. Теоретический анализ проведен для одномерного течения, а эксперимент проведен в условиях плоского течения, что приводит к искривлению линий координатной сетки. Представим подробный анализ проведенного сравнения.

Определим положение сечения ($X = X_0 = const$) для осредненного по толщине, двумерного в плане, слоя в состоянии $t = t_1$ ($h = h_1 = 2,8$ мм) по теории «идеальной жидкости» и в соответствии с экспериментом. Закон движения, а также соответствующее перемещение находятся из решения следующей задачи Коши

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t) = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} x; \quad (6.10)$$

$$x(X, t = t_0) = X, \quad (6.11)$$

решение которой имеет вид:

$$x(X, t_1) = X \frac{h_0}{h_1}; \quad \bar{U}(X, t_1) = x(X, t_1) - X. \quad (6.12)$$

Для $X = 12$ мм:

$$x(X, t_1) = \frac{12 \cdot 4}{2,8} = 17,1(\text{мм}); \quad \bar{U}(X, t_1) = 17,1 - 12 = 5,1 (\text{мм}).$$

Результаты эксперимента для тех же геометрических характеристик:

$$X = 12 \text{ мм} \Rightarrow \begin{cases} X_{max}(X, t_1) = X + U_m = 12 + 6,16 = 18,6 \\ X_{min}(X, t_1) = X + U_\delta = 12 + 4,95 = 16,95 \end{cases} ,$$

$$\Delta U(X, t_1) = 6,16 - 4,95 = 1,21;$$

Наибольшее относительное изменение перемещения по сечению $X = 12$ мм:

$$\left| \frac{\Delta U}{U_{max}} \right| = \frac{1,21}{6,16} = 0,19 (19\%).$$

Эпюра перемещений иллюстрируется рис. 6.4.

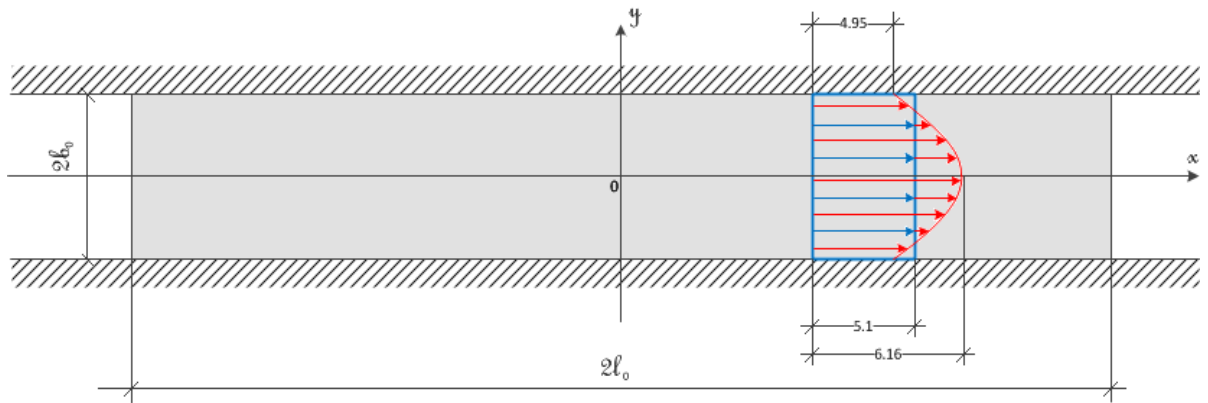


Рис. 6.4. Распределение перемещений по ширине срединной плоскости в задаче о стесненной осадке плоского слоя прямоугольной формы

$$x(X, t_1) = X \frac{h_0}{h_1} = \frac{20 \cdot 4}{2,8} = 28,6(\text{мм}) ;$$

$$\bar{U}(X, t_1) = x(X, t_1) - X = 28,6 - 20,0 = 8,6 (\text{мм}).$$

Были проведены расчеты таких же величин для сечения $X = 20$ мм.

Расчеты по теории: Результаты эксперимента:

$$X = 20 \text{ мм} \Rightarrow \begin{cases} X_{max}(X, t_1) = X + U_m = 20 + 9,93 = 29,93 \\ X_{min}(X, t_1) = X + U_\delta = 20 + 8,07 = 28,07' \end{cases}$$

$$\Delta U(X, t_1) = 9,93 - 8,07 = 1,86;$$

Наибольшее относительное расхождение перемещения в сечении $X = 20$ мм

$$\left| \frac{\Delta U}{U_{max}} \right| = \frac{1,86}{9,93} = 0,19 (19\%).$$

Проведем теперь аналогичные расчеты для сечения $X = 12$ мм в состоянии $t = t_2$ ($h = h_2 = 2,6$ мм) по теории «идеальной жидкости» и по данным эксперимента.

$$x(X, t_2) = X \frac{h_0}{h_1} = \frac{12 \cdot 4}{2,6} = 18,5 (\text{мм}) ;$$

$$\bar{U}(X, t_2) = x(X, t_2) - X = 18,5 - 12,5 = 6,5 (\text{мм}).$$

Результаты эксперимента:

$$X = 12 \text{ мм} \Rightarrow \begin{cases} X_{max}(X, t_2) = X + U_m = 12 + 7,98 = 19,98 \\ X_{min}(X, t_2) = X + U_\delta = 12 + 6,08 = 18,08' \end{cases}$$

$$\Delta U(X, t_2) = 7,93 - 6,08 = 1,90;$$

Наибольшее относительное расхождение перемещения по сечению $X = 12$ мм

$$\left| \frac{\Delta U}{U_{max}} \right| = \frac{1,90}{7,98} = 0,24 (24\%).$$

Расчеты для сечения $X = 20$ мм в состоянии $t = t_2$ ($h = h_2 = 2,6$ мм).

Из аналитического решения системы получим

$$x(X, t_2) = X \frac{h_0}{h_1} = \frac{20 \cdot 4}{2,6} = 30,8(\text{мм});$$

$$\bar{U}(X, t_2) = x(X, t_2) - X = 30,8 - 20,0 = 10,8 (\text{мм}).$$

Результаты эксперимента:

$$X = 20 \text{ мм} \Rightarrow \begin{cases} X_{max}(X, t_2) = X + U_m = 20 + 12,27 = 32,27 \\ X_{min}(X, t_1) = X + U_\delta = 20 + 10,34 = 30,34 \end{cases}$$

$$\Delta U(X, t_2) = 12,27 - 10,34 = 1,93;$$

Наибольшее относительное расхождение перемещения по сечению $X = 20$ мм

$$\left| \frac{\Delta U}{U_{max}} \right| = \frac{1.93}{12.27} = 0,16 (16\%).$$

6.3 Экспериментальные исследования по сжатию тонких пластин в форме кругового сектора в условиях затрудненного течения

Для оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине реального слоя, на кинематику течения, и, что особенно важно, в непосредственной близости от неподвижных границ, были смоделированы и поставлены лабораторные эксперименты по сжатию между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму кругового сектора. Анализ закономерностей, полученных экспериментально, невозможно корректно описать с помощью модели «идеальной жидкости». К сожалению, в реальных экспериментах невозможно пренебречь касательными напряжениями, как это делается в модели «идеальной жидкости».

Для осуществления серии запланированных экспериментов, была изготовлена сменная штамповая оснастка и пары свинцовых пластин в форме кругового сектора в плане ($R_0 = 45$ мм; $h_0 = 4$ мм; $\varphi_0 = 22,5^\circ$).

Для проведения второй серии экспериментов были изготовлены штамповая оснастка и пары свинцовых [308] пластин в форме сектора в плане

($R_0 = 45$ мм; $h_0 = 4$ мм; $\varphi_0 = 45^\circ$) (рис. 6.5) [90, 129, 141, 316].

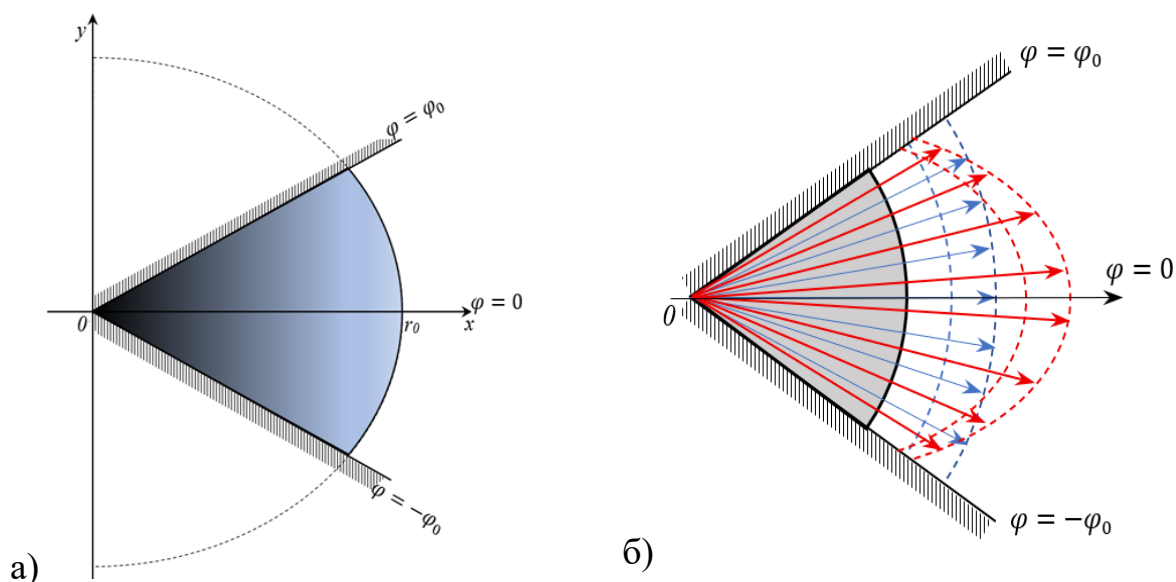


Рис. 6.5. Схема пластической области S : а – в виде кругового сектора в плоскости $Or\varphi$ в цилиндрической системе координат; б – распределение перемещений по ширине срединной плоскости в задаче о стесненной осадке плоского слоя в виде кругового сектора для моделей «вязкой» (красный цвет) и «идеальной» (синий цвет) жидкостей

Для проведения лабораторного эксперимента образец из двух составных пластин устанавливался в канале штамповой оснастки. Пластины осаживались так, что с течением времени центральный угол образца оставался неизменным. Перед началом эксперимента координатная сетка в виде концентрических дуг окружностей наносилась на поверхность одной из двух пластин составной заготовки. Дальнейшее исследование искажения координатной сетки проведено с помощью исследовательского комплекса на базе испытательной машины INSTRON с компьютерной регистрацией параметров рассматриваемого процесса осадки.

После сжатия измерялось минимальное значение перемещения $u_b = u$ вблизи неподвижной границы ($\varphi = 22,5^\circ$) и максимальное значение

$u_m = u(R; \varphi = 0)$ в средней по ширине точке ($y = 0$) (см. рис. 6.6.).

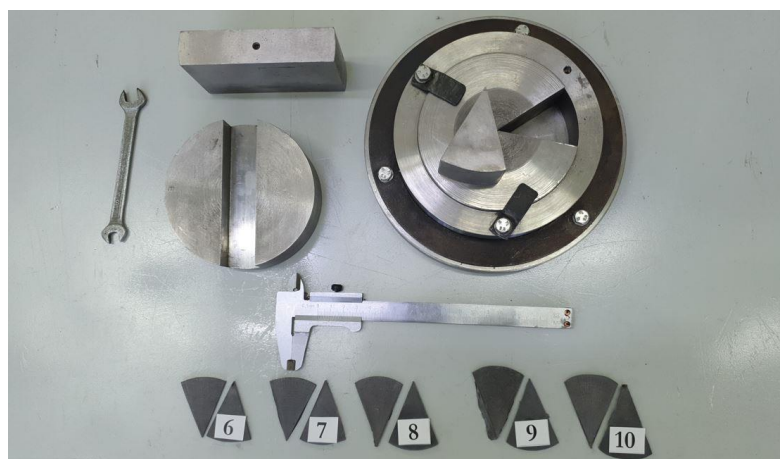


Рис. 6.6. Штамповая оснастка для эксперимента и образцы секторов из свинца до начала эксперимента (6), образцы, деформированные во время эксперимента (7-10)

Измерение координат искаженной сетки проведено на инструментальном микроскопе УИМ-21, оснащенный комплексом компьютерной обработки измеряемых характеристик. Далее была определено абсолютное приращение $\Delta u(R) = u_m - u_b$ и относительная величина $\frac{\Delta u}{u_m}$ отклонения перемещения в сечении $R = const$. Абсолютная $\Delta u(R) = u_m - u_b$ и относительная $\frac{\Delta u}{u_m}$ величины отклонения перемещения в сечении $R = const$ внесены в таблицу 6.3.

Таблица 6.3

Параметры образца $h_1 = 2,32$ мм; $\Delta h_1 = h_0 - h_1 = 1,68$ мм; $F = 164$ кН

R	$u_m(R)$	$u_b(R)$	$\Delta u(R) = u_m - u_b$	$\frac{\Delta u}{u_m}$
16,42	0	0,08	-	-
18,53	0,27	0	0,27	-
20,59	0,91	0,15	0,76	0,83
22,35	1,53	0,25	1,28	0,83
24,52	2,58	0,51	2,07	0,80
26,63	3,30	0,65	2,65	0,80
28,50	3,89	1,18	2,70	0,70
30,65	4,71	2,41	2,30	0,49
32,28	5,76	1,93	3,83	0,66
34,53	5,50	2,19	3,31	0,60
36,29	6,50	2,76	3,74	0,57
38,41	6,82	2,73	4,09	0,60

Результаты экспериментов также подтверждают заметное отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы: дугообразные в начальном состоянии риски ($R = const$) перестают быть дугами окружностей в процессе осадки.

Очевидно, что полученные экспериментальные закономерности не представляется возможным описать с помощью модели «идеальной жидкости». Действительно, представленная задача в модели «идеальной жидкости» описывается в [129, 316] уравнениями в криволинейной (полярной) системе координат. Постановка задачи в этом случае имеет вид:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (6.13)$$

$$\frac{\partial p}{r\partial\varphi} = -\frac{2\tau_s}{h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}; \quad (6.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r\partial\varphi} - \frac{\partial\lambda}{\partial t} = 0. \quad (6.15)$$

Граничные условия:

$$\varphi = 0: \quad v = 0; \quad \varphi = \varphi_0: \quad v = 0,$$

на свободной границе выполняется условие

$$p = \sigma_s.$$

Решение поставленной краевой задачи имеет вид:

$$v \equiv 0, \quad u = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt} \frac{r}{2}, \quad p = -\frac{2\tau_s}{h} \left(r - R_0 \sqrt{\frac{h_0}{h}} \right) + \sigma_s.$$

Очевидно, из аналитического решения следует, что исходные дуги окружностей остаются регулярными дугами окружностей, а это противоречит экспериментальным наблюдениям [305].

6.4 Сравнение аналитического решения задачи пластического течения тонкого слоя в постановке для модели «вязкой жидкости» с результатами эксперимента

6.4.1 Постановка эксперимента на сжатие тонких пластин прямоугольной формы в штампе с неподвижными границами

На исследовательском комплексе испытательной машины *INSTRON KPX 3500* (рис. 6.7) с компьютерной регистрацией параметров технологического процесса были проведены повторные эксперименты. Серии новых экспериментов отличаются от предыдущих, более высокой точностью измерений и компьютерной обработкой результатов.



Рис. 6.7. Испытательная машина *INSTRON KPX 3500* с компьютерной обработкой данных

В серии экспериментов по пластической осадке образцов были рассмотрены образцы с такими же геометрическими параметрами (Рис. 6.8), но из различных материалов, которые отличались от материалов первых экспериментов.



Рис. 6.8. Постановка эксперимента на сжатие тонких пластин прямоугольной формы в штампе с неподвижными стенками



Рис.6.9. Образцы в трех последовательных деформированных состояниях

1. $h_1 = 3,5$ мм 3. $h_3 = 3,2$ мм 5. $h_5 = 2,9$ мм

«В каждом отмеченном рисками сечении $x_0 = const$ отслеживали поле перемещений. Было зафиксировано три последовательных деформированных состояния при конечной толщине образцов $h_1 = 3,5$ мм, $h_1 = 3,2$ мм,

$h_1 = 2,9$ мм. В каждом из полученных состояний фотографировали образец с текущей искаженной координатной сеткой (рис. 5.9). Видно, что (горизонтальные) линии тока остаются прямыми, параллельными неподвижным границам

прямоугольной пластины. Однако вертикальные сечения (риски) заметно искривляются, принимая форму параболических дуг»⁴⁷ [1].

Сравним полученный в результате эксперимента результат с аналитическим решением. Результаты сравнения изложены в следующем разделе.

6.4.2 Краевая задача о сжатии тонкого пластического слоя прямоугольной формы в плане

Пусть слой из идеально-пластического материала расположен между двумя параллельно сближающимися по нормали плоскостями жестких шероховатых плит (рис. 6.10 а).

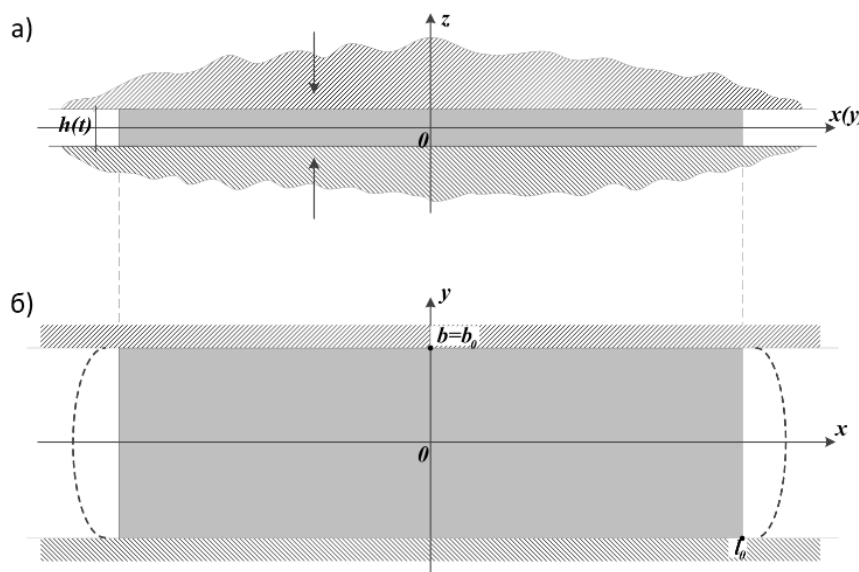


Рис. 6.10. Течение образца из пластического материала: поперечный разрез (а), и в плане (б)

Основные уравнения течения в такой двумерной области, согласно главе 2 (раздел 2.5), имеют вид (2.55) – (2.57). Используем в качестве граничных условий два скалярных динамических (2.58) и одно кинематическое (2.59).

Тензор напряжений σ

⁴⁷ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

$$\sigma_{11} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (6.16)$$

$$\sigma_{12} = \frac{1}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (6.17)$$

$$\sigma_{22} = -p + \frac{2}{3}\sigma_s + \frac{2}{3}\sigma_s \frac{dt}{d\lambda} \frac{\partial v}{\partial y}. \quad (6.18)$$

На непроницаемой неподвижной границе

$$\Gamma_R: G(x, y) = 0$$

задаются два условия: динамическое условие равенства предельному значению величины тангенциальной составляющей вектора напряжений

$$|\vec{\sigma}^{(n)} \cdot \vec{\tau}| = |\sigma_{11}n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) - \sigma_{22}n_1n_2| = \tau_s, \quad (6.19)$$

где $\tau_s = (n_2, -n_1)$ вектор, касательный к границе, и кинематическое условие непроницаемости границы

$$v_n \equiv \vec{v} \cdot \vec{n} = 0, \quad (6.20)$$

или

$$\vec{v} \cdot \nabla G = 0. \quad (6.21)$$

Значения скорости и контактного давления

$$v_0 = -\frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{dh(t = t_0)}{dt} \right) \quad (6.22)$$

$$p_0 = \frac{\sigma_s}{\varepsilon}, \text{ где } \varepsilon = \frac{h_0}{l_0} \ll 1 \quad (6.23)$$

– малый параметр. Использование малого безразмерного параметра позволяет рассмотреть постановку задачи (2.55) - (2.57) в безразмерном виде:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta u - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (6.24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \Delta v - \frac{2}{\sqrt{3}h} \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad (6.25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \lambda', \text{ где } \lambda' = -\frac{1}{h} \frac{dh}{dt}. \quad (6.26)$$

Учтем, что рассматриваемая область симметрична. Тогда можно рассмотреть только первую четверть в декартовой системе координат. При этом, на неподвижной стенке при

$$y = b_0 \quad (G(x, y) \equiv y - b_0)$$

условия непроницаемости и постоянства касательного напряжения имеют вид:

$$v = 0, \quad (6.27)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -\sqrt{3}\lambda'. \quad (6.28)$$

Так как u должно быть четно, а v нечетно относительно оси симметрии $y = 0$, то должны выполняться два условия при $y = 0$

$$v = 0, \quad (6.29)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \quad (6.30)$$

На другой оси симметрии при $x = 0$, в силу четности v и нечетности u , должно быть

$$u = 0, \quad (6.31)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (6.32)$$

Граничные условия на свободной границе $F(t, x, y) = 0$: кинематическое

$$\frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} = 0, \quad (6.33)$$

и условие равенства нулю компонент вектора напряжений в виде скалярного произведения

$$\sigma_{11}n_1^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 + \sigma_{22}n_2^2 = 0, \quad (6.34)$$

$$\sigma_{11}n_1^2 + 2\sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) + \sigma_{22}n_2^2,$$

где

$$\sigma_{11} = -p + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (5.35)$$

$$\sigma_{12} = \frac{\varepsilon}{3\lambda'} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad (6.36)$$

$$\sigma_{22} = -p + \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (6.37)$$

приводит к одному условию для давления

$$\left(p - \frac{2\varepsilon}{3} \right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 \right] = \frac{2\varepsilon}{3\lambda'} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} \right], \quad (6.38)$$

и к еще одному условию совместности, не связанному с давлением

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial x}\right) \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} = 0. \quad (6.39)$$

«Полная постановка задачи растекания прямоугольной в начальный момент области в полосе с неподвижными границами описывается уравнениями (6.24) - (6.26) и условиями (6.27) – (6.39). Заметим, что касательное напряжение σ_{12} на осях симметрии и свободной границе равно нулю, тогда как на неподвижной стенке оно имеет постоянное ненулевое значение, соответственно в точке пересечения оси $x = 0$ с неподвижной стенкой, а также в точке пересечения свободной границы с неподвижной стенкой касательное напряжение имеет разрыв. Понятно, что вблизи этих точек решение задачи ведет себя достаточно сложно и не может быть описано как одномерное»⁴⁸ [1].

6.4.3 Анализ точного решения задачи о нестационарном течении «вязкой жидкости»

Пусть размер области течения в направлении x много больше, чем в направлении y . Будем искать аналитическое решение задачи вдали от оси $x = 0$. Для этого предположим, что в рассматриваемой области течения

$$v(x, y) = 0. \quad (6.40)$$

Тогда из уравнения несжимаемости (2.57) интегрированием получаем:

$$u(x, y) = \lambda' [x - g(y)], \quad (6.41)$$

где функцию $g(y)$ необходимо определить из других уравнений. Тогда

$$p'(x) = \frac{\varepsilon}{3} g''(y) - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h},$$

где в левой части функция аргумента x , а в правой функция y (и параметра $h(t)$).

⁴⁸ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

Следовательно, переменные можно разделить и в результате, имеем систему с произвольной константой (функцией времени) k ,

$$\begin{cases} g''(y) = k = const, \\ p'(x) = \frac{\varepsilon k}{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{h}, \end{cases} \quad (6.42)$$

Из первого уравнения системы (6.42) с граничными условий (6.28), (6.30):

$$g(y) = c - \frac{\sqrt{3}}{2b_0} y^2, k = -\frac{\sqrt{3}}{b_0}, \quad (6.43)$$

где $c = const$. Тогда из (6.41) следует

$$u(x, y) = \lambda' \left[x - \frac{\sqrt{3}}{2b_0} y^2 + c \right]. \quad (6.44)$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (6.44) соответствует скорости течения в модели «идеальной жидкости», в рамках которой касательное напряжение на неподвижной границе также как на других границах, равно нулю.

«Положим для некоторого произвольного, но достаточно отдаленного от центра сечения $x = x_0$, расход при течении «вязкой жидкости» совпадает с расходом течения «идеальной жидкости», тогда получаем условие»⁴⁹

$$\int_0^{b_0} \left[c - \frac{\sqrt{3}}{2b_0} y^2 \right] dy = 0,$$

из которого определяем постоянную $c = \frac{\sqrt{3}}{6} b_0$ и окончательную формулу для скорости

$$u(x, y) = \lambda' \left[x + \frac{\sqrt{3}}{6b_0} (b_0^2 - 3y^2) \right]. \quad (6.45)$$

Интегрирование второго уравнения системы (6.42) с учетом уже известной из (6.43) постоянной k дает

$$p(x) = p_0 - \frac{x}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right), \quad (6.46)$$

с постоянной интегрирования p_0 . Очевидно, что давление (также, как при $\varepsilon = 0$) не

⁴⁹ Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

зависит от y , но зависит от ε , тем самым, отличаясь от давления в модели «идеальной жидкости» несколько большим градиентом по x .

В предположении, что некоторое сечение $x = x_f(t)$ – это условная свободная граница ($x_f h = 1$), на которой нормальное напряжение равно нулю

$$(\sigma_{11}) = -p + \frac{4\varepsilon}{3} = 0,$$

находим p_0 :

$$p_0(t) = \frac{2x_f}{\sqrt{3}h} + \left(\frac{x_f}{\sqrt{3}b_0} + \frac{4}{3} \right) \varepsilon.$$

При достаточно большом x_f последним (третьим) слагаемым в правой части можно пренебречь,

$$p_0(t) = \frac{x_f}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right),$$

и давление в (6.46) имеет более простой вид

$$p \approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{2}{h} + \frac{\varepsilon}{b_0} \right) (x_f - x). \quad (6.47)$$

Приближенное аналитическое решение (6.50), (6.55), (6.57), полученное в рамках модели «вязкой жидкости», сравним с экспериментальными данными.

6.4.4 Сравнительный анализ полученных результатов (аналитических и экспериментальных)

При проведении эксперимента в каждом из полученных состояний фотографировали образец с текущей искаженной координатной сеткой и проводили измерения координат узловых точек вблизи неподвижной границы x_{min} (точнее для линии тока $y = 10$) с минимальным перемещением начального сечения x_0 , и на средней линии тока ($y = 0$) x_{max} с максимальным перемещением сечения x_0 . По измеренным координатам узловых точек находили перемещение данной узловой точки $U = x - x_0$ [121].

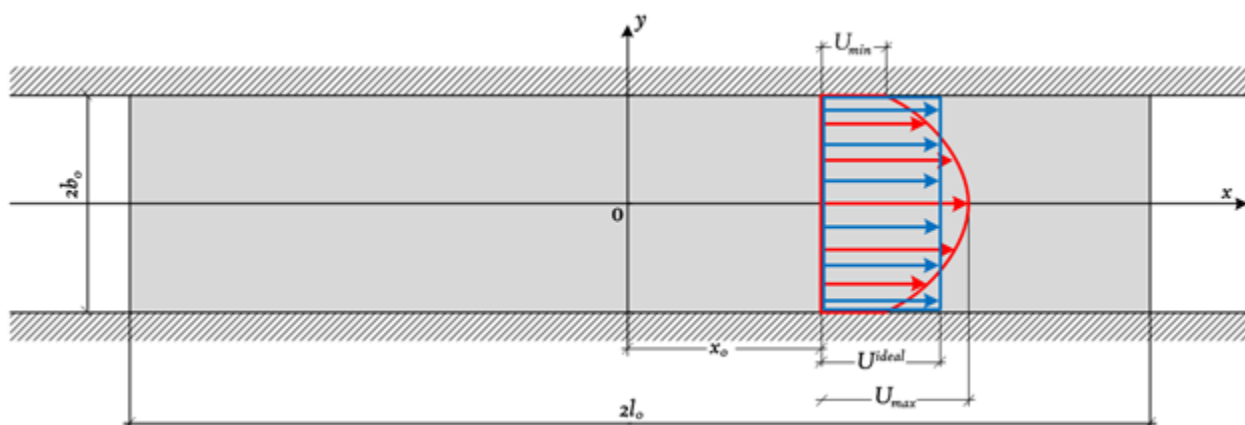


Рис. 6.11. Распределение перемещений по ширине срединной плоскости в задаче о стесненной осадке плоского слоя прямоугольной формы для моделей «вязкой» (красный цвет) и «идеальной» (синий цвет) жидкостей

Для сравнения в таблицы были добавлены также теоретические значения перемещений и координат заданных узловых точек, которые получены интегрированием первой из формул (6.45) для модели «идеальной жидкости» U, x^{ideal} и формулы (6.55) для «вязкой жидкости» U, x^{visk} , с переходом к размерным величинам (рис.6.11).

В первом образце (рис. 6.12 и табл. 6.4) мы видим удовлетворительное соответствие результатов эксперимента с данными модели «вязкой жидкости» для всех трех начальных сечений. То, что для сечений 20 и 30 мм экспериментальные минимальные значения превышают значения для «идеальной жидкости», видимо, говорит о погрешности измерения толщины слоя (она чуть меньше заявленной).



Рис. 6.12. Образцы с деформированной координатной сеткой при толщине $h_1 = 3,5$ мм, $h_2 = 3,2$ мм, $h_3 = 2,9$ мм, $h_4 = 2,0$ мм, $h_5 = 1,5$ мм

Таблица 6.4

Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца $h_1 = 3,5$ мм и начальных сечений $x_0 = 12, 20, 30$ мм

x_0	x_{min}	U_{min}	x_{max}	U_{max}	x_{min}^{visk}	U_{min}^{visk}	x_{max}^{visk}	U_{max}^{visk}	x^{ideal}	U^{ideal}
12	13,50	1,50	14,50	2,50	13,24	1,24	14,23	2,23	13,71	1,71
20	23,00	3,00	24,00	4,00	22,38	2,38	23,37	3,37	22,86	2,86
30	34,50	4,50	36,00	6,00	33,81	3,81	34,80	4,80	34,29	4,29

Во втором образце (рис. 6.12) заметна несимметричность растекания относительно оси x , поэтому минимальное перемещение в табл. 6.5 взято средним между двумя границами, а максимальное выбрано по факту, а не на оси $y = 0$. В третьем образце (рис. 6.12 и табл. 6.6) результаты экспериментов и теории (по модели «вязкой жидкости»), с учетом некоторой несимметричности растекания образца, наиболее близки.

Таблица 6.5

Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца $h_2 = 3,2$ мм и тех же начальных сечений

x_0	x_{min}	U_{min}	x_{max}	U_{max}	x_{min}^{visk}	U_{min}^{visk}	x_{max}^{visk}	U_{max}^{visk}	x^{ideal}	U^{ideal}
12	14,50	2,50	15,5	3,50	14,17	2,17	15,90	3,90	15,00	3,00
20	25,00	5,00	26,5	6,50	24,17	4,17	25,90	5,90	25,00	5,00
30	37,50	7,50	39,5	9,50	36,67	6,67	38,40	8,40	37,50	7,50

Таблица 6.6

Координаты и перемещения точек с минимальным и максимальным перемещением для толщины образца $h_3 = 2,9$ мм и тех же начальных сечений

x_0	x_{min}	U_{min}	x_{max}	U_{max}	x_{min}^{visk}	U_{min}^{visk}	x_{max}^{visk}	U_{max}^{visk}	x^{ideal}	U^{ideal}
12	15,50	3,50	17,00	5,00	15,29	3,29	17,92	5,92	16,55	4,55
20	27,00	7,00	29,00	9,00	26,33	6,33	28,95	8,95	27,59	7,59
30	41,00	11,00	43,50	13,5	40,12	10,12	42,75	12,75	41,38	11,38

Анализ экспериментальных результатов подтверждает отставание продольного перемещения частиц вблизи неподвижной границы «от перемещения частиц в средней части полосы, как-то, вертикальные линии в начальном состоянии

сечения $x_0 = const$ искривляются и принимают вид параболических дуг в процессе осадки полосы. Теоретические результаты по минимальным и максимальным перемещениям, полученные из аналитического решения задачи в рамках модели «вязкой жидкости», достаточно близки к экспериментальным измерениям⁵⁰ [1].

Сравнительный анализ проведенных исследований показывает, что часть проведенных экспериментов противоречит точным решением краевой задачи, поставленной в рамках упрощенной модели А. А. Ильюшина - модели «идеальной жидкости». Корректное описание течения удастся получить только в рамках общей модели «вязкой жидкости».

6.5 Модельный эксперимент для песчаной аналогии

Осредненная по толщине двумерная математическая модель процесса растекания пластического слоя, описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных первого порядка относительно контактного давления и компонент вектора скорости течения (6.40) – (6.42). Для металла, пребывающего в плоском деформированном состоянии, принимается условие полной пластичности [19, 58, 215], при выполнении которого касательные напряжения в слое малы по сравнению с нормальными напряжениями и ими можно пренебречь, причем два нормальных напряжения в поперечном сечении в первом приближении можно считать равными. Третье нормальное напряжение, постоянное по толщине слоя, равно контактному давлению слоя на инструмент. На границе рассматриваемых областей в этом случае достаточно задать одно краевое условие.

Для подтверждения кинематических гипотез в качестве примера возьмем в качестве объекта исследования гаечный ключ в виде сложной односвязной области, изображенной на рис. 6.15. Предположим, что для односвязной области (головка

⁵⁰ 50 Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.

под зев ключа), линия раздела сечения является эволютой [133], построенной для известной границы области. В начальный момент времени свободная поверхность материала ограничена известным контуром $L(\rho, \varphi) = 0$. В процессе деформирования металл растекается свободно до момента касания стенок гравюры штампа.

Конечные толщины исследуемых областей поковки h_i заданы. Скорость сближения половин штампа известна как функция времени $\frac{\partial h}{\partial t}$. Для доказательства предложенной гипотезы воспользуемся аналогией с песчаной насыпью. Впервые этот факт был сформулирован А. А. Ильюшиным [19] с указанием, что между формой эпюры контактного давления сжимаемой пластической области и формой насыпи из сухого мелкодисперсного песка просматривается прямая связь (рис. 5.16).

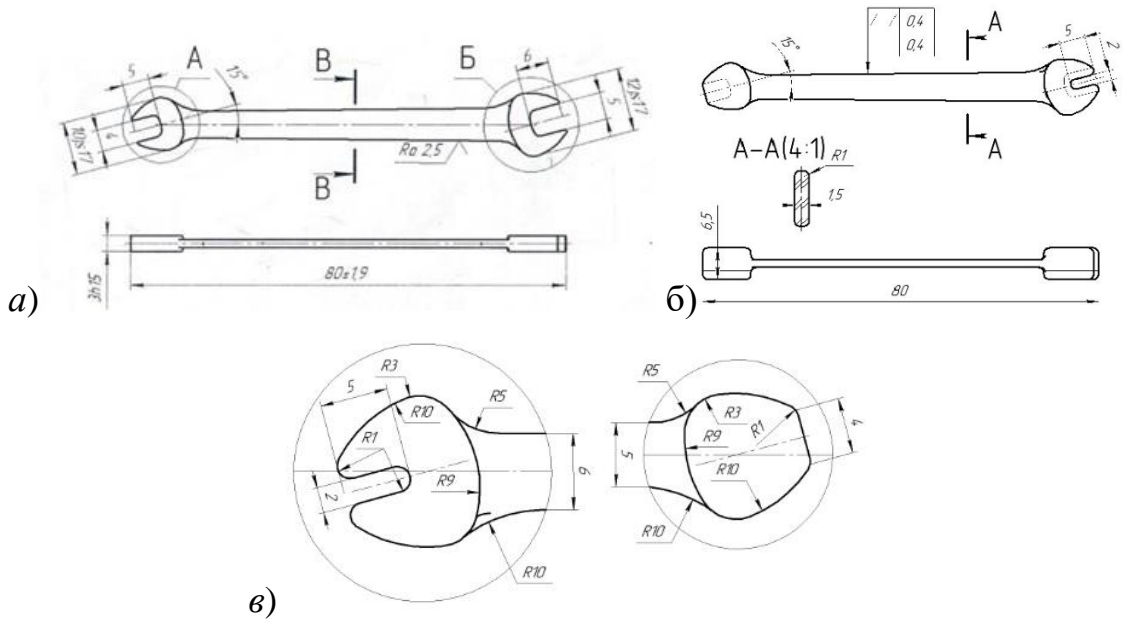
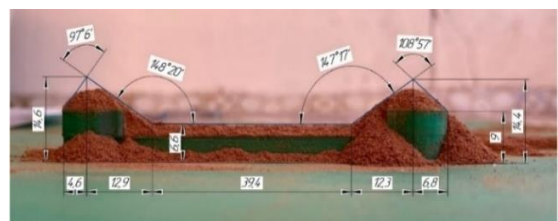


Рис. 6.15. Пример односвязной области сложной конфигурации: а – чертеж детали; б – чертеж поковки; в – области зевов поковки гаечного ключа



а)



б)

Рис. 6.16. Аналогия с песчаной насыпью: а) - модель контура поковки гаечного ключа; б) - полученная предельная насыпь

Для натурального эксперимента была изготовлена модель внешней формы изделия из пластмассы (рис. 6.16. а)) [313], подобран однородный мелкодисперсный песок, с теоретически одинаковым коэффициентом внутреннего трения ν (если $\nu = tg\varphi$, то φ угол естественного скоса). На горизонтально расположенную пластину, контур которой совпадает с контуром области течения равномерно насыпали песок (рис. 6.16. б). В результате, была образована определенной формы предельная насыпь, ордината которой ξ должна удовлетворять однородному граничному условию:

$$\xi \Big|_L = 0. \quad (6.48)$$

Предельная насыпь характерна тем, что угол наклона ее образующей к горизонту есть величина постоянная и равная φ . Отсюда следует, что образуемая насыпью поверхность кусочно-заданная, содержащая и криволинейные образующие в области зева.

Материал насыпи подобран таким образом, что ν численно совпадает со значением отношения $\frac{2\tau_s}{h}$, где τ_s – предел текучести пластического материала на сдвиг. В этом случае функция давления p будет иметь следующий вид (6.59):

$$p = \sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \right) + \xi, \quad (6.49)$$

где l характерный линейный размер, δ – усредненная ширина области.

По контуру модели ключа выполнен вертикальный борт высотой $\sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \right)$. Ордината такой насыпи ξ будет совпадать с функцией давления p , и для них справедливы одинаковые математические постановки задачи. По песчаной насыпи можно наблюдать границу раздела течения металла и геометрическое место точек, соответствующих наибольшему давлению. Общая удельная сила p будет численно равна объему песчаной насыпи из однородного песка с углом наклона граней к основанию φ таким, что $tg\varphi = \frac{2\tau_s}{h}$, плюс объем области, ограниченной контуром ключа, высотой $\sigma_s \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} \right)$.

Для численного решения задачи были использованы результаты, полученные в работах [19, 21, 33, 77, 129]. Сила Q , необходимая для осуществления процесса течения и являющаяся функцией толщины поковки:

$$Q = \sigma_s d^2 \left(1 + \frac{2l}{\sqrt{3}\delta} + \frac{d}{3\sqrt{3}h} \right), \quad (6.50)$$

где d – длина паза, δ – ширина паза, l – глубина паза, h – конечная толщина поковки, $\sigma_s = 24$ МПа – предел текучести стали 40Х при температуре 1100°C.

Суммарная удельная сила равна сумме удельных сил в разных областях, на которые условно разбита поковка (рис. 6.17). Расчеты объемов и площадей были проведены с использованием 3D-модели, разработанной в ПО КОМПАС-3D, которое позволяет с достаточной точностью рассчитать геометрические параметры сложных фигур.

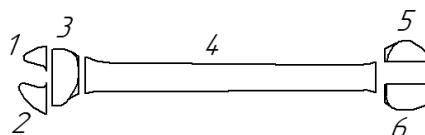


Рис. 6.17 – Разбиение поковки ключа на области с характерным течением

Физический эксперимент по штамповке ключа проводили на модельном материале, в качестве которого использован свинец марки С0 ГОСТ 3778-98 [308]. Силовые параметры деформирования записывались с помощью исследовательского комплекса *INSTRON KXP 3500* с компьютерной обработкой результатов. Сравнивались графики изменения сил деформирования, полученные с помощью компьютерного моделирования и проведенного эксперимента (рис. 6.18).

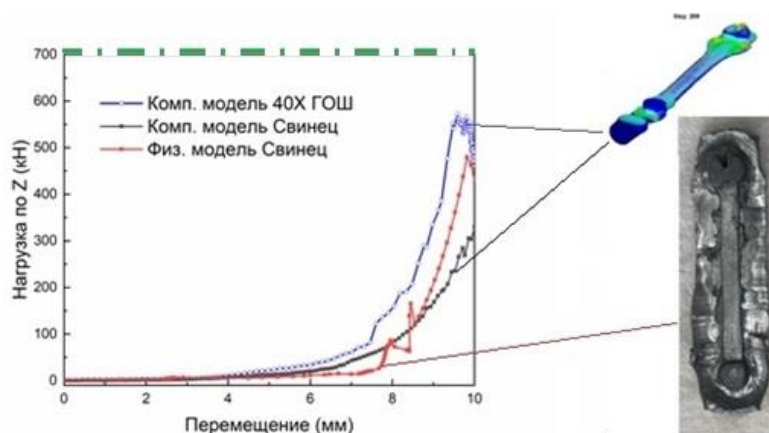


Рис. 6.18. Сравнительный анализ результатов численного и физического экспериментов

Характер изменения сил деформирования эквивалентен, однако линии графиков не совпадают из-за разницы пределов текучести материалов: для стали 40Х при температуре 1100°С $\sigma_{02}=24$ МПа, для свинца марки С0 при температуре 20°С $\sigma_{02}= (10–12)$ МПа. Расчетное значение силы деформирования 705 кН в конце рабочего хода штампа, обозначенное на графике штрих-пунктиром, получено расчетом по методу песчаной аналогии, что является верхней оценкой, т.к. модель не учитывает многих факторов.

Решения задачи течения пластического слоя в односвязной области сложной конфигурации на примере гаечного ключа: (аналитическое, численное и полученное аналоговым моделированием с помощью песчаной насыпи), также результаты физического эксперимента по модельной штамповке поковки гаечного ключа были положены в основу разработки вариантов технологического процесса горячей объемной штамповки этой многочисленной группы поковок. Техническая новизна разработанных технологий защищена четырьмя патентами на изобретения [314–317].

6.6 Численные методы расчета и анализа кинематических и динамических параметров деформируемого твердого тела

Непрерывное повышение требований к различным конструкциям и, в частности, к машиностроительным деталям требует от конструкторов и технологов более тщательного исследования поведения конструкционных материалов в эксплуатационных условиях, для лучшего понимания процессов нагружения и деформирования ограниченного объема твердого тела. Необходимо адекватно моделировать связанные процессы вязкоупругопластического деформирования материала, отслеживать и не допускать условий, при которых интенсифицируются процессы накопления повреждений в зависимости от параметров квазистатического

6.7 Обобщенный анализ кинематики течения тонкого слоя: варианты двусвязных областей

6.7.1 Разработанные инструментальные средства определения качественных характеристик процесса течения

Численное моделирование кинематических параметров рассматриваемого процесса течения проводилось с помощью *Web* технологии, которая включает

- *HTML* - язык разметки;
- *CSS* – формальный язык для описания внешнего вида интерфейса;
- *Javascript* – язык программирования;
- библиотека *P5.js* – *JS* библиотека для создания интерактивных визуальных элементов с помощью кода в *Web* браузере;
- *sublime text 3* – продвинутый текстовый редактор;
- *Google* - браузер.

Выбор инструментария обосновывается тем, что с помощью *HTML* и *CSS* можно прописать актуальный интерфейс для формируемой программы.

Google браузер имеет очень удобные средства для *web* разработки, так называемые “Инструменты разработчика” (рис. 6.20). Они упрощают написание любой *web* программы и помогают в ее отладке.

Язык программирования *Javascript* поддерживает всю логику передачи и обработки данных и достаточно удобен для описания математического аппарата рассматриваемого процесса. *JS* библиотека *P5.js* используется для построения визуального отображения моделируемого объекта. Интерфейс состоит из 2-х частей. Первая часть, как показано на рис 7.3, представляет собой поля для ввода параметров поковки, с помощью которых будут производиться все построения и вычисления.

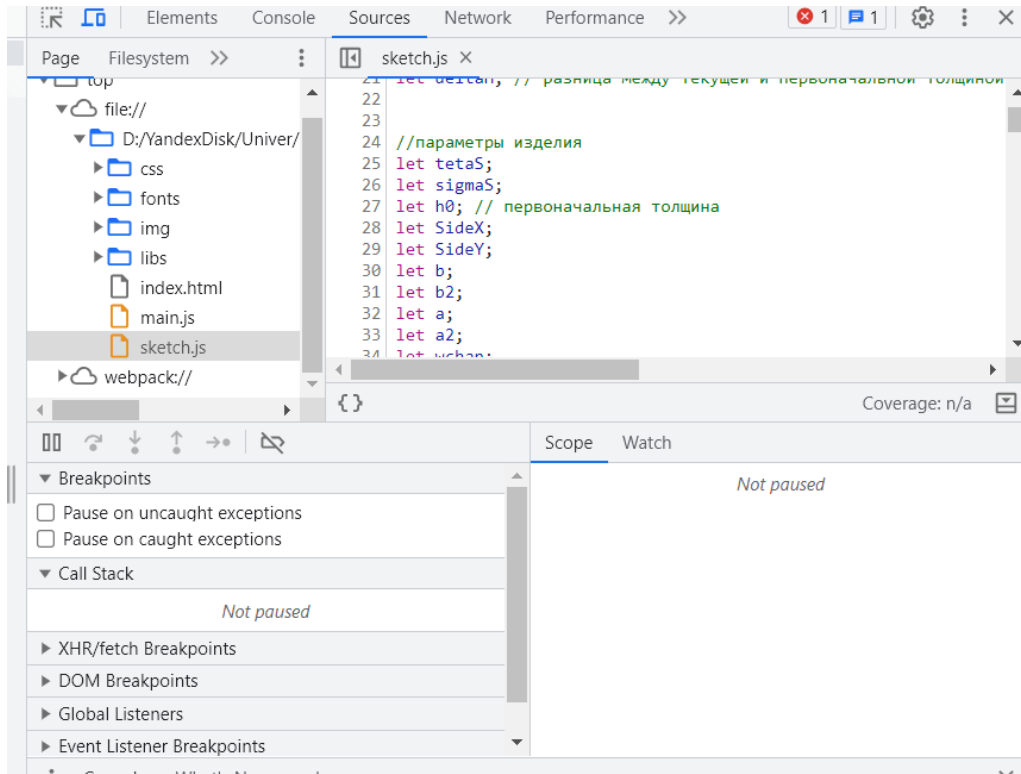
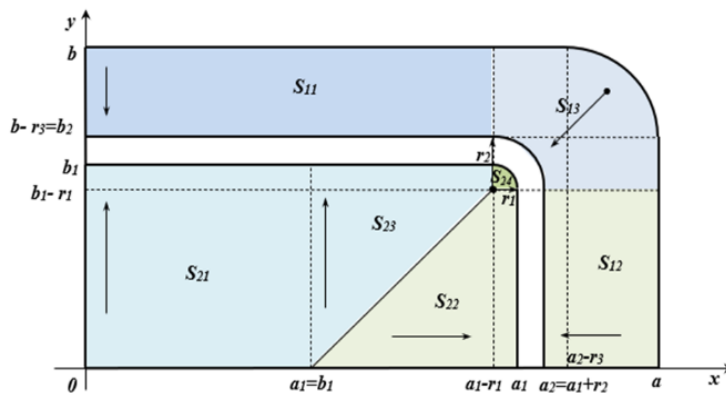


Рис. 6.20. Инструменты разработчика

Задача о сжатии вязкопластического материала между жесткими плитами



Толщина изделия (h0)	<input type="text" value="4"/>	(мм)	Предел текучести при сдвиге (тета)	<input type="text" value="10"/>	(МПа)
До какой толщины сжимаем (h)	<input type="text" value="2.8"/>	(мм)	Ширина канала	<input type="text" value="1"/>	(мм)
Внутренняя граница по X (a2)	<input type="text" value="15"/>	(мм)	Радиус закругления внешних уголков r3	<input type="text" value="2"/>	(мм)
Внешняя граница по X (a)	<input type="text" value="35"/>	(мм)	Радиус закругления внешнего угла канала r2	<input type="text" value="1"/>	(мм)
Внутренняя граница по Y (b2)	<input type="text" value="15"/>	(мм)	Радиус закругления центральной части r1	<input type="text" value="10"/>	(мм)
Внешняя граница по Y (b)	<input type="text" value="25"/>	(мм)			

Построить

Рис. 6.21. Первая часть интерфейса

Перед полями ввода изображена расчетная схема конкретной детали, в данном случае - прямоугольного фланца с контурным ребром.

Для всех полей работает фильтр по вводимым значениям (рис. 6.22):

1. Все значения должны быть числовыми.
2. Все поля должны быть заполнены (кроме радиусов закругления).
3. Значения b_2 и b_1 должны быть больше a_2 и a_1 соответственно.
4. Контроль над вводимыми значениями радиусов закругления.

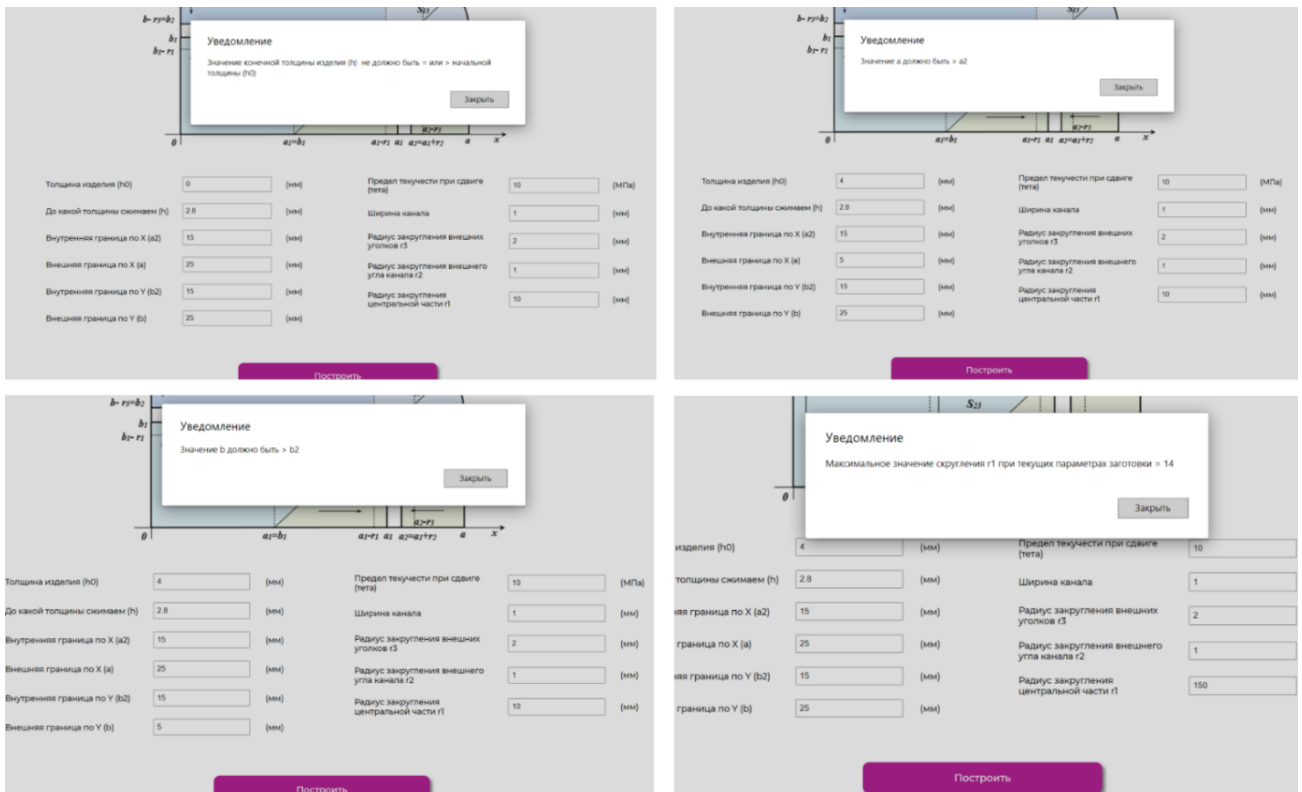


Рис. 6.22. Срабатывание фильтра при неверно заполненных полях

Вторая часть интерфейса (рис 6.22) представляет собой Canvas: в левой части – это поле определённых размеров, в данном случае 1000×730 px (пикселей) на котором, собственно, и будет происходить визуализация, а также кнопки управления процессом визуализации. В левом верхнем углу поля Canvas видны значения времени (t) и текущей толщины изделия (h), которые динамически меняются в ходе моделируемого процесса.

Функция кнопки «Начать / Остановить Симуляцию» собственно ясна из

названия - приостановка запуска прорисовки процесса.

Кнопка «Перерисовать» возвращает к начальным позициям частицы заготовки, обнуляет счётчик времени процесса, восстанавливает значение текущей толщины заготовки (h) до начальной (h_0).

Кнопка «Второе приближение» (см. рис. 6.24) перерисовывает область с увеличением исследуемой подобласти согласно расчётной схеме.

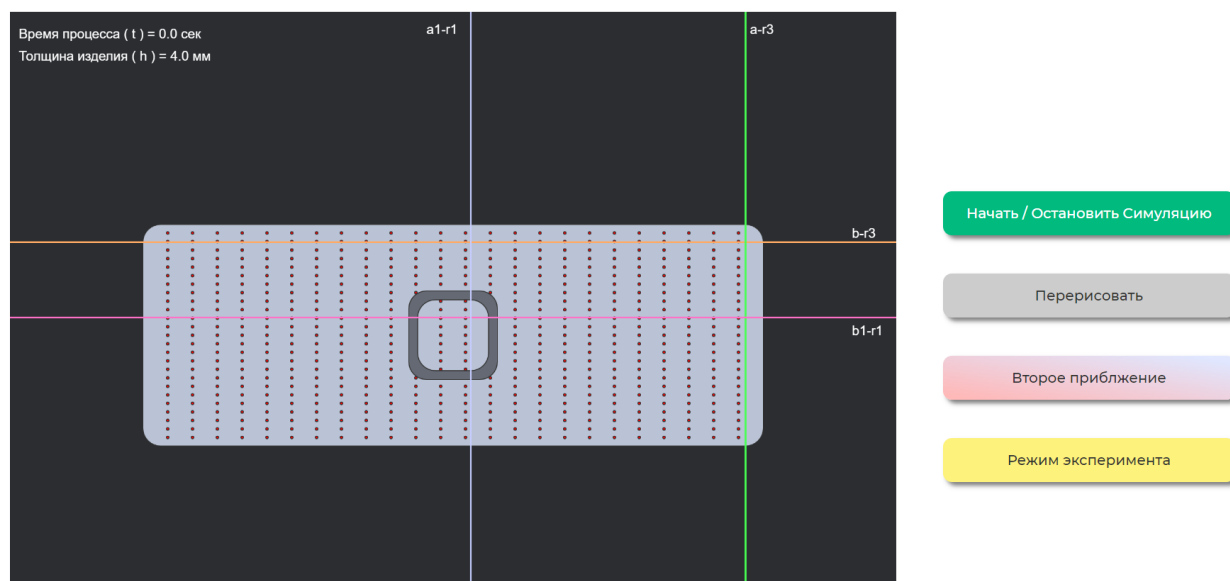


Рис. 6.23. Вторая часть интерфейса

Используемая библиотека позволяет отображать задаваемые параметры формы растекающегося слоя (длины сторон, углы, радиусы закругления, ширина канала и т.п.). Возможные варианты сочетания геометрии показаны на рис. 6.24. Также доступно в реальном времени отслеживание особенностей кинематики течения слоя материала в двусвязной области. Исследуемым объектом была поковка сложного фланца с контурным ребром. Прогнозировалось перемещение частиц слоя металла поковки с определенными скоростями, что соответствует формоизменению по стадиям, которому подвергается слой. Варьировались форма и размеры внешней и внутренней границ, определяющих области течения двусвязного объекта (см. рис. 6.24).

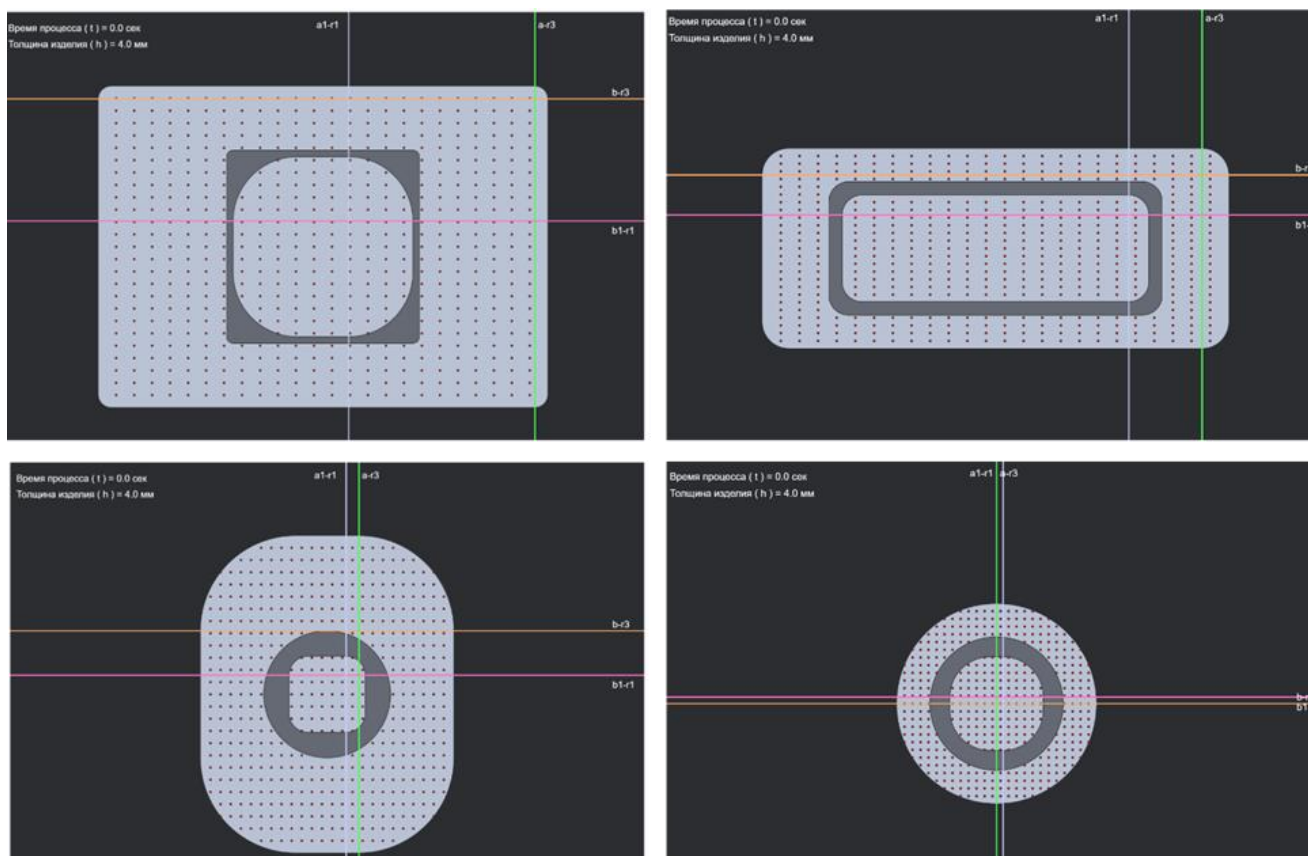


Рис. 6.24. Отображения возможных форм поковки фланца

6.7.2 Процесс визуализации математической модели течения тонкого слоя между сближающимися поверхностями

На поверхность рассматриваемой области наносится равномерная сетка из конечного количества частиц, которые составляют слой материала (рис. 6.25). Количество частиц можно задать любое внутри программы, в пределах используемой модели, помня об ограничениях, чтобы не перегружать процессор. Каждая частица представляет собой единичный экземпляр общего класса частиц с набором известных свойств: физических, химических, механических, которые определяют условную массу, состояние и кинематику частицы деформируемого слоя (например, начальное положение, траекторию движения, компоненты вектора скорости, температурные условия деформирования). Известно, что перемещение любой материальной точки слоя в плоскости, перпендикулярной к действию

внешней силы, происходит по кратчайшей нормали к периметру сечения [4–40, 69]. На схемах течения (рис. 2.26) красные линии, «тянущиеся» за частицами представляют собой траектории их движения, которые можно интерпретировать как линии тока при стационарном движении [40, 116, 119].

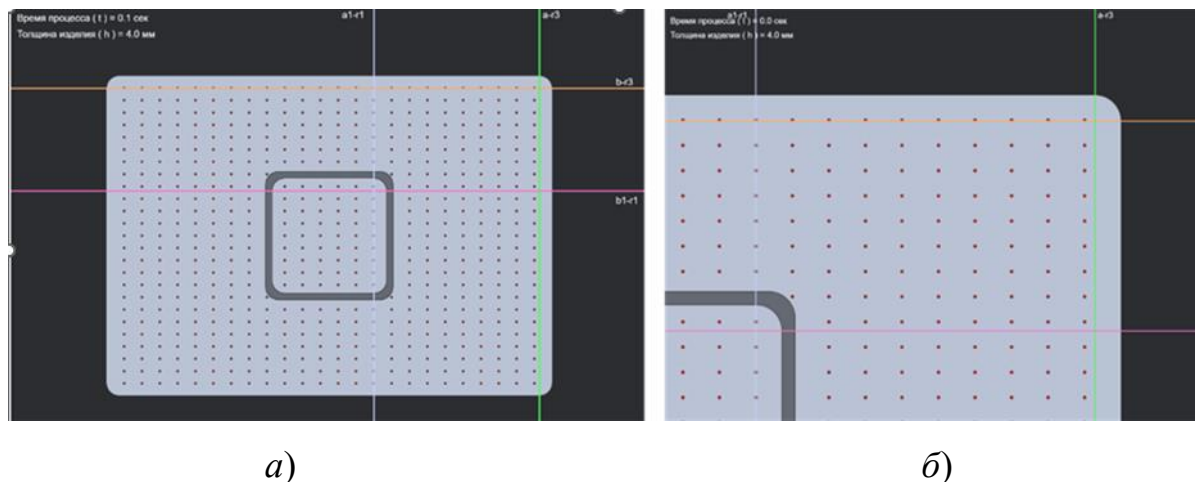


Рис. 6.25. Модели отображения исходного положения частиц слоя: а – для всей области; б – для выделенной подобласти

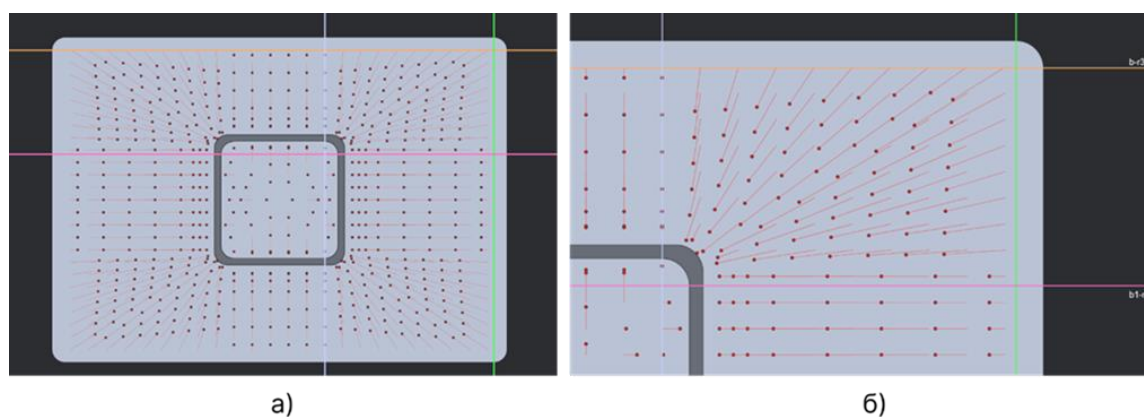


Рис. 6.26. Течение слоя металла поковки согласно принципу кратчайшей нормали к периметру при формоизменении заготовки: а – многосвязная область фланца; б – четверть рассматриваемой многосвязной области фланца

При изменении временного фактора цвет канала контурного ребра постепенно приобретает цвет заготовки, сигнализируя о затекании необходимого объема металла поковки в канал матрицы и о заполнении этого канала (рис. 6.27).

Скорость перемещения частиц задается с помощью построенной математической модели, в зависимости от расположения частиц в подобласти. Продолжительность процесса и текущая толщина заготовки меняются дискретно, как показано на рис. 6.27.

Представленные результаты моделирования процесса течения численными методами с помощью разработанной компьютерной программы позволяют, с учетом начальной формы поковки, в реальном времени анализировать процесс течения слоев плоского фланца с затеканием металла в контурные ребра, рассчитывать время процесса и технологические параметры: контактное давление, силу деформирования, необходимую для начала процесса течения, компоненты вектора скорости течения.

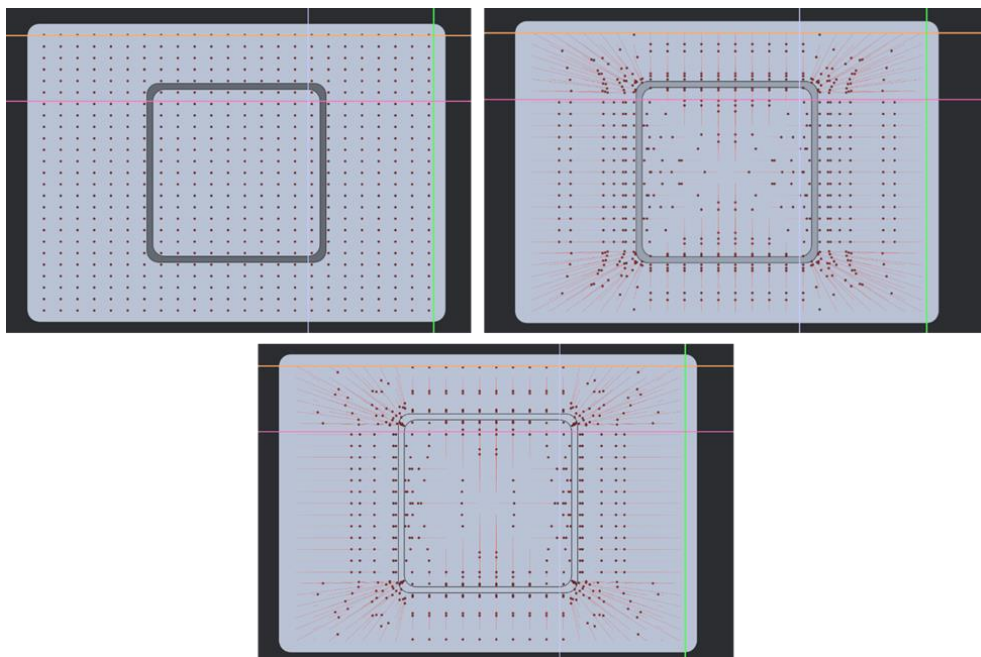


Рис. 6.27. Этапы заполнения материальными частицами деформируемого металла заготовки канала матрицы

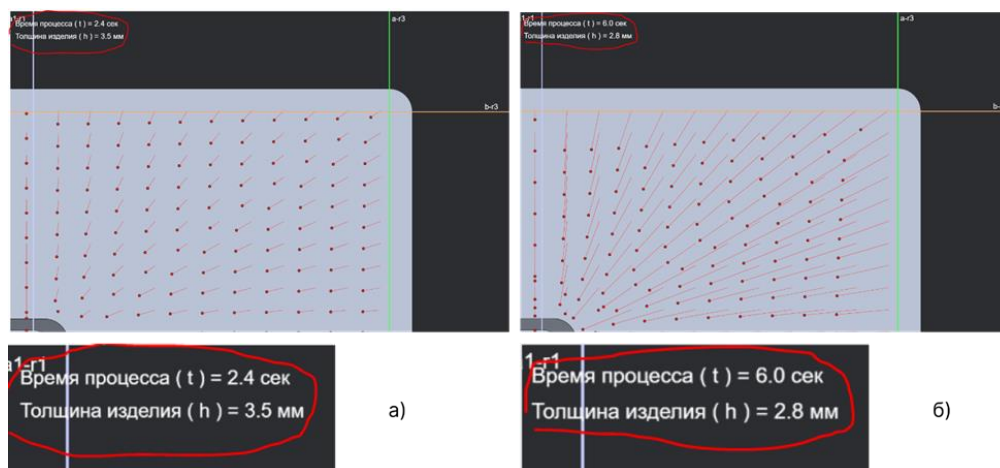


Рисунок 6.28. Параметры процесса течения пластического слоя по стадиям:

а - время от начала сжатия = 2,4 сек; текущая толщина слоя = 3,5 мм; б - время от начала сжатия = 6 сек; текущая толщина слоя = 2,8 мм

Для компьютерного моделирования составлен необходимый алгоритм и написана программа [229, 232], средствами которой строится модель течения пластического слоя в двусвязной области при варьировании различными вводимыми параметрами.

Вариативность исходных данных позволяет рассчитать, используя программу численного моделирования, кинематические характеристики типовых технологических процессов, предназначенных для получения поковок разных форм и размеров, что может помочь технологу оценить рассчитанные параметры при выборе рационального варианта технологии.

6.8. Выводы по главе 6

1. Для оценки влияния касательных напряжений, осредненных по толщине слоя, на кинематику течения, и, в особенности, вблизи неподвижных границ поставлены эксперименты и анализируются результаты по осадке между сближающимися жесткими плитами тонкого пластического образца, ограниченного неподвижными стенками и, первоначально имеющего форму прямоугольника и кругового сектора в плане. Проанализированы результаты эксперимента и проведено сравнение с результатами, полученными аналитически, в результате исследования математических моделей.

2. Установлены экспериментальные закономерности. Растекание образцов происходит по прямым линиям тока, параллельным длинной стороне прямоугольника, или по лучам кругового сектора. Продольные перемещения вблизи неподвижных стенок замедляются по сравнению с перемещениями вдали от границы, а максимальные перемещения наблюдаются на линии симметрии образца относительно неподвижных стенок. Полученный результат говорит о наличии ненулевых сдвиговых напряжений, угловых деформаций и скоростей деформаций в рассматриваемых течениях тонкого пластического слоя.

3. Результаты экспериментов по стесненной осадке тонкого прямоугольного в плане образца в штампе с неподвижными боковыми стенками показали, что они находятся в противоречии с точным решением краевой задачи, поставленной в рамках математической модели «идеальной жидкости».
4. Корректное описание течения удастся выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости», полученной осреднением по толщине пластического слоя. Для течения в средней части области, вдали от центра и свободной границы, найдено аналитическое решение задачи, которое удовлетворительно описывает течение пластического слоя, а расчетные перемещения близки не только качественно, но и количественно к данным экспериментов [1].
5. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая может быть использована для описания подобных течений.
6. Численное моделирование кинематических параметров рассматриваемых процессов течения тонкого слоя металла по поверхностям проводилось с помощью *Web* технологии, что позволило реализовать оригинальный интерфейс.
7. Первая часть интерфейса представляет собой визуализацию полей окна для ввода параметров деформируемого тела, с помощью которых будут производиться все построения и вычисления. Для всех полей создан фильтр по вводимым значениям, который срабатывает при неверно заполненных полях входных данных тонкого слоя.
8. Вторая часть интерфейса прогнозирует перемещение частиц слоя металла поковки с определенными скоростями, что соответствует формоизменению по стадиям, которому подвергается слой. Форма и размеры внешней и внутренней границ, определяющих области течения двусвязного объекта, могут варьироваться.
9. Следуя основным гипотезам механики сплошной среды, программными средствами определяются кинематические параметры течения тонкого слоя, в частности, по расходу перетекающего металла прогнозируется качество заполнения полостей инструмента, т.е. качество объекта производства.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация на тему «Математические модели нестационарного вязкопластического течения тонких пластических слоев в неканонических областях», представленная на соискание ученой степени доктора физико-математических наук автором Яновской Еленой Александровной, является научной квалификационной работой, в которой на основании выполненных автором исследований решена научная проблема, заключающаяся в обобщении научных положений теории течения тонких пластических слоев с границами неканонической формы, что позволило применительно к моделям «идеальной» и «вязкой» жидкости разработать новые методы решения ряда практических задач, имеющих важное значение, как для развития положений прикладной теории пластичности, так и для практических целей производства объектов машиностроения.

1. Математические модели и подходы к теоретическому анализу течения пластических слоев основаны на нелинейных уравнениях параболического типа. Разработанные математические модели «идеальной жидкости» в приложении к различным условиям течения позволили получить полного вида точные аналитические решения следующих задач:

– нестационарного течения методом характеристик интегрированием характеристической системы уравнений с начальными условиями в точках контура области, определив след ребра давлений и установив кинематику течения;

– течения слоя между наклонными плитами для круговой области с фиксированной границей переменной толщины слоя, которая образована пазами в одном из инструментов для свободно затекания металла. Решение задачи удалось получить аналитически (без применения приближенных вычислений);

– несимметричные течения по шероховатым плоскостям пластического слоя, составленного из разнородных сред в форме клина, которые имеют общую прямолинейную границу. Получены эволюционные уравнения для восстановления

подвижных границ рассматриваемой области и уравнение для нахождения координат точек линии ветвления течения.

В результате обобщения полученных результатов **разработан метод, проведения теоретического анализа комбинированного нагружения тонкого слоя в плоской постановке.**

2. В рамках общей математической модели «вязкой жидкости» **разработан метод получения аналитических решений краевых задач свободного течения слоя, составленного из разнородных сред в плане, в размерном и безразмерном виде.**

3. Для расчета значений различных параметров пластического формоизменения разработан **метод перехода от визуального отображения объектов, к их абстрактным образам**, описываемым наборами различительных логических и детерминированных признаков, участвующих в дальнейшем в разработке технологических процессов пластического деформирования. С помощью созданного **метода минимизации численности признаков** для классификации объектов, в том числе с тонкими полотнами, которые подлежат изготовлению методами пластического деформирования, осуществлен отбор наиболее информативных признаков, для снижения размерности признакового гиперпространства и упрощения подготовки исходных данных об объектах, сокращения времени расчетов и объема необходимой оперативной памяти ЭВМ.

4. Создан альтернативный **метод распознавания объектов неканонической формы с помощью нейросетевых алгоритмов.** Для обучения нейросети использован алгоритм глубокого обучения. Алгоритмы распознавания в соответствии с набором информативных признаков и нейросетевые алгоритмы доведены до программных реализаций, зарегистрированных Роспатентом с выдачей свидетельств, которые вошли в комплекс программ, разработанный в диссертации. В результате исследований созданы кластеры (укрупненные группы) объектов согласно имеющимся и разработанным классификаторам. С помощью разработанной методологии осуществляется поэтапный выбор математической модели для расчета важных параметров оценки напряженно-деформированного состояния материала и

прочностных расчетов. Аналитические расчеты проводятся по выбранной математической модели из возможных вариантов, разработанных и представленных в главе 2.

5. Получено полное аналитическое решение задач, основанных на теории течения А.А. Ильюшина в модели «идеальной жидкости». Разработан алгоритм расчета силовых, кинематических и деформационных параметров процесса сжатия относительно тонкого пластического слоя. Представленные результаты доказывают, что можно строить области сложной неканонической формы и применять единый теоретический метод получения полных аналитических решений краевых задач в трехмерной постановке, при этом используются разработанные универсальные математические модели и алгоритмы их реализации. Сравнение полученных теоретическим анализом численных оценок НДС, силовых, кинематических и деформационных параметров реальных процессов изготовления объектов конкретных форм и размеров с экспериментальными результатами независимых исследователей показало удовлетворительное совпадение результатов с расхождением не более 17%.

6. Разработанные динамическая и кинематическая модели напряженно-деформированного состояния позволяют оценить величины напряжений и деформаций в различных механических схемах, которые сопровождают конкретные операции пластического деформирования, а также анализировать траектории напряжений и деформаций, имеющие вид дуг окружностей, что свидетельствует о немонотонности рассматриваемых процессов деформирования. В результате исследования на основе моделей напряженного и деформированного состояний сделано обобщение полной группы операций листовой штамповки, которые, попадая в соответствующий интервал изменения угла вида НДС, однозначно характеризуются механическими схемами напряжений и деформаций с учетом их знаков.

7. Поставлены эксперименты и проведен анализ результатов по сжатию между сближающимися жесткими плитами тонких пластических образцов, ограниченных неподвижными стенками и, первоначально имеющих форму прямоугольника и кругового сектора в плане. Проведено сравнение результатов эксперимента и

аналитических результатов полученных при использовании математических моделей. Установлены следующие экспериментальные закономерности: корректное описание течения удается выполнить только в рамках общей математической модели «вязкой жидкости». а расчетные перемещения близки не только качественно, но и количественно к данным экспериментов. Сравнение полученных экспериментальных и аналитических результатов моделирования позволяет оценить корректность выбранной математической модели, которая дает более точные результаты при описании течений.

8. Численное моделирование кинематических параметров рассматриваемых процессов течения тонкого слоя металла по поверхностям проводилось с помощью *Web* технологии, что позволило реализовать интерфейс, первая часть которого представляет собой визуализацию полей окна для ввода параметров объекта, с помощью которых производятся все построения и вычисления. Для всех полей создан фильтр по вводимым значениям, который срабатывает при неверно заполненных полях входных данных тонкого слоя. Вторая часть интерфейса прогнозирует перемещение частиц слоя металла с определенными скоростями, что соответствует поэтапным формоизменениям, которым подвергается слой. Анализ различных разработок в области компьютерного моделирования для задач механики деформируемого твердого тела позволил создать оригинальный комплекс программ для реализации моделирования различных процессов нестационарного пластического течения тонких пластических слоев в неканонических областях.

9. Созданные математические модели течения вязкопластического материала в неканонических областях и разработанные комплексы программ можно применять не только в области механики деформируемого твердого тела и теории пластичности. Разработанные методы и модели являются универсальными. Эти модели можно использовать при исследованиях в области медицины (например, при исследовании заболеваний крови, в области кардиохирургии и т.п.), в области робототехники (техническое зрение). Модели нестационарного вязкопластического течения в многосвязных областях можно использовать для создания новых композиционных материалов и изделий из них. Наиболее интересные научные

результаты диссертации внедрены в учебный процесс и нашли применение в промышленности, о чем свидетельствуют соответствующие Акты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов. [Монография]. М.: МГГЭУ, 2015. 122 с.
2. Семенов, Е. И. Технология и оборудование ковки и горячей штамповки: учебник/ Е. И. Семенов. М.: Машиностроение, 1999. 384 с.
3. Охримеко, Я. М. Основы технологии горячей штамповки/ Я.М. Охрименко. М.: МАШГИЗ, 1957. 328 с.
4. Охрименко, Я. М. Технология кузнечно-штамповочного производства/ Я.М. Охрименко // М.: Машиностроение, 1976. 560 с.
5. Тарновский, И. Я. Формоизменение при пластической обработке металлов/ И. Я. Тарновский. М.: Metallurgizdat, 1954. 534 с.
6. Мансуров, А. М. Технология горячей штамповки/ А. М. Мансуров // М.: Машиностроение, 1971. 415 с.
7. Крымский, И. И. Горячая штамповка/ И. И. Крымский. М.: Профтехиздат, 1963. 340 с.
8. Брюханов, А. Н. Ковка и объемная штамповка/ А. Н. Брюханов. М.: Машиностроение, 1975. 408 с.
9. Ребельский, А. В. Основы проектирования процессов горячей объемной штамповки/ А. В. Ребельский. М.: Машиностроение, 1965. 248 с.
10. Данилин, В. Н. Моделирование течения металла и температурных полей при прессовании разными способами/ В. Н. Данилин, А. В. Данилин// Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением// 2005. №5. С. 29 – 38.
11. Целиков, А. И. Теория продольной прокатки/ А. И. Целиков, Г. С. Никитин, С. Е. Рокотян. М.: Metallurgiya, 1980. 320 с.
12. Рудской, А. И. Теория и технология прокатного производства/ А. И. Рудской, В. А. Лунев. СПб.: Наука, 2008. 527 с.
13. Корякин, Н. А. Штамповка обкатыванием. Состояние и перспективы развития/ Н. А. Корякин// Кузнечно-штамповочное производство. 1990. №12. С. 5 – 7.

14. Баркая, В. Ф. Формоизменение листового металла/ В. Ф. Баркая, С. Е. Рокотян, Ф. И. Рузанов. М.: Металлургия, 1976. 262 с.

15. Потапов, И. Н. Новая технология винтовой прокатки/ И. Н. Потапов, П. И. Полухин/ М.: Металлургия, 1975. 344 с.

16. Харитонов, Е. А. Об особенностях моделирования процесса радиально-сдвиговой прокатки прутков из сплава Ti-6Al-4V с помощью комплекса Deform-3D/ Е. А. Харитонов, П. Л. Алексеев, А. С. Хамраев, С. А. Усталов, М. Г. Петрень// Технология Легких Сплавов. 2015. № 1. С. 48 – 51.

17. Годунов, С. К. Уравнения математической физики/ С.К. Годунов// М.: Наука, 1971. 416 с.

18. Физика высоких давлений/ П. Бриджмен/ М. – Ленинград: Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1935. 402 с.

19. Ильюшин, А. А. Труды (1946-1966). Т. 2. Пластичность/ Составители Е. А. Ильюшина, М. Р. Короткина. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 480 с.

20. Кийко, И. А. Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы /И. А. Кийко// Вестник Московского университета. Сер. 1: Математика. Механика. 2002. №4. С. 50 – 56.

21. Кийко, И. А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/ И. А. Кийко // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 15 – 26.

22. Prandtl, L. Spannungsverteilung in hlastischtn Korper Verhandl. D. I. Intern. Kohgr. Fur. Techn. Mechanik. 1924. S.45.

23. Прандтль, Л. Примеры применения теоремы Генки к равновесию пластических тел/ Теория пластичности. Сборник статей/ М.: Гос. изд. Иностранной литературы, 1948. С. 102 – 113 = Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht// ZAMM. 1923. Bd.3. H.6. Pp.401–406.

24. Толоконников, Л. А. Некоторые эффективные решения задачи о скольжении металла в слое/ Л. А. Толоконников, В. Б. Пеньков// Прикладная механика. 1990. 26. №9. С.75 – 82.

25. Леванов, А. И. Контактное трение в процессах обработки металлов давлением/ А. И. Леванов, В. А. Колмогоров, С. П. Буркин и др./ М.: Металлургия, 1976. 416 с.

26. Трение и смазки при обработке металлов давлением/ А. П. Грудев, Ю. В. Зильберг, В. Т. Тилик. Справ. изд. М.: Металлургия, 1982. 312 с.

27. Горячева, И. Г. Контактные задачи в трибологии/ И. Г. Горячева, М. Н. Добычин. М.: Машиностроение, 1988. 256 с.

28. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести/ Н. Н. Малинин. М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.

29. Качанов, Л. М. Основы теории пластичности/ Л. М. Качанов. М.: Наука, 1969. 420 с.

30. Тимошенко, С. П. Теория упругости/ С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. М.: Наука, 1979. 560 с.

31. Годфри, Д. Теория упругости и пластичности/ Д. Годфри. Киев: Будівельник, 1969. 309 с.

32. Аксенов, Л. Б. Системное проектирование процессов штамповки/ Л. Б. Аксенов. Л.: Машиностроение, 1990. 240 с.

33. Ильюшин, А. А. Вопросы теории пластического течения вещества по поверхностям/ А. А. Ильюшин// Прикладная математика и механика. 1954. Т.18. №3. С.265 – 288.

34. Кийко, И. А. Течение тонкого слоя пластического материала по упруго-деформируемым плоскостям/ И. А. Кийко// Инженерный журнал. 1965. Т.5. Вып.2. С. 372 – 375.

35. Кадымов, В. А. Некоторые новые решения нестационарных задач растекания пластического слоя по упруго-деформируемым поверхностям/ В. А. Кадымов, С. К. Быстриков// Известия ТулГУ. Сер. Механика деформируемого твердого тела и обработка металлов давлением. 2006. Т.12. Вып.2. С.54 – 60.

36. Маруфий, А. Т. Методика расчета плиты на упругом основании с участком пониженной жесткости основания/ А. Т. Маруфий, А. В. Цой, А. С. Калыков// Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2021. №1. С. 9 – 13.

37. Кадымов, В. А. О растекании пластического слоя по поверхностям, упругая податливость которых описывается моделью винклеровского основания/ В. А. Кадымов, Г. Х. Соловьев, С. К. Быстриков// Тез. докл. на Ломоносовских чтениях МГУ. 2005.

38. Ильюшин, А. А. Труды Т.4. Моделирование динамических процессов в твердых телах и инженерные приложения/ А. А. Ильюшин. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. 526 с.

39. Воробьев, В. М. Основы теории и реализация технологических решений процессов выдавливания металлов в многоканальных штампах: Учебное пособие. / В. М. Воробьев. М.: «ИП Скороходов В.А.». 2012. 290 с.

40. Сторожев, М. В. Теория обработки металлов давлением/ М. В. Сторожев, Е. А. Попов. М.: Машиностроение, 1977. 423 с.

41. Яловой, Н. И. Тепловые процессы при обработке металлов и сплавов давлением/ Н. И. Яловой, М. А. Тылкин, П. И. Полухин и др. М.: Высшая школа, 1973. 631 с.

42. Сосенушкин, Е. Н. Прогрессивные процессы объемной штамповки/ Е. Н. Сосенушкин. М.: Машиностроение, 2011. 480 с.

43. Реология. Теория и приложения/ Ред. Ф. Эйриха, перев. с англ. под ред. Ю. Н. Работнова и П. А. Ребиндера. М.: Инностранная литература, 1962. 824 с.

44. Рейнер, М. Реология. / М. Рейнер. Перев. с англ. Н. И. Малинина/ под ред. Э. И. Григолюка. М.: Наука, 1965. 620 с.

45. Безухов, В. Н. Об осадке пластического слоя некруглой формы в плане/ Диссертация на соискание ученой степ. к.ф.-м.-н. М., 1955. 78 с.

46. Победря, Б. Е. Механика композиционных материалов/ Б. Е. Победря. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. 336 с.

47. Кучеряев, Б. В. Механика сплошных сред. Теоретические основы обработки давлением композиционных металлов с задачами и решениями, примерами и упражнениями. М.: МИСиС, 2006. 604 с.

48. Мохель, А. Н. Тонкий пластический слой с произвольным контуром, сжимаемый между жесткими плитами/ А. Н. Мохель, Р. Л. Салганик// ДАН СССР. 1987. Т.293. №4. С. 809 – 813.

48. Ганаго, О. А. Приближенное решение задачи сжатия с одновременным кручением тонкого слоя / О. А. Ганаго, Ю. А. Бочаров и др. // Известия вузов. Машиностроение. 1978. №2. С. 140 – 144.

50. Хван, А. Д. Штамп для осадки с кручением плоских заготовок / А. Д. Хван // Заготовительные производства в машиностроении. 2010. №5. С. 18 – 20.

51. Хван, Д. В. Устойчивость цилиндрических заготовок при их растяжении с кручением / Д. В. Хван // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2006. №7. С. 7 – 10.

52. Субич, В. Н. Пластическое течение материала в тонком слое при комбинированном нагружении / В. Н. Субич // Кузнечно-штамповочное производство. 1986. №10. С. 5 – 7.

53. Гольденблат, И. И. Критерии прочности и пластичности конструкционных материалов / И. И. Гольденблат, В. А. Копнов. М.: Машиностроение, 1968. 192 с.

54. Георгиевский, Д. В. Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля / Д. В. Георгиевский // Известия РАН. Механика твердого тела. 2009. №1. С. 83 – 93. ISSN: 1026-3519

55. Hill, R. A method of numerical analysis of plastic flow in plane strain and its application to the compression of a ductile material between rough plates / R. Hill, E. H. Lee, S. J. Tupper // J. Appl. Mech. 1951. V.18. No.1. P. 46 – 52.

56. Хилл, Р. Математическая теория пластичности / Р. Хилл. М.: Гостехиздат, 1956. 408 с. = Hill, R. The Mathematical Theory of Plasticity / Oxford: Clarendon Press. 1950.

57. Надаи, А. Пластичность и разрушение твердых тел / А. Надаи. М.: Изд. Иностранная литература, 1954. 648 с. = Nadai A. Theory of Flow and Fracture of Solids. N.Y.: Wiley, 1950.

58. Hodge, P. G. Approximate solutions of problems of plane plastic flow / P. G. Hodge // J. Appl. Mech. 1950. V.17. No.3. P. 257 – 264.

59. Кадымов, В. А. Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов / Сб. научн. трудов «Упругость и неупругость». М.: МГУ, 2016. С. 180-185.

60. Ильюшин, А. А. Полная пластичность в процессах течения между жесткими поверхностями, аналогия с песчаной насыпью и некоторые приложения/ А. А. Ильюшин// Прикладная математика и механика. 1955. Т.19. № 6. С. 693 – 713.
61. Задоян, М. А. Пространственные задачи теории пластичности/ М. А. Задоян. М.: Наука, 1992. 384 с.
62. Ишлинсткий, А. Ю. Математическая теория пластичности/ А. Ю. Ишлинсткий, Д. Д. Ивлев. М.: Физматлит, 2001. 704 с.
63. Прагер, В. Теория идеально пластических тел/ В. Прагер, Ф. Г. Ходж. М.: Изд. Иностранной литературы, 1956. 398 с.= Prager W., Hodge P.G. Theory of Perfectly Plastic Solids. N.Y.: Wiley, 1951.
64. Соколовский, В. В. Теория пластичности/ В. В. Соколовский. М.: Высшая школа, 1969. 608 с.
65. Победря, Б. Е. Математическое моделирование деформирования композитов с учетом термодиффузии/ Б. Е. Победря, И. Л. Гузий// Математическое моделирование систем и процессов. 1998. №6. С. 82 – 91.
66. Кийко, И. А. Обобщение задачи Прандтля о сжатии полосы для сжимаемого материала/ И. А. Кийко// Вестник МГУ. 1980. №5. С.66 – 70.
67. Кийко, И. А. Обобщение задачи Л. Прандтля об осадке полосы на случай сжимаемого материала/ И. А. Кийко, В. А. Кадымов// Вестник Московского университета. Сер.1: Математика. Механика. 2003. №4. С. 47 – 52.
68. Друянов, Б. А. Теория технологической пластичности/ Б. А. Друянов, Р. И. Непершин. М.: Машиностроение, 1990. 272 с.
69. Колмогоров, В. Л. Механика обработки металлов давлением/ В. Л. Колмогоров. Екатеринбург: Изд-во УрГТУ – УПИ, 2001. 836 с.
70. Георгиевский, Д. В. Задача Прандтля для слабонеоднородного по пределу текучести пластического слоя// Изв. РАН. Механика твердого тела. 2006. №1. С. 47 – 59.
71. Теория обработки металлов давлением: учебник для вузов/ В. А. Голенков, С. П. Яковлев, С. А. Головин и др./под ред. В. А. Голенкова, С. П. Яковлева. М.: Машиностроение, 2013. 442 с.

72. Теорияковки и штамповки: учеб. пособие для студ. машиностроительных и металлургических специальностей вузов/ Е. П. Унксов, У. Джонсон, В. Л. Комогоров и др. Под общ. ред. Е. П. Унксова, А. Г. Овчинникова. М.: Машиностроение, 1992. 720 с.

73. Ильюшин, А. А. Деформация вязкопластического тела/ А. А. Ильюшин// Ученые записки МГУ. 1940. Вып. 39. С. 3 – 81.

74. Арутюнов, Ю. С. Осаживание тонких поковок произвольной формы в плане/ Ю. С. Арутюнов, А. Л. Гонор// Известия АН СССР. Механика и математика. 1963. №1. С. 166 – 171.

75. Кийко, И. А. Вариационный принцип в задачах течения тонкого слоя пластического вещества/ И. А. Кийко// ДАН СССР. 1964. Т.157. №3. С. 551 – 553.

76. Кадымов, В. А. Математическое моделирование контактных задач пластического течения/ В. А. Кадымов. Saarbrücken: Palmarium Academic Publishing, 2016. 129 p.

77. Непершин, Р. И. Пластическое течение при сжатии диска между параллельными плитами/ Р. И. Непершин// Машиноведение, 1968. №1. С.97–100.

78. Родригес, Р. Р. Некоторые задачи анизотропного течения/ Р. Р. Родригес// Численное моделирование в задачах механики. М.: МГУ. 1991. С. 71 – 75.

79. Ильюшин, А. А. Моделирование горячих и скоростных процессов обработки металлов давлением/ А. А. Ильюшин// Изв. АН СССР. 1952. Вып. 4. Т.16. С. 386 – 398.

80. Кадымов, В. А. К исследованию дифференциального уравнения свободного растекания пластического слоя на плоскости/ В. А. Кадымов, Известия Тул ГУ. 2008. Вып.2. С.86 – 92.

81. Белов, Н. А. Об одном случае решения краевой задачи о растекании пластического слоя между сближающимися жесткими плитами/ Н. А. Белов, В. А. Кадымов/ Упругость и неупругость. матер. Международного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел. М.: С. 117 – 119.

82. Александрович, А. И. Тензор коэффициентов трения анизотропных поверхностей/ А. И. Александров, Б. С. Векшин, И. Н. Потапов// Трение и износ. 1985. Т.6. №6. С. 996 – 1004.

83. Erisov, Y. An exact axisymmetric solution in anisotropic plasticity/ Y. Erisov, S. Surudin, F. Grechnikov and et. (2021) *Symmetry*, 13 (5), № 825. DOI: 10.3390/sym13050825.

84. Кийко, И. А. Анизотропия в процессах течения тонкого пластического слоя/ И. А. Кийко// *Прикладная математика и механика*. 2006. Т 70. Вып. 2 С. 344 – 351.

85. Березин, И. М. Определение условий пластического течения некомпактных материалов/ И. М. Березин, А. Г. Залазинский// *Фундаментальные исследования*. 2013. №8. Часть 1. С.19 – 23.

86. Безухов, В. Н. Некоторые задачи осадки пластического слоя// *Изв. арт. акад. им. Ф. Э. Дзержинского*. 1956.

87. Кийко, И. А. Теория пластического течения в тонком слое металла/ И. А. Кийко// *Научные труды института механики МГУ*. 1971. №5. 65 с.

88. Кадымов, В. А. Некоторые точные решения эволюционного уравнения растекания пластического слоя на плоскости/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская// *Вестник Московского ун-та. Сер. 1. Математика. Механика*. 2016. №3. С. 61 – 65.

89. Кадымов, В. А. Пластические течения в тонком слое: новая постановка краевой задачи и ее решение/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская и др./ *Сб. тезисов 3-й Международной конф. «Моделирование нелинейных процессов и систем»*. М.: Янус-К, 2019. С. 99 – 103.

90. Кадымов, В. А. Контактная задача о несвободном растекании пластического слоя на плоскости: эксперимент и теория/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов /*Сб. научн. трудов «Упругость и неупругость»*. М.: МГУ, 2016. С.180 – 185.

91. Кадымов, В. А. Обобщения постановок краевых задач теории течения тонких пластических слоев и новые решения/ В. А. Кадымов, С. К. Быстриков// *Упругость и неупругость. матер. Международного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел*. М.: ЛЕНАНД, 2006. 480 с. С.153 – 160.

92. Бодунов, М. А. О растекании тонкого пластического слоя/ М. А. Бодунов, Д. М. Бодунов, В. П. Исаев и др.// *Известия МГТУ МАМИ*. №1(9). 2010. С. 181 –1 85.

93. Радаев, Ю. Н. Автомодельные решения осесимметричной задачи теории пластичности/ Ю. Н. Радаев, Ю. Н. Бахарева, Ю. Н. Рябова //Вестник Самарского гос. ун-та. Естественнонаучная серия. 2003. №2(28). С. 96 – 112.

94. Кадымов, В. А. Технологические процессы штамповки тонкостенных элементов конструкций и задачи оптимального проектирования/ В. А. Кадымов/ *Proceed of 6th Int. Conf. COIF 2018/* Pp. 184 – 186.

95. Кийко, И. А. К теории пластического течения в тонком слое по деформируемым поверхностям/ И. А. Кийко// Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1966. № 5. С. 123 – 126.

96. Кийко, И. А. О форме анизотропного пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями с анизотропным трением/ И. А. Кийко// Вестник Московского университета. Серия 1: Математика. Механика. 2015. № 3. С. 40 – 49.

97. Георгиевский, Д. В. Избранные задачи механики сплошной среды/ Д. В. Георгиевский. М.: ЛЕНАНД, 2018. 560 с.

98. Георгиевский, Д. В. Об осесимметричном аналоге задачи Прандтля/ Д. В. Георгиевский// Доклады РАН. 2008. Т.422. №3. С.331 – 333.

99. Георгиевский, Д. В. Течение Сен-Венана в тонком слое, подверженном пластическому сжатию/ Д. В. Георгиевский// Известия РАН. Механика твердого тела. 2011. №4. С.104 – 115.

100. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике: [перевод с англ.] / О. Зенкевич. М.: Мир. 1975. 541 с.

101. Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд М.: Мир, 1979. 392 с.

102. Норри, Д. Введение в метод конечных элементов [перевод с англ.] / Д. Норри, Ж. де Фриз. М.: Мир. 1981. 304 с.

103. Галлагер, Р. Метод конечных элементов. Основы [перевод с англ.] / Р. Галлагер. М.: Мир, 1984. 428 с.

104. Ганиева, В. Р. Компьютерное моделирование технологических процессов обработки давлением конструкционных сверхпластичных материалов/

В. Р. Ганиева, О. П. Тулупова, Ф. У. Еникеев и др. // Вестник машиностроения. 2017. №2. С.63 – 69.

105. Сосенушкин, Е. Н. Технология углового прессования и ее анализ с помощью компьютерных и физических моделей/ Е. Н. Сосенушкин, Л. М. Овечкин, А. Е. Сосенушкин // Вестник машиностроения. 2016. №7. С.81 – 85.

106. Востров, В. Н. Выбор рациональных режимов угловой раскатки деталей с фланцами на основе компьютерного моделирования в программном комплексе Deform-3D/ В. Н. Востров, П. В. Кононов, В. В. Мишин и др. // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. №8. С.26 – 32.

107. Песин, А. М. Моделирование кинематики течения металла при асимметричной тонколистовой прокатке алюминиевого сплава 5083/ А. М. Песин, Д. О. Пустовойтов // Заготовительные производства в машиностроении. 2016. №4. С.26 – 31.

108. Богатов, А. А. Конечно-элементное моделирование кузнечной протяжки полос без изменения формы и размеров в условиях знакопеременной деформации/ А. А. Богатов, Д. Ш. Нухов // Изв. ВУЗов. Черная металлургия. 2015. №6. С.422 – 428.

109. Соломонов, К. Моделирование формообразования поковок: исследования, гипотезы, разработки/ К. Соломонов. Saarbrücken (Germany): LAMBERT Academic Publishing, 2011. 165 с.

110. Соломонов, К. Н. Применение «песчаной аналогии» для моделирования процессов ОМД/ К. Н. Соломонов, Л. И. Тищук // Сборник научных трудов Международной научно-практической конференции «Современная металлургия начала нового тысячелетия». Липецк: Изд-во ЛГТУ. 2014. Часть 1. С. 203 – 208.

111. Чумаченко, Е. Н. Экспресс-расчет основных параметров штамповки длинномерных поковок/ Е. Н. Чумаченко, В. Н. Корзо, Л. П. Степаненкова // Вестник машиностроения. 2015. №2. С.84 – 88.

112. Соломонов, К. Н. Использование САПР для решения прикладных задач/ К. Н. Соломонов, В. В. Свирин, А. И. Фролов // САПР и графика. 2011. №2.

113. Solomonov, K. N. Classification of the Simulation Methods for Various Applications // Proceedings of the XIII International Scientific Conference «New

technologies and achievements in metallurgy and materials engineering»/ К.Н. Solomonov. Czestochowa (Poland), May 29–31, 2012. P. 522–528.

114. КОМПАС-3D. Руководство пользователя/ Москва: ООО «АСКОН "Системы проектирования», 2015. 2580 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: https://kompas.ru/source/info_materials/kompas_v16/COMPAS-3D_Guide.pdf

115. T-FLEX CAD. Трёхмерное моделирование. Руководство пользователя. ЗАО «Топ Системы». Москва, 2020. 1 416 с. [Электронный ресурс] Режим доступа: <https://www.tflex.ru/downloads/V16/T-FLEX%20CAD%20-%20Documentation%203D.pdf>

116. Математическое моделирование в нелинейной механике/ Е. Н. Чумаченко, Т. В. Полякова, С. А. Аксенов и др. М.: ИКИ РАН, 2009.

117. Соломонов, К. Н. Аналоговое моделирование поверхности контактных давлений/ К. Н. Соломонов, Л. И. Тищук, Е. А. Листров, Е. Ф. Романенко// Известия Юго-Западного государственного университета. Серия: Техника и технологии. 2016. N 3 (20). С. 32–36.

118 Соломонов, К. Н. Закономерности формообразования плоской заготовки в процессахковки и штамповки// Collective monograph on the XVIII International Scientific Conference «New technologies and achievements in metallurgy, material engineering and production engineering and physics»/ К. Н. Соломонов, Л. И. Тищук, Н. И. Федоринин. Czestochowa (Poland), No 68. 2017. P. 258 – 265.

119. Паршин, В. С. Практическое руководство к программному комплексу DEFORM-3D: учебное пособие/ В. С. Паршин, А. П. Карамышев, И. И. Некрасов, Ю. Б. Чечулин Екатеринбург: УрФУ, 2010. 265 с.

120. Моделирование процессов обработки металлов давлением в программе QFORM V8: методические указания/ В. Р. Каргин, А. В. Казаков. Самара: Издательство Самарского университета, 2021. 56 с.

121. Огибалов, П. М. Растекание тонкого пластического слоя/ П. М. Огибалов, И. А. Кийко, Л. К. Кийко// Прикладная механика. 1988. Т.24. №10. С.88 – 94.

122. Сосенушкин, Е. Н. Пластическое течение в тонком слое: теория, математические модели, анализ решений и их приложения/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская. [Монография] М.: Янус-К, 2023. 208 с./

123. Кадымов, В. А. К задаче о комбинированном нагружении полосы/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Т.26. №3. 2024. С. 140 – 146.

124. Яновская, Е. А. Использование характеристик в нестационарных задачах пластического течения тонкого слоя по плоскостям/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. Т.25. №4. 2023. С. 139 – 144.

125. Кадымов, В. А. Нестационарные задачи течений в тонком пластическом слое/ В. А. Кадымов. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н. Специальность 01.02.04 Механика деформируемого твердого тела. М.: МГУ, 1994. 226 с.

126. Тарновский, И. Я. Контактные напряжения при пластической деформации/ И. Я. Тарновский, А. Н. Леванов, М. И. Посеваткин/ М.: Металлургия, 1966. 279 с.

127. Унксов, Е. П. Инженерные методы расчета усилий при обработке металлов давлением/ Е. П. Унксов. М.: Машгиз, 1955. 280 с.

128. Арнольд, В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения/ В. И. Арнольд. М.: МЦНМО, 2012. 344 с.

129. Привалов, И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного/ И. И. Привалов. М.: Наука, 1984. 432 с.

130. Пластическое течение материалов. Физико-математические основы технологии обработки давлением/ Под общей ред. И. А. Кийко. М.: Изд-во Центра прикладных исследований МГУ, 2003. 98 с.

131. Степанский, Л. Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением/ Л.Г. Степанский. М.: Машиностроение, 1979. 215 с.

132. Гун, Г. Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением: учеб. пособие для вузов/ Г. Я. Гун. М.: Металлургия, 1983. 352 с.

133. Корн, Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров/ Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1978. 832 с.

134. Кадымов, В. А. Об одной новой математической постановке контактной краевой задачи пластического течения в тонком слое / В. А. Кадымов, М. С. Максюттов // Наука и Мир, М.: Изд-во «Научное обозрение».2016 №7 – 1(35) с.20 – 23, ISSN 2308-4804

135. Яновская, Е. А. Моделирование и сравнение результатов точного аналитического решения краевой задачи течения в тонком слое с экспериментальными данными/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2023. Т. 25. № 3 (113). С. 130 – 139.

136. Кадымов, В. А. К задаче о пластическом растяжении полосы с учетом условий на торцах/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ Межвузовская конференция «Математика в созвездии наук» М.: Изд-во МГУ. 2024. С.407 – 409.

137. Кадымов, В. А. Пластическое растяжение полосы с несимметричными условиями в области захватов/ В. А. Кадымов, Н. Л. Лисунец, Е. А. Яновская// Черные металлы. №5.2024. С. 75 – 80.

138. Кадымов, В. А. Контактные задачи пластического течения в тонком слое: теория, анализ решений и их приложения / В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская// Проблемы машиностроения и надежности машин. 2022. №3. С. 18 – 28.

139. Кадымов, В. А. Задача о растекании пластического слоя, состоящего из разных сред/ В. А. Кадымов// Известия МАМИ. №2(27). 2012. Т.2. С. 323 – 330.

140. Яновская, Е. А. Моделирование задачи о свободном растекании пластического слоя, состоящего из разных сред, в постановке модели «идеальной жидкости»/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2023. Т. 25. № 4. С.132 – 138.

141. Яновская, Е. А. Правка листовых заготовок пластическим растяжением с учетом сжатия в области захватов/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2025. Т. 27. № 1. С.155–165.

142. Кадымов, В. А. Оценка напряженного состояния биметаллического композита, составленного из разнородных слоев/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская// Фундаментальные основы механики. 2022. № 10. С. 66 – 71.

143. Яновская, Е. А. Кадымов, В. А. К вопросу об осадке пластического слоя с неоднородными свойствами по толщине/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ В сборнике: Созвездие Роскосмоса: траектория науки. Материалы докладов Отраслевой научно-практической конференции. Санкт-Петербург, 2023. С. 61 – 66.

144. Свидетельство № 2025660663 о государственной регистрации программы сжатия биметаллической полосы/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. С. Дрякина. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 25.04.2025. Бюл. № 3. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. <https://www.fips.ru/registers-web/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>.

145. Свидетельство № 2025614054 о государственной регистрации программы сжатия биметаллического кольца/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. С. Дрякина. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 18.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025614054&TypeFile=html.

146. Полянин, А. Д. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. Точные решения/ А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. //М.: Физматлит, 2002. 432с.

147. Карслоу, Г.С. Теплопроводность твердых тел/ Г. С. Карслоу, Д. Егер. М.: Наука, 1964. 487 с.

148. Демидов, Л. Д. Исследование условий теплопередачи от заготовки к штампу/ Л. Д. Демидов// Кузнечно-штамповочное производство. 1960. №9. С. 14 – 19.

149. Мержанов, А. Г. Самораспространяющийся высокотемпературный синтез: теория и практика. Черноголовка: ИСМАН, 2002. 234 с.

150. Кийко, И. А. Теория пластического течения/ И. А. Кийко// М.: Изд-во МГУ. 1978. 75 с.

151. Кийко, И. А. О форме пластического слоя, сжимаемого параллельными плоскостями/ И. А. Кийко // Прикладная математика и механика. 2011. Т. 75. Вып. 1. С. 15 – 26.

152. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование теплообменных процессов твердых тел/ Е. Н. Сосенушкин, О. К. Иванова, Е. А. Яновская и др./ В сборнике: Самарские чтения (в память об академике А.А. Самарском). Материалы международной конференции. Москва, 2022. С. 225 – 228.

153. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование нагрева и остывания заготовок и поковок/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ В сборнике: Современная металлургия нового тысячелетия. Сборник научных трудов. 2015. С. 159 –166.

154. Кадымов, В. А. Математическое моделирование технологических режимов операции жидкой штамповки алюминиевых сплавов/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ В книге: Моделирование нелинейных процессов и систем. Материалы пятой международной конференции. 2021. С. 189 – 191.

155. Sosenushkin, E. N. Improving the reliability of a punched casting from a liquid alloy by process mode control/ E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, T. A. Kinzhaev// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2021. Т. 50. № 6. С. 489 – 498.

156. Белов, Н. А. О краевой задаче течения пластического слоя между сближающимися жесткими плитами/ Н. А. Белов, В. А. Кадымов // Изв. РАН. МТТ. 2011. №1. С.46 – 58.

157. Kadymov, V. A. Flow in a thin plastic layer: generalizations of the L. Prandtl's problem/ V. Kadymov, E. Yanovskaya/ EPJ Web Conf. Vol.224, 2019, 4p. //IV Intern. Conf. «Modeling of Nonlinear Processes and Systems (MNPS-2019)» // https://www.epjconferences.org/articles/epjconf/abs/2019/29/epjconf_mnps2018_01002/epjconf_mnps2018_01002.html.

158. Свидетельство №2021618781 о государственной регистрации программы SOVM для ЭВМ/ Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 01.06.2021. Бюл. №6. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2021. 1 с. <https://www.fips.ru/registers-web/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>.

159. Дегтярев, Ю. И. Методы оптимизации [Текст]: учеб. пособ. для вузов / Ю. И. Дегтярев. М.: Сов. радио, 1980. 272 с.

160. Аткинсон, Р. Введение в математическую теорию обучения/ Р. Аткинсон, Г. Бауэр, Э. Кротерс. М.: Мир, 1969. 486 с.

161. Ту, Дж. Принципы распознавания образов/ Дж. Ту, Р. Гонсалес. М.: Мир, 1978. 411 с.

162. Растрингин, Л. А. Метод коллективного распознавания/ Л. А. Растрингин, Р. Х. Эрейштейн. М.: Энергоиздат, 1981. 80 с.

163. Мазуров, В. Д. Комитеты систем неравенств и задача распознавания/ В. Д. Мазуров //Кибернетика. – 1971. – №3. – С. 140 – 146.

164. Михайлов, Г. А. Статистическое моделирование. Методы Монте-Карло: учебное пособие для вузов / Г. А. Михайлов, А. В. Войтишек. Москва: Издательство Юрайт, 2024. 323 с.

165. Барабаш, Ю. Л. Вопросы статистической теории распознавания/ Ю. Л. Барабаш. М.: Советское радио, 1967. 400 с.

166. Верхаген, К. Распознавание образов. Состояние и перспективы/ К. Верхаген, Р. Дейн, Ф. Грун и др. М.: Радио и связь, 1985. 103 с.

167. Горелик, А. Л. Методы распознавания/ А. Л. Горелик, В. А.Скрипкин. М.: Высшая школа, 1984. 208 с.

168. Кульбак, С. Теория информации и статистика/ С. Кульбак. М.: Наука, 1967. 408 с.

169. Ларичев, О. И. Выявление экспертных знаний/ О. И. Ларичев, А. И. Мечитов, Е. М. Мошкович, Е.М. Фуремс. М.: Наука, 1989. 128 с.

170. Свидетельство № 2021618779 о государственной регистрации программы GRGRUP для ЭВМ/ Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Священко. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 01.06.2021. Бюл. №6. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2021. 1 с. <https://www.fips.ru/registers-web/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>.

171. Пугачев, В. С. Статистические методы в технической кибернетике/ В. С. Пугачев. М.: Советское радио, 1971. 190 с.

172. Цыпкин, Я. З. Основы теории обучающихся систем/ Я. З. Цыпкин. М.: Наука, 1970. 251 с.

173. Загоруйко, Н. Г. Методы распознавания и их применение/ Н. Г. Загоруйко. М.: Советское радио, 1972. 206 с.

174. Елкина, В. Н. Применение методов таксономии для районирования геологических территорий/ В. Н. Елкина, Н. Г. Загоруйко, А. П. Куклин//Материалы Всесоюзной конференции. Алма-Ата, 1968.

175. Елкина, В. Н. Количественные критерии качества таксономии и их использование в процессе принятия решений/ В. Н. Елкина, Н. Г. Загоруйко// В кн.: Вычислительные системы. Новосибирск, 1969. Выпуск 36. С. 29 – 46.

176. Браверман, Э. М. Некоторые вопросы построения машин, классифицирующих объекты по не заданному заранее признаку/ Э. М. Браверман// Автоматика и телемеханика. М.: АН СССР, 1960. Т. XXI. №10. С. 1375 – 1386.

177. Дюран, Б. Кластерный анализ/ Б. Дюран, П. Одел. М.: Статистика, 1977. 128 с.

178. Фор, А. Восприятие и распознавание образов/ А. Фор. М.: Машиностроение, 1989. 272 с.

179. Харман, Г. Современный факторный анализ/ Г. Харман. М.: Статистика, 1972. 485 с.

180. Браверман, Э. М. Метод потенциальных функций в задаче обучения машины распознаванию образов без учителя/ Э. М. Браверман. //Автоматика и телемеханика. 1966. № 10. С. 100 – 121.

181. Терентьев, П. В. Метод корреляционных плед/ П. В. Терентьев// Вестник ЛГУ. Сер. Биология. 1959. №9. С. 137 – 141.

182. Bonner, R. E. A. Logical Pattern. Recognition Programm IBM/ R. E. A. Bonner //J. Res. and Dev. 1962. Vol.670. №3. P. 353 – 361.

183. Нельсон, Н. Обучающиеся машины/ Н. Нельсон. М.: Мир, 1967. 180 с.

184. Исаченкова, Н. Е. Классификация деталей в решении проблемы оценки уровня технологических процессов обработки металлов давлением/ Н. Е. Исаченкова// Кузнечно-штамповочное производство. 1981. №4. С. 32 – 35.

185. Ланской, Е. Н., Автоматизация проектирования групповых процессов холодной и полугорячей объемной штамповки при многономенклатурном производстве деталей/ Е. Н. Ланской, Е. Н. Сосенушкин. М., 1989. 84 с. (Машиностроительное производство. Сер. Технология и оборудование кузнечно-штамповочного производства: Обзорн. информ/ ВНИИТЭМР. Вып. 6).

186. Ковка и штамповка: Справочник. В 4-х т./ Ред. совет: Е. И. Семенов (пред.) и др. М.: Машиностроение, 1986. Т. 2, Горячая штамповка/ Под ред. Е. И. Семенова, 1986. 592 с.

187. Вентцель, Е. С. Теория вероятностей/ Е. С. Вентцель. М.: Наука, 1964. 576 с.

188. ГОСТ 7505-89. Поковки стальные штампованные. Допуски, припуски и кузнечные напуски. М.: Изд-во Стандартов, 1990. 52 с.

189. Барабаш, Ю. Д. Вопросы статистической теории распознавания образов/ Ю.Д. Барабаш. М.: Советское радио, 1967. 400 с.

190. Вакуленко, С. А. Практический курс по нейронным сетям/ С. А. Вакуленко, А. А. Жихарева. СПб: Университет ИТМО, 2018. 71 с.

191. Клочкова, К. В. Реализация автоматизированной системы интеллектуальной поддержки принятия решений для обеспечения требуемых свойств на примере изделия из чугуна с вермикулярным графитом/ К. В. Клочкова, Л. А. Симонова, Е. Н. Сосенушкин, Л. Р. Юсупов// Научно-технический вестник Поволжья. 2020. № 4. С. 33 – 36.

192. Сосенушкин, Е. Н. Применение методов искусственного интеллекта для компьютерного моделирования фрактальных поверхностей/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2024. Т. 26. № 1 (117). С. 109 – 115.

193. Сосенушкин, Е. Н. Компьютерное моделирование фрактальных поверхностей, построенных с использованием методов искусственного интеллекта для прогнозирования износа/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов // Известия Самарского научного центра РАН. 2024. № 4. С. 143 – 149.

194. Свидетельство № 2025613949 о государственной регистрации программы нейросетевой модели для обработки больших данных/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Баданов. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 18.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613949&TypeFile=html.

195. Шаграев, А. Г. Трансдуктивное обучение логической регрессии в задаче

классификации текстов/ А. Г. Шаграев, И. А. Бочаров, В. Н. Фальк// Программные продукты и системы. 2014. №2. С.114 – 118.

196. Кафтанников, И. Л. Особенности применения деревьев решений в задачах классификации/ И. Л. Кафтанников, А. В. Парасич// Вестник ЮУрГУ. Серия «Компьютерные технологии, управление, радиоэлектроника. 2015. Т.15. №3. С.26 – 32.

197. Чистяков, С. П. Случайные леса: Обзор/ С. П. Чистяков// Труды Карельского научного центра РАН. 2013. №1. С. 117 – 136.

198 Бучатский, П. Ю. Разработка метода определения геометрических параметров объектов на изображении на основе нейросетевого подхода/ П. Ю. Бучатский, С. В. Онищенко, С. В. Теплоухов// Вестник Адыгейского государственного университета. 2022. Вып. 3 (306). С. 57 – 62.

199. Фролов, И. И. Построение классификатора на основе машины опорных векторов для распознавания символов/ И. И. Фролов, Р. Х. Садыхов// Доклады Белорусского государственного университета информатики и радиоэлектроники. 2008. №1 (31). С.103 – 108.

200. Дэвид, Фостер. Генеративное глубокое обучение. Творческий потенциал нейронных сетей/ Фостер Дэвид. СПб.: Питер, 2020. 336 с.: ил. (Серия «Бестселлеры O'Reilly»).

201. Мухамедиев, Р. И. Введение в машинное обучение: Учебник/ Р. И. Мухамедиев, Е. Н. Амиргалиев. Алматы, 2022. 252 с.

202. Лутц, М. Изучаем Python/ М. Лутц. Пер. с англ. СПб.: Символ Плюс, 2011. 1280 с.

203. Свидетельство № 2025613740 о государственной регистрации программы построения случайных профилей поверхностей/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 14.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613740&TypeFile=html.

204. Свидетельство № 2025613950 о государственной регистрации программы реализации метода случайного смещения средних точек/ Е. Н.

Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», Оpubл. 14.02.2025. Бюл. 2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. https://www.fips.ru/registers-doc-view/fips_servlet?DB=EVM&rn=9384&DocNumber=2025613950&TypeFile=html.

205. Маршалко, Д. А. Создание нейронной сети и интерфейса взаимодействия для распознавания рукописных символов/ Д. А. Маршалко// Ученые записки Брянского государственного университета. 2020 (3). С. 19 – 26.

206. Ильясов, Н. И. Энтропия неравновесных систем/ Н. И. Ильясов, А. А. Мукаева// Казахский национальный женский педагогический университет. 2019. №1 (77). С. 70 – 78.

207. Митрохин, С. И. О спектре семейства дифференциальных операторов, потенциалы которых сводятся к дельта-функции Дирака/ С. И. Митрохин// Вестник Омского университета. 2021. Т.26. №1. С. 7 – 15.

208. Ильюшин, А. А. Механика сплошной среды. Учебник/ А. А. Ильюшин. М.: Изд-во МГУ, 1978. 287 с.

209. Кийко, И. А. Пластическое течение металлов/ И. А. Кийко/ Сб. «Научные основы прогрессивной техники и технологии». М.,1985. С. 102 – 133.

210. Сосенушкин, Е. Н. Аналитические и физические модели технологии обратного выдавливания/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. Е. Сосенушкин // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2019. № 9. С. 23 – 32.

211. Кадымов, В. А. Контактная задача пластического течения в тонкослойных областях с продольными ребрами/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ Сб. «Упругость и неупругость». – М.: Изд-во МГУ, 2021. С. 198 – 207. Матер. Междунар. симп. по проблемам мех. деф. тел, посв. 110-летию А. А. Ильюшина. М.: МГУ им М. В. Ломоносова, 20 – 21 января 2021 г.

212. Сосенушкин, Е. Н. Классификация деталей методами искусственного интеллекта при выборе математической модели решения задач пластического течения / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Желнов // Известия Самарского научного центра Российской академии наук, т. 27, № 2, 2025. С. 170 – 179.

213. Сосенушкин, Е. Н. Развитие теории течения пластически деформируемого слоя/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др.// Изв.Тул.ГУ. Техн. науки. 2019. №5. С.131 – 138.

214. Kadymov, V. A. Modeling of the stamping process of box-type forging/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya/ Web of Conf. ICSSMSTE 2020, № 315, Yalta, 01 July, 2020 // <https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2020/11/contents/contents.html>.

215. Панфилов, Г. В. Условие полной пластичности в осесимметричных задачах теории пластичности/ Г. В. Панфилов, Р. А. Парамонов, Е. Ю. Хвостов // Известия ТулГУ. Технические науки. Вып. 2. Тула: Изд-во ТулГУ, 2010. С. 119 – 127.

216. ГОСТ 4784-2019. Алюминий и сплавы алюминиевые деформируемые. М.: Стандартиформ, 2019. 30 с.

217. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование течения металла по плоскостям со свободным затеканием в ребра/ Е. Н.Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская/ Станкостроение и инновационное машиностроение. Проблемы и точки роста: матер. Всероссийской н.-техн. конф. Уфимск. гос. авиац. техн. ун-т. Уфа: РИК УГАТУ, 2019. С.337 – 342.

218. Кадымов, В. А. Математическое моделирование процесса затекания пластически деформируемого слоя в ребра/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская и др./ Сборник «Теорет. и прикл. механика». междунар. научно-техн. конф. (Белорусский нац. техн. ун-т). Минск: БНТУ, 2019. Вып. 34. С.184 – 189.

219. Сосенушкин, Е. Н. Механика выдавливания алюминиевого сплава при штамповке поковки с продольными рёбрами/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др.// Цветные металлы. 2019. №3. С.69 – 75.

220. Артес, А. Э. Разработка системы технологической подготовки группового производства деталей методами холодной объемной штамповки/ А. Э. Артес // Кузнечно-штамповочное производство. 1985. №11. С. 26 – 28.

221. Sosenushkin, E. N. Development of the theory of flow of a plastically deformable layer/ E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya and et/ Известия ЮФУ. Технические науки. 2019. № 5. С. 131.

222. Патент на изобретение RU 2724235 С2 МПК В21К 1/76 Способ формообразования тонкопалотной поковки [текст] / Российская Федерация, Сосенушкин Е. Н., Иванов К. Н., Сосенушкин А. Е., Яновская Е. А., Кинжаев Т. А.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический университет "СТАНКИН"; заявка № 2018125281 от 10.07.2018; опубл. 22.06.2020 бюл. № 18.

223. Патент на изобретение RU 2725541 С2 МПК В22Д 18/02 Способ формообразования тонкопалотной поковки [текст] / Российская Федерация, Сосенушкин Е. Н., Иванов К. Н., Сосенушкин А. Е., Яновская Е. А., Кинжаев Т. А., Тимохина А. М.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". Заявка № 2018125280 от 10.07.2018; опубл. 02.07.2020 бюл. № 19.

224. Сосенушкин, Е. Н. Математическая модель штамповки фланца с выдавливанием ребер/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др. / Сб. научных статей и докладов «Состояние и перспективы развития отечественных технологий обработки металлов давлением и оборудования кузнечно-прессового машиностроения». Рязань: ОАО «Тяжпрессмаш», 2019. С.341 – 349.

225. Архипов, А. А. Разработка эффективного технологического процесса объемной штамповки поволоков фланцев сложной формы, Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Специальность 2.5.7 «Технологии и машины обработки давлением». Москва: 2022. 160 с.

226. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование штамповки прямоугольного фланца с выдавливанием выступа/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Архипов // Вестник МГТУ «Станкин». №4 (51). 2019. С. 65 – 70.

227. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование холодного выдавливания поволоков фланца с контурным ребром/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Архипов/ В сборнике: Кузнец - всем ремеслам отец/ Сборник материалов I Международной научно-практической конференции (в рамках

Международного кузнечного фестиваля «Секреты средневековых кузнецов»). Москва, 2023. С. 24 – 33.

228. Сосенушкин, Е. Н. Решение задачи Л. Прандтля применительно к фланцу, занимающему область сложной конфигурации/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская, А. А. Архипов / В сборнике: Теоретическая и прикладная механика. Международный научно-технический сборник. Минск, 2022. С. 181 – 186.

229. Яновская, Е. А. Аппроксимация течения слоя ограниченной толщины многосвязного контура совокупностью течений односвязных областей/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук, т. 25, № 6, 2023. С. 139 – 147.

230. Кадымов, В. А. Теория течения в тонком пластическом слое и различные обобщения задачи Л. Прандтля/ В. А. Кадымов, Е. А. Яновская/ Сб. тезисов 3-ей международной конференции «Моделирование нелинейных процессов и систем». М.: Янус-К, 2019. С.108 – 111.

231. Kadymov, V. A. Contact problems of plastic flow in a thin layer: theory: Analysis of solutions and applications/ V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya// Journal of Machinery Manufacture and Reliability. 2022. Т. 51. № 3. С. 206 – 215.

232. Сосенушкин, Е. Н. Математическое моделирование силовых и деформационных параметров при сжатии пластического слоя/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская/ В книге: Двадцать седьмая международная научная конференция "МАТЕМАТИКА. КОМПЬЮТЕР. ОБРАЗОВАНИЕ", XI Общероссийский симпозиум с международным участием "Биофизика сложных систем: вычислительная и системная биология, молекулярное моделирование". Тезисы. 2020. С. 178.

233. Сосенушкин, Е. Н. Прогнозирование силовых параметров прямого выдавливания ребер стабилизаторов из алюминиевых сплавов/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др./ XII общеросс. н.-практ. конф. «Иннов. технологии и технические средства спец. назначения», Балт. гос. техн. ун-т. СПб, 21-23 ноября 2019 г. 6 с.

234. Гуреева, Т. В. Исследование и совершенствование технологии прямого выдавливания для изготовления поковок с продольными ребрами из алюминиевых сплавов. / Т. В. Гуреева. Дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н. Спец. 05.02.09. М.: МИСиС, 2021. 149 с.

235. Свидетельство № 2021614081 о государственной регистрации программы для ЭВМ Прогнозирование силовых параметров выдавливания оребренных деталей/ Е. Н. Сосенушкин, Т. В. Гуреева, Е. А. Яновская, В. О. Грибанова. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 18.02.2025. Бюл. №2. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025. 1 с. <https://www.fips.ru/registers-web/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1>.

236. Классификация листовых металлов по толщине. [Электронный ресурс]. Режим доступа <https://market.severstal.com/ru/ru/t/21002>, свободный (дата обращения 28.08.2023).

237. Сосенушкин, Е. Н. Обобщенный анализ напряженного состояния формоизменяющих операций листовой штамповки с осевой симметрией / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. В. Емельянов/ В сборнике: СОВРЕМЕННЫЕ МЕТАЛЛИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ И ТЕХНОЛОГИИ (СММТ '2015). Сборник трудов 11-й международной научно-технической конференции. 2015. С. 173 – 182.

238. Сосенушкин, Е. Н. Повышение эффективности штамповки полых изделий за счет совершенствования математических моделей осесимметричной деформации/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ В книге: Математика. Экономика. Образование; Ряды Фурье и их приложения; Фундаментальные проблемы информационных и коммуникационных технологий. Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Московский физико-технический институт (ГУ), Южный федеральный университет, Государственный морской университет им. адм. Ф. Ф. Ушакова, МОО "Женщины в науке и образовании", Учебный центр "Знание". 2012. С. 179 – 180.

239. Сосенушкин, Е. Н. Определение полей напряжений при пластическом деформировании элементов оболочек / Сосенушкин Е. Н., Третьякова Е. Н.,

Яновская Е. А.// Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2010. № 1. С. 49.

240. Сосенушкин, Е. Н. Ресурсосберегающие технологии изготовления деталей трубопроводной арматуры/ Е. Н. Сосенушкин //Технология машиностроения. 2010. №3. С.14 – 16.

241. Сосенушкин, Е. Н. Трубные заготовки: технологический аспект раздачи и обжима/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, Е. А. Яновская и др.// Вестник МГТУ «Станкин». 2010. №4. С.36 – 41.

242. Сосенушкин, Е. Н. Моделирование операции раздачи трубных заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, Д. В. Хачатрян и др.// Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2013. №3. С.618 – 631.

243. Патент на изобретение №2460604 Штамп совмещенного действия для получения преимущественно трубных изделий с плоским фланцем. МПК В21D 22/02. Е. Н. Сосенушкин, И. Е. Смолович, Д. В. Хачатрян, Е. А. Яновская. Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 07.04.2011; опубл. 10.09. 2012, бюл. №25. 10 с.

244. Сосенушкин, Е. Н. Экспериментальные исследования формоизменения стальных труб/ Е. Н. Сосенушкин, В. Н. Климов, Е. А. Яновская и др. // Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2010. №6. С.39 – 43.

245. Сосенушкин, Е. Н. Штамповка сферических и конических деталей из трубных заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, Яновская Е. А., Третьякова Е. И. и др. // Заготовительные производства в машиностроении. 2010. №11. С.18 – 21.

246. Сосенушкин, Е. Н. Статический критерий устойчивости трубных анизотропных заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, Е. И. Третьякова, А. Махдиян // Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2008. №2. С.169 – 176.

247. Sosenushkin, E. N. Stress state and deformability of metall in axisymmetric extension/ E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, V. V. Emel'yanov Russian Engineering Research. 2015. T. 35. № 6. С. 462 – 465.

248. Сосенушкин, Е. Н. Неравномерная раздача трубных заготовок/Е. Н. Сосенушкин, И. Е. Смолович, Е. А. Яновская, В. Ю. Киндеров// Вестник МГТУ "Станкин". 2015. № 4 (35). С. 15 – 21.

249. Патент на полезную модель №100928 Пуансон для неравномерной раздачи трубных заготовок/ И. Е. Смолович, Е. Н. Сосенушкин, Д. В. Хачатрян, Е. А. Яновская. Патентообл. ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заявл. № 2010125846, 24.06.2010; опубл. 10.01.2011. 3 с.

250. Яновская, Е. А. Штамповка конических изделий. Теория и эксперимент [Монография]/ Е. А. Яновская, Е. Н. Сосенушкин. Deutschland, Saarbrucken: Palmarium Academic Publishing, 2016. 251 с.

251. Kadymov, V. A. Stress state parameters of the plastic forming operations / V. A. Kadymov, E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, V. V. Emelyanov, V. Y Kinderov. /В сборнике: INTERNATIONAL CONFERENCE ON EUROPEAN SCIENCE AND TECHNOLOGY. 2014. С. 451 – 459.

252. Сосенушкин, Е. Н. Вытяжка цилиндрических деталей из биметаллов/ Е.Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. В. Емельянов В сборнике: ОМД 2014. Фундаментальные проблемы. Инновационные материалы и технологии. Материалы Международного научно-технического конгресса. 2014. С. 181 – 187.

253. Сосенушкин, Е. Н. Напряженное состояние и деформируемость металла при осесимметричной вытяжке/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, В. В. Емельянов// СТИН. 2014. № 12. С. 21 – 25.

254. Артес, А. Э. Технологические процессы изготовления поковок из трубных заготовок/ А. Э. Артес// Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2003. №11. С.25 – 31.

255. Шевчук, С. А. Штамповка деталей арматуры в мелкосерийном производстве/ С. А. Шевчук, О. А. Шевчук, А. Э. Артес и др.// Арматуростроение. 2006. №4(43). С. 72 – 74.

256. Артес, А. Э. Проблемы производства крупных поковок в отечественном машиностроении/ А. Э. Артес, Е. Н. Сосенушкин// Технология машиностроения. 2012. №1. С.11 – 15.

257. Пономарев, А. С. Перспективные процессы деформации чугуна с шаровидным графитом/ А. С. Пономарев, Е. Н. Сосенушкин, В. Н. Климов// Кузнечно-штамповочное производство. Обработка металлов давлением. 2010. № 6. С.32 – 35.

258. Сосенушкин, Е. Н. Штамповка высокопрочного чугуна. Производство изделий из центробежнолитых труб/ Сосенушкин Е. Н., Яновская Е. А., Пономарев А. С./ [Монография] Москва: Янус-К, 2020. 119 с.

259. Патент на изобретение RUS №2422235 МПК В21К 1/02 Способ получения мелющих тел/ А. М. Володин, А. Э. Артес, В. А. Сорокин, Е. Н. Сосенушкин, Н. П. Петров, А. В. Белов, В. В. Третьюхин/ Патентообл. ГОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2010116377/02 от 27.04.2010; опубл. 27.06.2011. бюл. № 18.

260. Системы пластического деформирования материалов/ Сб. научн. трудов/ Под ред. Е. Н. Сосенушкина, А. М. Смирнова. М.: МГТУ «СТАНКИН» 2004. 240 с.

261. Патент на изобретение RU 2824551 С1, 12.08.2024. Способ профилирования фигурного контура плоскостной заготовки для штамповки гаечного ключа / Сосенушкин Е.Н., Гусев Д.С., Яновская Е.А. // Патент на изобретение RU 2824551 С1, 12.08.2024. Заявка № 2023123381 от 08.09.2023.

262. Сосенушкин, Е. Н. Технологические процессы штамповки изделий из толстостенных труб/ Е. Н. Сосенушкин, В. В. Третьюхин, Е. А. Яновская. Кузнечно-штамповочное производство. Обработка материалов давлением. 2013. № 2. С. 25 – 29.

263. Бильчук, М. В. Прогнозирование образования поверхностных дефектов фланцевой части поковок при горячей объемной штамповке/ М. В. Бильчук, Е. Н. Сосенушкин// Вестник МГТУ Станкин. 2012. №4(23). С.44 – 48.

264. Бильчук, М. В. Автоматизация этапов проектирования процессов закрытой горячей штамповки фланцевых поковок. Теория, моделирование, эксперимент/ М. В. Бильчук, Е. Н. Сосенушкин. М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2021. 118 с.

265. ГОСТ 8734-85. Трубы стальные бесшовные холоднодеформированные. Сортамент. М.: Издательство стандартов, 1985. 12 с.

266. Сосенушкин, Е. Н., Математическая модель управления распределением деталей по технологическим группам/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, Е. И. Третьякова и др.// Известия Тульского государственного университета. Технические науки. 2009. №3. С.47 – 53.

267. Утяшев, Ф. З. Современные методы интенсивной пластической деформации/ Ф. З. Утяшев. Уфа: УГАТУ, 2008. 313 с.

268. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела/ Ю. Н. Работнов. М.: Наука, 1979. 744 с.

269. Филин, А. П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 2-х т. Т.1/ А.П. Филин. М.: Наука, 1975. 832 с.

270. Сосенушкин, Е. Н. Теория обработки металлов давлением. Напряженное состояния в окрестности точки деформируемого тела: учебное пособие/ Е. Н. Сосенушкин. М.: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН», 2020. 125 с.

271. Смирнов-Аляев, Г. А. Сопротивление материалов пластическим деформациям/ Г. А. Смирнов-Аляев. Ленинград: Машгиз, 1949. 247 с.

272. Томленов, А. Д. Теория пластических деформаций металлов/ А. Д. Томленов. М.: Машгиз, 1951. 199 с.

273. Ренне, И. П. Устойчивость пластического течения в процессах формообразования листовых заготовок из трансверсально изотропного материала/ И. П. Ренне, Г. Л. Грдилян, В. С. Зиновьев// Кузнечно-штамповочное производство. 1978. №3. С.17 – 21.

274. Гоного, О. А. О показателях эффективности процессов пластического деформирования/ О. А. Гоного, Н. А. Шестаков// Кузнечно-штамповочное производство. 1986. №10. С.3 – 4.

275. Pelczynski. T / Zagadnienia wyteżenia materialów. Rys historyczny, «Obróbka hlasyyczna», 1962. №1.

276. Назарян, Э. А. Кинематика деформирования в формоизменяющих операциях листовой штамповки/ Э. А. Назарян, В. Д. Константинов// Вестник машиностроения. 1999. №2. С.35 – 41.

277. Назарян, Э. А. Деформации при отбортовке круглых отверстий в тонких пластинах/ Э. А. Назарян, Н. Н. Араб// Заготовительные производства в машиностроении. 2009. №3. С. 22 – 26.

278. Sosenushkin, E. N. The mathematical and Physical Modeling of Distributions Operations in Crimp Conical Shells / E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya/ «Nonlinearity. Problems, Solutions and Applications» – Nova Science Publishers. New – York. 2017. Vol.1. Pp.499 – 518.

279. Сосенушкин, Е. Н. К вопросу о моделировании напряженно-деформированного состояния при обработке давлением / Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др.// Известия ТулГУ. Технические науки. 2017. №11 – 1. С.82 – 100.

280. Сосенушкин, Е. Н. Кинематическая и динамическая модели механики деформируемого твердого тела/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др.//Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2016. Т.18. №1(2). С. 300 – 308.

281. Сосенушкин, Е. Н. Анализ напряженного состояния при пластическом деформировании / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Татаринцев, А. Е. Сосенушкин // В сборнике: Проблемы и перспективы развития машиностроения. Сборник научных трудов международной научно-технической конференции, посвящённой 60-летию Липецкого государственного технического университета. А.М. Корнеев (ответственный редактор). 2016. С. 218 – 224.

282. Sosenushkin, E. N. The parameters of the stress state in the operations of plastic deformation / E. N. Sosenushkin, V. A. Kadymov, E. A. Yanovskaya, A. A. Tatarencev, A. E. Sosenushkin // Key Engineering Materials. 2016. Т. 684. С. 57 – 66.

283. Свидетельство №2019660522 о государственной регистрации программы ОВОЛОСНКА для ЭВМ / Е. Н. Сосенушкин, С. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. С. Ранишевская. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл.

07.08.2019. Бюл. №8. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2019. 1 с. https://www.fips.ru/registers_web/action?acName=clickTree&nodeId=2684&maxLevel=1.

284. Свидетельство №2025613951 о государственной регистрации программы «Динамическое нагружение полого стержня» для ЭВМ / Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. А. Баданов. Москва: ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН». Оpubл. 18.02.2025. Открытые реестры ФИПС. Реестр программ для ЭВМ, 2025

285. Патент на изобретение RUS №2519697 МПК В21J 5/06 Способ углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, Г. М. Цфас, А. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская и др. / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013112791/02 от 22.03.2013; опубл. 20.06.2014; бюл. №17.

286. Патент на изобретение RUS №2509621 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, Г. М. Цфас, Е. А. Яновская и др. / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 201215457/02 от 17.12.2012; опубл. 20.03.2014; бюл. №8.

287. Патент на полезную модель RUS №133440 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. № 2013115205; опубл. 05.04.2013; опубл. 20.10.2013.

288. Патент на полезную модель RUS №141441 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, А. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013158670; 30.12.2013; опубл. 28.04.2014.

289. Патент на полезную модель RUS №144975 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Э. Артес, А. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская / Патентообл. ФГБОУ ВПО МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2013123620; 23.05.2013; опубл. 31.07.2014.

290. Патент на полезную модель RUS №163796 МПК В21С 25/02 Устройство для канального углового прессования/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, Л.М.

Овечкин, Е. А. Яновская, А. Н. Никич / Патентообл. ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2015147992/02; 09.11.2015; опубл. 10.08.2016.

291. Патент на полезную модель RUS №171385 МПК В21J 13/02 Штамп для углового прессования заготовок/ Е. Н. Сосенушкин, А. Е. Сосенушкин, Е. А. Яновская и др./ Патентообл. ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»; заяв. 2016112591; 04.04.2016; опубл. 30.05.2017. Бюл. № 16.

292. Сосенушкин, Е. Н. Модель деформированного состояния штампуемой заготовки/ Е. Н. Сосенушкин, В. А. Кадымов, Е. А. Яновская и др. / Сб. научн. трудов междунар. научно-техн. конф., посвященной 60-летию Липецкого гос. техн. ун-та, 17-18 ноября 2016г. В 2- ч. Ч.2. С. 224 – 231.

293. Дель, Г. Д. Технологическая механика/ Г. Д. Дель. М.: Машиностроение, 1978. 174 с.

294. Пузырь, Р. Г. Установление поля напряжений при радиально-ротационном профилировании цилиндрической заготовки без учета радиусов закругления деформирующего инструмента / Р. Г. Пузырь, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская // Вестник МГТУ "Станкин". 2013. № 4 (27). С. 42 – 47.

295. Яновская, Е. А. Математическое моделирование ротационной вытяжки многослойных листовых материалов/ Е. А. Яновская, Е. Н. Сосенушкин, В. В. Емельянов// Вестник МГТУ "Станкин". 2019. № 3 (50). С. 40 – 43.

296. Sosenushkin, E. N. Mechanics of nonmonotonic plastic deformation E. N. Sosenushkin, E. A. Yanovskaya, A. E. Sosenushkin, V. V. Emel'yanov// Russian Engineering Research. 2015. Т. 35. № 12. С. 902 – 906.

297. Сосенушкин, Е. Н. Механика немонотонных процессов пластического деформирования/ Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская, А. Е. Сосенушкин и др.// Вестник машиностроения. 2015. №9. С. 29 – 33.

298. Мартинсон, Л. К. Дифференциальные уравнения математической физики: учебник для студентов вузов / Л. К. Мартинсон, Ю. И. Малов; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1996. 368 с.

299. Тищук, Л. И. Анализ рынка программных продуктов, предназначенных для моделирования технологических процессов / Л. И. Тищук, К. Н. Соломонов //

Вестник Карагандинского государственного индустриального университета. 2013. № 2. С. 50 – 55.

300. Тищук, Л. И. Разработка методики проектирования процессов пластического формоизменения металлических плоских заготовок на основе компьютерного и физического моделирования: дисс. на соиск. уч. ст. к.т.н: 05.16.05 / Тищук Людмила Ивановна. Воронеж: Филиал ФГБОУ ВО «Ростовского гос. ун-та путей сообщения», 2018. 179 с.

301. Семенов, Е. И. Ковка и штамповка: Справочник в 4-х томах. Т.4. Листовая штамповка / Е. И. Семенов; под ред. А. Д. Матвеева; ред. совет: Е. И. Семенов (пред.) и др. М.: Машиностроение, 1987. 544 с.

302. Zhang, T. Influence of process parameters on surface residual stress for thin-wall cylindrical part in the reduction spinning / T. Zhang, L. Xinhe, L. Yazhou, C. Shiwu et al. // Forging and Stamping Technol. 2017. №1(42). P.47 – 53.

303. Bai, Q. Finit element modeling of power spinning of thinwalled shell with hoop inner rib / Q. Bai, H. Yang, M. Zhan // Transaction of Konferrous Metal Society China. 2008. Vol.18. P. 6 – 13.

304. Кадымов, В. А. О растекании между сближающимися жесткими плитами пластического слоя, состоящего из разных сред/ В. А. Кадымов, Н. А. Белов // Матер. междунар. научн. конф. «Соврем. пробл. математики, механики и информатики». Тула: ТулГУ. 2012. С.150 – 157.

305. Кадымов, В. А. Экспериментальные исследования по пластической осадке между неподвижными стенками тонких полос в форме прямоугольника и сектора/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Н. А. Белов // Известия МГТУ «МАМИ». № 2(16). 2013. Т.2. С.206 – 212.

306. Кадымов, В. А. Эксперименты по стесненной осадке тонкого пластического слоя прямоугольной формы/ В. А. Кадымов, Е. Н. Сосенушкин, Е. А. Яновская/ Моделирование нелинейных процессов и систем. С. 130 – 136. Материалы шестой международной конференции. М.: Янус-К, 2023. 338 с.

307. Яновская, Е. А. К выбору математической модели для корректного решения краевой задачи течения тонкого слоя пластического материала при сжатии

образца в виде кругового сектора/ Е. А. Яновская// Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2023. Т. 25. № 3 (113). С. 140 – 146.

308. ГОСТ 3778-98 Свинец. Технические условия. Минск: ИПК Издательство стандартов, 2003. 8 с.

309. ГОСТ 2839–80 Ключи гаечные с открытым зевом двусторонние. Конструкция и размеры. – М.: Издательство стандартов, 1987. – 12 с.

310. ГОСТ 2839–80 Ключи гаечные с открытым зевом двусторонние. Конструкция и размеры. – М.: Издательство стандартов, 1987. – 12 с.

311. ГОСТ 4543–2016Metalлопродукция из конструкционной легированной стали. Технические условия. – М.: Стандартинформ, 2019. – 50 с.

312. ГОСТ 1050–2013 Metalлопродукция из нелегированных конструкционных качественных и специальных сталей. Общие технические условия. – М.: Стандартинформ, 2014. – 32 с.

313. Гусев, Д. С. Совершенствование процессов горячей объемной штамповки поковок с тонкими полотнами. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Специальность 2.5.7 – «Технологии и машины обработки давлением». Москва: 2024. – 185 с.

314. Пат. 2781825С1 Российская Федерация, МПК В21К5/16. Способ изготовления гаечных ключей пластическим деформированием [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Гусев Д. С., Рогулин С. А, Хохлова Н. Г.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". – № 2021136351; заявл. 09.12.2021; опубл. 18.10.2022, бюл. № 29.

315. Пат. 2781826С1 Российская Федерация, МПК В21К5/16. Способ штамповки гаечных ключей [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Гусев Д. С., Рогулин С. А, Хохлова Н. Г.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический

университет "СТАНКИН". – № 2021136348; заявл. 09.12.2021; опубл. 18.10.2022, бюл. № 29.

316. Пат. 2784307С1 Российская Федерация, МПК В21К5/16. Способ изготовления гаечных ключей пластическим деформированием [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Гусев Д. С., Шарыкин М. В., Хохлова Н. Г.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". – № 2021136355; заявл. 09.12.2021; опубл. 23.11.2022, бюл. N 33.

317. Пат. 2784309С1 Российская Федерация, МПК В21К5/16. Способ штамповки гаечных ключей [текст] / Сосенушкин Е. Н., Сосенушкин А. Е., Кадымов В. А., Яновская Е. А., Гусев Д. С., Шарыкин М. В., Хохлова Н. Г.; патентообладатель Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Московский государственный технологический университет "СТАНКИН". – № 2021136354; заявл. 09.12.2021; опубл. 23.11.2022, бюл. № 33.

318. Сосенушкин Е.Н. Теоретические и технологические аспекты обжима трубных заготовок / Е. Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская, Д.В.Хачатрян, В. Ю. Киндеров // Известия МГТУ МАМИ, 2013. Т.2. №2(16). С. 139 –145.

319. Яновская Е.А. Гносеологический аспект создания математической модели в технике / Е. Н. Сосенушкин, Е.А. Яновская // Вестник МГТУ «СТАНКИН». 2014. №1 (28). С. 131 – 134

ПРИЛОЖЕНИЕ

Акт об использовании результатов диссертации в промышленности



НПО ТЕХНОМАШ
ИМ. С. А. АФАНАСЬЕВА

ГОСУДАРСТВЕННАЯ КОРПОРАЦИЯ ПО КОСМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ «РОСКОСМОС»
АКЦИОНЕРНОЕ ОБЩЕСТВО «НАУЧНО-ПРОИЗВОДСТВЕННОЕ ОБЪЕДИНЕНИЕ
«ТЕХНОМАШ» ИМЕНИ С.А. АФАНАСЬЕВА»
(АО «НПО «ТЕХНОМАШ» ИМ. С.А. АФАНАСЬЕВА.»)

127018, г. Москва, 3-й проезд Марьиной Рощи, д. 40, а/я 131
тел.: +7(495) 689-50-66, факс: +7(495) 689-73-45
www.tnmpo.ru e-mail: info@tnmpo.ru

ОГРН 1217700647812, ИНН 9715411975, КПП 771501001

«УТВЕРЖДАЮ»

Заместитель генерального директора-

Главный технолог

И.В. Онищенко

«18» 2024 г.

АКТ

внедрения результатов диссертационной работы на соискание ученой степени д.ф.-м.н. на тему «Математические модели нестационарного вязкопластического течения тонких пластических слоев в неканонических областях», выполненной к.т.н., доцентом Яновской Еленой Александровной

Для описания процессов течения тонких кусочно-однородных слоев целесообразно рассмотреть плоские биметаллические заготовки, формоизменение которых проводится как сжатием между жесткими поверхностями тел штампового инструмента, так и с помощью вращающегося инструмента с локализацией очага деформации.

Первые из перечисленных процессов пластического деформирования способствуют получению различного вида оребрений на относительно тонких поверхностях деталей (фланцы с ребрами жесткости, пластины с контурным оребрением, крыльчатки и прочие).

При использовании вторых из перечисленных процессов, например, таких как ротационная вытяжка с утонением стенки заготовки, осуществляется возможность получать достаточно тонкостенные пространственные детали с осевой симметрией. Качество изделий из нескольких слоев с неоднородными свойствами, например, из биметаллических заготовок, определяется обоснованием и выбором степеней деформации более мягкой компоненты при реализации технологии ротационной вытяжки с утонением стенки детали и зависит от многих факторов: углов наклона образующей конических изделий, геометрических размеров деформирующего инструмента-ролика, режимов деформирования, таких как частота вращения оправки и скорость подачи ролика.

За счет управления технологическими параметрами двух групп процессов пластического формоизменения автору диссертации к.т.н., доценту кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН» Яновской Е.А. (научный консультант д.т.н., профессор Е.Н. Сосенушкин) удалось не только получить аналитические решения, подтвержденные имитационным моделированием, но и избежать появления брака: для первой группы процессов прогнозировать исчерпание ресурса пластичности металла, во втором – предупредить расслоение биметаллических заготовок, состоящих из стали 12Х18Н10Т и алюминиевого сплава АМгб, в процессе локального деформирования и получить полые конические изделия заданных размеров и точности с удовлетворительной шероховатостью поверхности. Положительным фактором является повышение прочностных характеристик материалов заготовки за счет деформационного упрочнения.

Получению важных для промышленности результатов предшествовала постановка и решение краевых задач теории вязкопластического течения тонких слоев, в том числе разнородных по толщине металлов. Решение задач математической физики проводилось как аналитическими, так и численными методами. Выявлены взаимосвязи технологических параметров с геометрией деталей, изготавливаемых сжатием и ротационной вытяжкой, а также связи с механическими характеристиками слоев металла.

Полученные соискателем ученой степени д.ф.-м. наук Е.А. Яновской результаты внедрены в АО «НПО «Техномаш» им. С.А. Афанасьева» при технологической подготовке производства как поковок с оребрением, так и полых осесимметричных изделий из биметаллов, получаемых ротационной вытяжкой с утонением стенки.

Начальник управления технологий
обработки материалов



Л.М. Овечкин

Акт об использовании результатов диссертации в учебном процессе



МИНОБРНАУКИ РОССИИ

федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования

«Московский государственный технологический университет «СТАНКИН»
(ФГБОУ ВО «МГТУ «СТАНКИН»)

Вадковский пер., д. 1, г. Москва, ГСП-4, 127994. Тел.: (499) 973-30-76. Факс: (499) 973-38-85
E-mail: rector@stankin.ru

№ _____

«УТВЕРЖДАЮ»

проректор по образовательной
деятельности и молодежной политике

к.т.н. М.В. Бильчук

« 30 » _____ 2025 г

АКТ

внедрения в учебный процесс результатов диссертационной работы,
представленной на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук, выполненной автором
к.т.н., доцентом Яновской Еленой Александровной
на тему «Математические модели нестационарного вязкопластического течения
тонких пластических слоев в неканонических областях»
научная специальность 1.2.2. «Математическое моделирование, численные
методы и комплексы программ» (физико-математические науки)
научный консультант д.т.н., профессор Е.Н. Сосенушкин

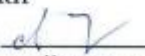


Результаты теоретических исследований нестационарных течений тонких пластических слоев со сложными границами, включая разработанные математические модели, технологические параметры процессов штамповки с учетом растекания металла по поверхностям, полученные на основе разработанных соискателем компьютерных моделей, реализованных численным методом МКЭ, а также результаты экспериментов по реализации вариантов технологии изготовления поковок, имеющих тонкие полотна, которые подтверждают адекватность выдвинутых гипотез, аналитических и компьютерных моделей, включая проведенные расчеты, внедрены в учебный процесс в курсах бакалавриата «**Математический анализ**», согласно учебному плану направления 15.03.04 «Автоматизация технологических процессов и производств», «**Математический анализ**», согласно учебному плану направления 15.03.06 «Мехатроника и компьютерное управление» профиль «Роботы, мехатронные и робототехнические системы: разработка и применение», «**Теория обработки металлов давлением**», согласно учебному плану направления 15.03.01 «Машиностроение», «**Механика**

композиционных материалов» направление 15.03.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств», профиль «Материаловедение в машиностроении», в курсе «**Специальные разделы математической физики и приложения**» для магистратуры направления 09.04.01 «Информатика и вычислительная техника» профиль «Компьютерное моделирование сложных технических систем», в курсе «**Проблемы прочности и пластичности в технологических процессах**» для магистратуры направления 15.04.05 «Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств» профиль «Физико-технологические процессы обработки давлением», в курсе «**Методы и теория оптимизации**» для магистратуры направления 15.04.06 «Мехатроника и робототехника» по профилю подготовки «Компьютерные технологии в робототехнике и мехатронике».

Представитель подразделения,
в котором внедрена разработка:

Начальник
учебно-методического управления
к.т.н.  С.А. Гясто

Представители подразделений
разработчика:

Зав. кафедрой прикладной
математики
д.ф.-м. н.  Л.А. Уварова
Зав. кафедрой композиционных
материалов
д.т.н.  Е.Н. Сосенушкин
Соискатель
к.т.н.  Е.А. Яновская